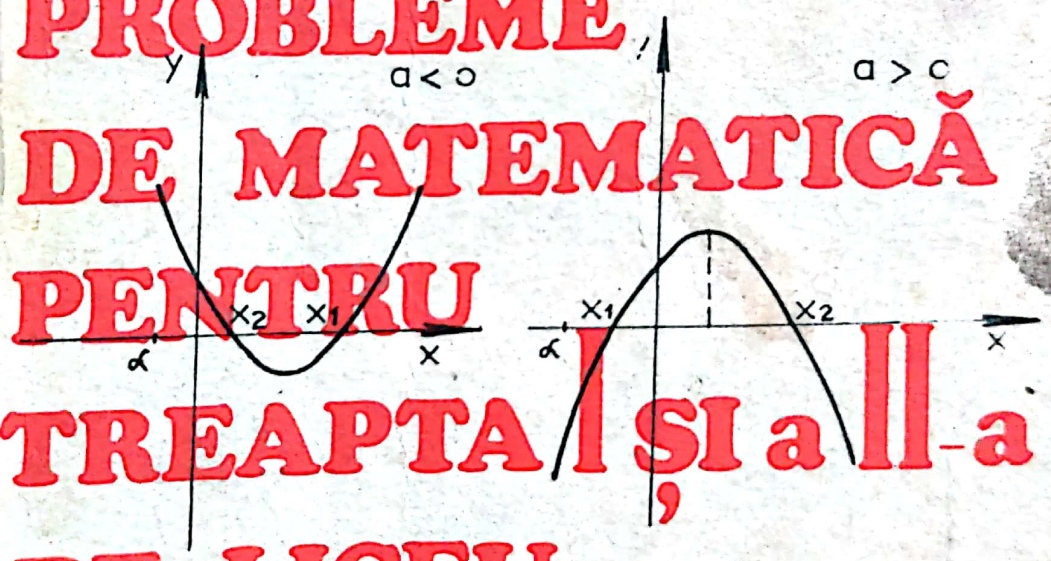
SINTEZE LYCEUM

GHEORGHE CĂLUGĂRIȚA
VALERIU MANGU

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU TREAPTA I ȘI A II-A DE LICEU



EDITURA ALBATROS

GHEORGHE CĂLUGĂRITA • VALERIU MANGU
PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU TREAPTA I ȘI A II-A DE LICEU

Scanned with OKEN Scanner

SINTEZE
LYCEUM

GHEORGHE CĂLUGĂRIȚA
VALERIU MANGU

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU TREAPTA I ȘI a II-a DE LICEU

Cuvînt înainte de
Acad. prof. N. TEODORESCU

Volumul I

EDITURA ALBATROS

Scanned with OKEN Scanner

Culegerile de probleme constituie un sprijin foarte prețios tuturor celor ce vor nu numai să înțeleagă și chiar să asimileze capitolele unei discipline științifice, ci și să le integreze în sistemul de cunoștințe pe care le stăpînesc, le aplică și le fructifică sub diverse forme.

Una dintre aceste forme este concursul de admitere — de intrare, de calificare —, dar nu este singura fiindcă însușirea cunoștințelor și mai ales a tehnicilor de rezolvare deschide adesea poarta curiozității de investigare a unor ținuturi noi din domeniul necunoscutului științific.

Aceste perspective nu sînt specifice numai disciplinelor matematice, culegerile de probleme extinzîndu-și utilitatea și în fizică, chimie, mecanică, științe tehnice și, în general, în orice ramură a științei în care aspectele teoretice sînt cultivate pentru modelarea fenomenelor. Dar, în disciplinele matematice, varietatea problemelor este atît de mare încît rezolvarea lor devine un prilej de satisfacție sportivă, ca și cea a realizării unor performanțe deosebite.

O culegere de probleme de matematică trebuie, prin excelență, să prezinte în primul rînd latura educativă a unui îndreptar viu și sigur, a unui sprijin puternic și plăcut dar în același timp trebuie să deschidă perspective celui ce pornește s-o adîncească, pătrunzînd pas cu pas în bucuria de a simți că mintea rezolvă și scormonește mereu mai departe.

Culegerea de probleme de față este, după cum spun înșiși autorii ei, rodul unei colaborări între profesor și fostul său elev, în care primul vine cu o experiență îndelungată la catedră, iar cel de-al doilea cu entuziasmul

Scanned with OKEN Scanner

și cu tenacitatea tînărului căruia profesorul i-a descoperit aptitudinile și i le-a îndrumat spre migala rodnică a explorării domeniilor matematice dificile și pasionante.

Ea este prelungirea scrisă a unei munci colective de elaborare și redactare a unei reviste tinerești, editată de liceul „Nicolae Bălcescu" din București, unde un grup de tineri au descoperit matematica și au pornit s-o exploreze nu numai pentru ei, ci și pentru toți cei ce ar voi să li se alăture în punerea și rezolvarea problemelor.

Există numeroase culegeri de probleme destinate elevilor de liceu pentru a fi folosite de aceștia, în special în vederea trecerii de concursuri. Multe își împrumută pe tăcute, chiar și fără prelucrări inovatoare, părți mai importante sau mai puțin importante în conținut de la alte lucrări similare, astfel încît nu se poate vorbi de o originalitate remarcabilă pe care ar prezenta-o. Altele, precum cea pe care o prezentăm acum, își trasează un scop și își adaptează structura și funcționalitatea atingerii acestuia, ceea ce le dă o personalitate și un prestigiu deosebite.

Culegerea de față își propune să fie o sinteză a materiilor predate în liceu, sub forma unui număr mare de probleme încadrate în capitole ce încep printr-o prezentare teoretică a conținutului ce urmează să fie problematizat. Partea teoretică a fiecărui capitol este ilustrată prin exemple și aplicații care dau imbold cititorului să atace problemele ce vor urma.

Este remarcabilă grija pedagogică ce se reflectă în legătura deliberată a problemelor ce urmează cu textul teoretic și în soluțiile date acestor probleme. Adesea sînt prezentate mai multe variante ale aceleiași probleme, lăsîndu-se loc aprecierilor cititorului și deprinderii de a se privi o problemă din mai multe puncte de vedere.

O altă formă de antrenament intelectual introdusă de autori este testul: fiecare capitol conține o bogată listă de teste, adică de exerciții orientate fie spre alegerea unei variante din cele înfățișate, fie spre precizarea unei proprietăți care ar putea lua mai multe forme; de exemplu, dacă rangul r al unei matrice dreptunghiulare cu 3 linii și 5 coloane poate fi $r > 3$, $r = 3$, $3 < r < 5$ sau $r < 3$.

Scanned with OKEN Scanner

Un astfel de test are și caracter teoretic iar cititorul este obligat să stăpinească teoria răspunzînd că rangul r nu poate fi mai mare decît 3 dar poate fi egal sau mai mic decît 3. Considerăm ca excelente aceste teste de perspicacitate și discernămînt, care cer nu numai o alegere între mai multe posibilități gata pregătite, ci adesea și o rezolvare tehnică. Fiecare capitol se completează cu probleme propuse cititorului spre rezolvare. Această parte a tematicii culegerii constituie predilecția autorilor și piatra de încercare a cititorilor, problemele fiind ordonate în sensul unei dificultăți crescînde, indicată prin notații corespunzătoare. Există și indicații de rezolvare dar destul de succinte pentru a nu se oferi rezolvitorilor prea multe puncte de sprijin, scopul acestei părți a capitolului fiind deliberat, cel de a obliga pe cititori să lucreze independent folosind cunoștințele, metodele și tehnicile de rezolvare însușite prin primele părți ale capitolului respectiv și ale celor precedente.

Autorii au în vedere pregătirea viitorilor absolvenți de liceu pentru a aborda singuri, fără vreun alt ajutor, tematica programelor concursurilor pe care ar dori să le treacă. Printre acestea se înscriu și olimpiadele de matematică și în consecință pregătirii acestora li se consacră unele capitole speciale a căror utilitate se extinde și la studenți și chiar la profesori.

În privința paternității problemelor cuprinse în lucrare, autorii țin să sublinieze faptul ușor de înțeles și absolut normal, că nu toate problemele prezentate le aparțin. Ar fi chiar neindicată o culegere de probleme inedite destinată pregătirii elevilor pentru viitoare confruntări, fiindcă i-ar lipsi de repere pe care le-ar căuta în informații asupra cerințelor diferitelor concursuri. Ceea ce menționează însă autorii în mod deliberat, este citarea numelor autorilor sau publicațiilor de la care au fost împrumutate diverse probleme, chiar dacă soluțiile date ar fi deosebite de cele anterioare.

Este aici o datorie de corectitudine cu care elevii trebuie învățați din timp prin exemplul personal și această grijă constituie un merit pentru autori.

Scanned with OKEN Scanner

Proporțiile masive ale lucrării în care se înscriu sute de probleme și teste nu o fac totuși greoaie, fiindcă înaintarea în bogăția textului se face gradat și cu sprijin permanent. În ea toate categoriile de cititori își găsesc probleme pe măsura nevoilor și aspirațiilor, ceea ce o recomandă tineretului nostru studios pentru o primire călduroasă și o folosire rodnică.

Acad. prof. NICOLAE TEODORESCU
Secretar General al Uniunii
Balcanice a Matematicienilor,
Președintele Societății de
Științe Matematice din
Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner

DIN PARTEA AUTORILOR

Actuala lucrare, pe care o supunem atenției, îndeosebi, elevilor din licee, este rodul colaborării dintre profesor și fostul său elev în care primul vine cu o îndelungată experiență la catedră iar al doilea cu tenacitatea explorării unor domenii matematice dificile și pasionante.

Munca începută în comun la revista de matematică „514", editată de liceul „Nicolae Bălcescu" din București, a fost continuată în paginile de față, dovedind, încă o dată, justețea opiniei după care, pentru atingerea scopului primordial al învățământului nostru și anume formarea viitorului absolvent, înzestrarea acestuia cu temeinice cunoștințe pentru activitatea sa de mai tîrziu, este necesară o permanentă colaborare între omul de la catedră și cel din bancă.

Încercăm cu această lucrare o sinteză a materiei prevăzută pentru liceu. Aproape fiecare capitol debutează cu un rezumat al părții teoretice existente în fiecare manual, ilustrată cu exemple și aplicații, după care urmează o suită de probleme rezolvate — tipuri clasice — legate de teoria expusă anterior. Sînt prezentate, în frecvente locuri, variante ale aceluiași exercițiu, pentru a dezvolta deprinderea de a înlănțui logic faptele expuse.

Testele — exerciții cărora li se enumeră variante de soluții — pun cititorului două mari probleme: puterea de discernămînt și posibilitatea de rezolvare. Ele constituie un mijloc de verificare pe care îl credem eficient.

Urmează apoi un set de probleme propuse spre rezolvare, care sînt soluționate, parțial sau total, în raport cu dificultatea ridicată. Acestea se găsesc în secțiunile finale ale fiecărui capitol.

Pentru a veni treptat în ajutorul cititorului, aproape fiecare capitol cuprinde și un paragraf cu indicații de

Scanned with OKEN Scanner

rezolvare ale unor probleme mai dificile, care se recomandă să fie consultat înainte de a face apel la soluțiile prezentate.

Pentru problemele cu un grad scăzut de dificultate sau care solicită perspicacitatea cititorilor, nu se dau indicații de rezolvare.

Am considerat util să diferențiem problemele propuse, prin indicarea gradului de dificultate ale acestora notat prin 1, 2, 3 și * la numărul de ordine respectiv (pentru simplificarea scrierii s-a renunțat la aceste notații în citările ulterioare).

Avînd în vedere cantitatea mare de informație care se comunică elevilor în școală, părțile de teorie prezentate în lucrare au fost, evident, selecționate și s-a insistat doar asupra acelora pe care le-am crezut mai deosebite permițîndu-ne, uneori, să prezentăm și cunoștințe suplimentare, organic legate de materia predată în școală, pe care cititorii le pot întîlni în activitățile de vîrf.

De asemenea, în dorința de a completa o parte a matematicii care se întîlnește frecvent la concursurile de matematică dar asupra căreia se insistă mai puțin în școală, a fost introdus un capitol de aritmetică și teoria numerelor, destinat îndeosebi elevilor ce se pregătesc pentru astfel de manifestări.

Cum este și firesc, nu toate problemele ne aparțin. În măsura în care a fost cunoscută sursa, ea a fost citată imediat după enunțul problemei sau în textul soluției. Unele probleme au fost alese din subiectele concursurilor, olimpiadelor naționale sau internaționale, fiind destinate tuturor celor ce doresc să capete gust pentru rezolvarea unor probleme care fac apel la subtilitatea gîndirii.

Pentru îmbogățirea informațiilor, am considerat necesară prezentarea unei bibliografii selective, la sfîrșitul lucrării.

În încheiere, cu speranța că prin strădania noastră am realizat ceva util, exprimăm mulțumiri anticipate tuturor celor care, prin observațiile pe care vor avea amabilitatea să ni le aducă la cunoștință, legate de această lucrare, vor contribui la îmbunătățirea ei, pentru o eventuală nouă ediție.

Scanned with OKEN Scanner

NOTAȚII, ABREVIERI PRINCIPALE[1]

$[x]_*$ ≡ partea întreagă a numărului real x.

$_*(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ≡ cel mai mare divizor comun al numerelor naturale $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

$_*[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ ≡ cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

$\{x\}_*$ ≡ partea fracționară a numărului real x.

N ≡ mulțimea numerelor naturale, $N = \{0, 1, \ldots\}$.

$N^* \equiv N - \{0\}$ (mulțimea numerelor naturale fără 0).

R ≡ mulțimea numerelor reale.

Q ≡ mulțimea numerelor raționale.

C ≡ mulțimea numerelor complexe.

$R^+ \equiv \{x \in R \mid x \geqslant 0\}$.

$R_0^+ \equiv \{x \in R \mid x > 0\}$.

$R^- \equiv \{x \in R \mid x \leqslant 0\}$.

$R_0^- \equiv \{x \in R \mid x < 0\}$.

p_n ≡ al n-lea număr prim.

$\int$ ≡ semnul integralei.

$\Rightarrow$ ≡ semnul implicației logice.

$\Leftrightarrow$ ≡ semnul echivalenței logice.

$(\exists)$ ≡ există (cuantificatorul existențial).

$(\exists!)$ ≡ există și este unic.

---

[1] Afară de cazurile în care se va specifica expres altfel și valabile pentru ambele volume.

Scanned with OKEN Scanner

$(\forall) \equiv$ oricare ar fi (cuantificatorul universal).

$\pi(x) \equiv$ numărul de numere prime care nu depășesc pe x.

$\cap \equiv$ semnul intersecției.

$\cup \equiv$ semnul reuniunii.

$\overset{\text{def.}}{=} \equiv$ egal prin definiție.

$n! \equiv n$ factorial $(n! = 1 \cdot 2 \ldots n)$

$a \mid b,\ b : a \equiv a$ divide pe b.

$a \nmid b \equiv a$ nu divide pe b.

$\frac{df}{dx}$, f'_x, $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv$ derivata funcției f (în raport cu x).

Φ, $\varnothing \equiv$ mulțimea vidă.

$i = \overline{1, n}$; $i = 1, \ldots, n \equiv i$ ia valorile $1, \ldots, n$.

$\in \equiv$ semnul apartenenței (semnul lui *Peano*).

$\notin \equiv$ semnul neapartenenței.

$i \in \overline{1, n} \equiv i$ aparține mulțimii $\{1, \ldots, n\}$.

$\mathcal{P}(A) \equiv$ familia părților (submulțimilor) lui A.

$\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{i=n} a_i, \sum_{1}^{n} a_i, \sum a_i \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (ultimul caz se folosește cînd se înțelege că este vorba de n numere).

$\prod_{i=1}^{n} a_i, \prod_{i=1}^{i=n} a_i, \prod_{1}^{n} a_i, \prod a_i \equiv a_1 a_2 \ldots a_n$ (idem).

$\sum_{a_1, a_2, \ldots, a_n} a \equiv a_1 + \ldots + a_n$ (sau chiar $\sum a$ cînd se înțelege că suma se extinde la numerele $a_1, \ldots, a_n$).

$\prod_{a_1, \ldots, a_n} a \equiv a_1 a_2 \ldots a_n$ (cu aceeași observație).

$\triangle ABC \equiv$ triunghiul ABC.

$\sphericalangle A$, $\hat{A} \equiv$ unghiul A.

$\parallel \equiv$ paralel.

$\perp \equiv$ perpendicular.

$\wedge \equiv$ semnul conjuncției.

$\vee \equiv$ semnul disjuncției.

$\neg \equiv non$ — semnul negației.

Scanned with OKEN Scanner

$\binom{n}{k}$, $C_n^k \equiv$ combinări de n obiecte luate cîte k (numărul submulțimilor mulțimii $\{1, \ldots, n\}$ care conțin k elemente $\left(C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$).

$\bar{z} \equiv$ conjugatul numărului complex z.

$\not\subset \equiv$ nonincluziunea.

grad $P \equiv$ gradul polinomului P.

$|x| \equiv$ modulul numărului x (real sau complex).

$f:E \to F$, $E \xrightarrow{f} F \equiv$ aplicația f care are domeniu de definiție mulțimea E și domeniu de valori mulțimea F.

$g \circ f \equiv$ compunerea funcțiilor f, $f:E \to F$, și g, $g:F \to G$.

$A \times B \equiv$ produsul cartezian al mulțimilor A și B.

$A^n \equiv$ produsul cartezian al mulțimii A cu ea însăși de n ori (sau, încă, n — puterea carteziană a lui A).

$A_n^k \equiv$ aranjamente fără repetiție de n obiecte luate cîte k (numărul submulțimilor ordonate (într-o ordine arbitrară) ale mulțimii $\{1, \ldots, n\}$ care conțin exact k elemente).

$\overline{a_1 \ldots a_{n(c)}} \equiv$ scrierea pozițională, în baza c, a numărului cu cifrele $a_1, \ldots, a_n$ (în această bază).

card A, $\overline{\overline{A}}$, $|A| \equiv$ numărul de elemente ale mulțimii A.

$\min \{a_1, \ldots, a_n\}$, $\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{a_k\} \equiv$ cel mai mic dintre numerele reale $a_1, \ldots, a_n$.

$\max \{a_1, \ldots, a_n\}$, $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{a_k\} \equiv$ cel mai mare dintre numerele reale $a_1, \ldots, a_n$.

$A \equiv B \equiv A$ identic cu B.

$\inf A \equiv$ marginea inferioară a mulțimii de numere reale A.

$\sup A \equiv$ marginea superioară a mulțimii de numere reale A.

$\arg z \equiv$ argumentul numărului complex z.

arc AB, $\overset{\frown}{AB} \equiv$ arcul determinat de punctele A și B pe o anumită curbă.

Scanned with OKEN Scanner

aria $(A_1 \ldots A_n)$, $A_{A_1 \ldots A_n}$, $S_{A_1 \ldots A_n} \equiv$ aria poligonului $A_1 \ldots A_n$.

măs arc AB, măs $\overset{\frown}{AB} \equiv$ măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$.

Vol $(A_1 \ldots A_n)$, $V_{A_1 \ldots A_n} \equiv$ volumul poliedrului $A_1 \ldots A_n$.

$\left\| \begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1m} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nm} \end{matrix} \right\|$, $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \equiv$ matricea cu n linii și m coloane, cu elementele a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

$\left| \begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{1n} \ldots a_{nm} \end{matrix} \right| \equiv$ valoarea funcției determinant asociată matricei $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

$Z^- \equiv \{x \mid x \in Z,\ x \leqslant 0\}$.

$\{P(z)\}_{z \in k} \equiv \{P(z) \mid z \in k\}$.

ELEMENTE DE LOGICĂ

0.1.0. Propoziţii. Conjuncţia „şi". Conjuncţia „sau". Implicaţia. Echivalenţa. Negaţia.

0.1.0.0. Propoziţiile pe care le folosim în mod curent şi care se încadrează într-un sistem de propoziţii — să zicem limba română — sînt, în general, *false* sau *adevărate*[1].

Afirmaţia potrivit căreia orice propoziţie este sau falsă sau adevărată şi care poartă numele de principiul *terţului exclus* (tertium non datur), alături de alte principii, formează baza axiomatică a logicii bivalente. În cadrul acestei logici, aşadar, propoziţiile pot fi false sau adevărate (vorbim, desigur, de propoziţiile care au un înţeles).

0.1.0.1. *Exemplu.* Propoziţia:

„Universul este nemărginit"

este întotdeauna adevărată. Dacă notăm această propoziţie prin P, însemnăm afirmaţia de mai sus prin:

$$F(P) = 1.$$

Propoziţia:

„Universul este mărginit"

este întotdeauna falsă. Dacă notăm această propoziţie tot prin P, însemnăm afirmaţia de mai sus prin:

$$F(P) = 0.$$

[1] Neajunsurile logicii bivalente rezidă şi din faptul că o propoziţie de genul „Nu există viaţă pe Marte!" nu este decidabilă, neavînd valoare semantică în cunoaşterea actuală deşi se întreprind cercetări intense în această direcţie (la vremea consideraţiilor de faţă).

Scanned with OKEN Scanner

0.1.0.2. *Definiție.* Vom numi pe F *funcție de adevăr* (fără a da deocamdată un sens precis noțiunii de funcție); valoarea ei arată deci dacă propoziția al cărei argument este, constituie un adevăr sau nu.

0.1.1.0. Fie P și respectiv Q două propoziții. Propoziția:

$$„P \text{ și } Q“$$

notată și:

$$„P \wedge Q“$$

sau încă:

$$„P \cap Q“$$

este numită *conjuncția* propozițiilor P și Q; ea este adevărată cînd atît P cît și Q sînt adevărate și este falsă dacă cel puțin una din ele este falsă.

Vedem că, în baza observației anterioare:

$$F(P \text{ și } Q) = F(P) \cdot F(Q),$$

dacă convenim să notăm $F(P) = 1$, cînd propoziția P este adevărată și $F(P) = 0$, cînd propoziția P este falsă.

0.1.2.0. Propoziția:

$$„P \text{ sau } Q“$$

notată și prin:

$$„P \vee Q“$$

sau încă:

$$„P \cup Q“$$

este numită *disjuncția* propozițiilor P și Q; ea este adevărată dacă cel puțin una din propozițiile P, Q este adevărată și este falsă cînd ambele propoziții sînt false.

Scriind cu ajutorul funcției de adevăr:

$$F(P \cup Q) = F(P) + F(Q) - F(P)F(Q),$$

Scanned with OKEN Scanner

valabilitatea acestei relații rezultînd din tabelul:

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

0.1.2.1. *Exemple*

a°). Fie propozițiile:

P: „2 este număr natural",

Q: „2,3 este număr întreg".

Rezultă:

$$F(P \text{ și } Q) = 0$$

deoarece propoziția Q este falsă, în timp ce:

$$F(P \text{ sau } Q) = 1$$

deoarece propoziția P este adevărată.

b°). Considerînd propozițiile:

$$P: „5 + 2 = 7{,}1"$$
$$Q: „2 \cdot 3 = 1"$$

este clar că:

$$F(P \text{ și } Q) = F(P \text{ sau } Q) = 0.$$

0.1.3.0. *Definiție.* Fie P și Q două propoziții. Se spune că propoziția P *implică* propoziția Q sau că P este o *condiție suficientă* pentru Q (sau, Q este o *condiție necesară* pentru P) și se scrie:

$$P \Rightarrow Q$$

(care se citește „dacă P atunci Q") dacă P și Q fiind constituite cu ajutorul propozițiilor $p, q, \ldots$ și cu ajutorul *functorilor* $\vee$, $\wedge$ nu are loc niciodată $F(P) = 1$ și $F(Q) = 0$, oricare ar fi valorile logice ale propozițiilor $p, q, \ldots$

Scanned with OKEN Scanner

0.1.4.0. Fie P o propoziție. Numim *negația* propoziției P, propoziția „*non* P" (notată și $\bar{P}$ sau $\neg P$) și care este falsă cînd P este adevărată și adevărată cînd P este falsă. Ca atare:

$$F(non\ P) = 1 - F(P).$$

0.1.5.0. Fie P și Q două propoziții. Tabelul de valori al propoziției $\bar{P} \vee Q$ este:

P	Q	$\bar{P} \vee Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Se observă că dacă propoziția $\bar{P} \vee Q$ este adevărată și dacă P este de asemenea adevărată atunci Q este adevărată. Această propoziție se mai notează și prin:

$$P \longrightarrow Q$$

și se citește „P *implică* Q". Ca atare:

$$F(P \longrightarrow Q) = 1 - F(P) + F(P) \cdot F(Q).$$

0.1.6.0. Fie α și β două propoziții obținute cu ajutorul propozițiilor p, q, t, ... prin aplicarea *functorilor* $\neg$, $\vee$, $\wedge$ de un număr finit de ori. Spunem că α este *echivalentă* cu β și scriem:

$$\alpha \Longleftrightarrow \beta$$

dacă $F(\alpha) = F(\beta)$ oricare ar fi valorile $F(p)$, $F(q)$, $F(t)$, ... ale propozițiilor componente; se citește: „α *dacă și numai dacă* β" sau „α *este o condiție necesară și suficientă pentru* β".

0.1.7.0. Fie P și Q două propoziții. Propoziția:

$$(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$$

se notează:

$$P \longleftrightarrow Q$$

și se citește „P *echivalent* cu Q". În felul acesta:

$$F(P \longleftrightarrow Q) = 1 - F(P) - F(Q) + 2F(P) \cdot F(Q).$$

Scanned with OKEN Scanner

0.1.7.1. *Exemple*

a°). $2 + 3 = 5 \Longrightarrow 7 + 3 = 10$;
b°). Ursul este mamifer $\Longleftrightarrow$ Ora are 3 600 secunde;
c°). 27 este număr prim $\Rightarrow$ 2 este par,

căci $F(2 + 3 = 5) = 1$, $F(7 + 3 = 10) = 1$, pentru primul caz, F(Ursul este mamifer) $= F$ (Ora are 3 600 secunde) $= 1$, pentru al doilea și F(27 este număr prim) $= 0$, F(2 este par) $= 1$.

În plus, oricare ar fi propozițiile p, q, r:

$$\text{d°}).\ p \Longrightarrow p \vee q,$$
$$\text{e°}).\ (q \longrightarrow p) \Longrightarrow \neg p \longrightarrow \neg q,$$
$$\text{f°}).\ (p \longrightarrow q) \Longrightarrow (r \longrightarrow p) \longrightarrow (r \longrightarrow q)$$

demonstrația făcîndu-se dînd propozițiilor p, q, r toate valorile de adevăr pentru care $F(p) = 1$ (pentru d°)), $F(q \to p) = 1$ (pentru e°)), $F(p \to q) = 1$ (pentru f°)) și arătînd că nu poate avea loc respectiv $F(p$ sau $q) = 0$ (pentru d°)), $F(\neg p \to \neg q) = 0$ (pentru e°)), $F[(r \to p) \to \to (r \to q)] = 0$ (pentru f°)).

Propoziția:

$$14 + 7 = 6 \longrightarrow 3 + 9 = 12$$

este adevărată căci $F(3 + 9 = 12) = 1$. Propoziția:

„Ursul este pește $\longleftrightarrow$ În orice triunghi dreptunghic ABC (cu unghiul drept A) are loc relația $a^2 + b^2 = c^2$ (a fiind ipotenuza, iar b și c catetele)"
este falsă căci F(Ursul este pește) $= 0$.

0.2.0. Elemente de logică polivalentă.

0.2.0.0. Prezentarea axiomatică a teoriei mulțimilor poate însă genera paradoxuri (așa-numitele *antinomii*). Pentru a înlătura unele din aceste neajunsuri au fost create așa-numitele logici polivalente.

Alături de cele două valori logice — adevărul și falsul — se introduce o a treia valoare logică, absurdul.

O primă constatare arată, așadar, că mulțimea tuturor propozițiilor se împarte în trei mari categorii,

Scanned with OKEN Scanner

determinate de cele trei valori logice introduse. Pentru simplificare, convenim să notăm cu T mulțimea tuturor propozițiilor cu care lucrăm, cu V mulțimea tuturor propozițiilor adevărate, cu F mulțimea tuturor propozițiilor false și cu A mulțimea tuturor propozițiilor absurde.

Este clar că aceste trei categorii epuizează mulțimea T (principiul cuartului exclus) în sensul că o propoziție poate fi sau adevărată, sau falsă, sau absurdă. Însemnăm acest lucru prin:

$$T = A \cup F \cup V$$

fără a da o interpretare exactă operației $\cup$.

Este, de asemenea, clar că nici o propoziție nu poate fi în același timp și adevărată și falsă. De asemenea, nici o propoziție nu poate fi în același timp și absurdă și adevărată respectiv și absurdă și falsă. Numim acest principiu, *principiul contradicției* și îl însemnăm prin:

$$A \cap F = A \cap V = F \cap V = \varnothing,$$

fără a da deocamdată o interpretare exactă operației $\cap$.

Ideile pot fi prezentate și astfel: fie mulțimea cu trei elemente:

$$B = \{a, 0, 1\}, \quad a \neq 0, \quad a \neq 1$$

(adoptăm punctul de vedere naiv în ceea ce privește noțiunea de mulțime).

Introducem acum aplicația φ de variabilă P, P fiind o propoziție din T, luînd valorile în B astfel:

$$\varphi(P) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } P \in V, \text{ adică dacă propoziția } P \text{ este adevărată;} \\ 0 \text{ dacă } P \in F, \text{ adică dacă propoziția } P \text{ este falsă;} \\ a \text{ dacă } P \in A, \text{ adică dacă propoziția } P \text{ este absurdă.} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Introducem următoarele funcții de o variabilă prin tabelul:

X	a	0	1
$\vdash X$	0	0	1
$* X$	0	1	1
$\downarrow X$	1	0	0
$- X$	1	1	0
$\neg X$	0	1	0
$\exists X$	1	0	1
$\sim X$	a	1	0

(I)

funcții pe care le numim *factori monari*. Tabelul de mai sus trebuie înțeles astfel:

— dacă $X = a$ atunci $\vdash X = 0$,
— dacă $X = 0$ atunci $\vdash X = 0$,
— dacă $X = 1$ atunci $\vdash X = 1$, etc.

Se constată prin calcul că:

$$* X = - \downarrow X = \neg \downarrow X = \sim \downarrow X;$$

avem și:

$\sim \varphi(P) = \varphi(non\ P)$;
$\vdash \varphi(P) = \varphi(P$ este adevărată$)$;
$- \varphi(P) = \varphi(P$ nu este adevărată$)$;
$\neg \varphi(P) = \varphi(P$ este falsă$)$;
$\downarrow \varphi(P) = \varphi(P$ este absurdă$)$;
$* \varphi(P) = \varphi(P$ nu este absurdă$)$.

În adevăr, pentru primul exemplu, negația unei propoziții negative duce la o propoziție afirmativă (uneori, în loc de „fals" se folosește „negativ"); negația unei propoziții pozitive duce la o propoziție negativă (uneori, în loc de „adevărat" se folosește „pozitiv"); negația unei propoziții absurde este și ea absurdă.

Conchidem astfel că valoarea logică a propoziției „*non* P" este $\sim \varphi(P)$ unde „$\sim$" este funcția definită în tabloul de mai sus.

Putem, în felul acesta, numi factorul monar „$\sim$" *negația* în B.

Propoziția:

„P este adevărată"

Scanned with OKEN Scanner

este adevărată dacă și numai dacă $\varphi(P) = 1$, altfel este falsă; propoziția:

„P este falsă“

este adevărată dacă și numai dacă $\varphi(P) = 0$, altfel este falsă; propoziția:

„P este absurdă“

este adevărată dacă și numai dacă $\varphi(P) = a$, altfel este falsă.

Comparînd cu tabelul (I), găsim că:

$$\left.\begin{array}{l}\text{„}P\text{ este adevărată“}\\ \text{„}P\text{ este absurdă“}\\ \text{„}P\text{ este falsă“}\end{array}\right\}\text{ au valorile logice }\left\{\begin{array}{l}\vdash\varphi(P),\\ \downarrow\varphi(P),\\ \urcorner\varphi(P).\end{array}\right.$$

Funcțiile:

$$\left.\begin{array}{c}\vdash\\ \downarrow\\ \urcorner\end{array}\right\}\text{ vor fi numite }\left\{\begin{array}{l}\text{aserțiunea,}\\ \text{absurditatea,}\\ \text{falsitatea.}\end{array}\right.$$

Propoziția „P nu este adevărată“ este adevărată dacă și numai dacă $\varphi(P) \neq 1$, altfel este falsă; propoziția „P nu este absurdă“ este adevărată dacă și numai dacă $\varphi(P) \neq a$, altfel este falsă; propoziția „P nu este falsă“ este adevărată dacă și numai dacă $\varphi(P) \neq 0$, altfel este falsă. Comparînd cu tabloul (I) găsim rezultatele;

$$\left.\begin{array}{l}\text{„}P\text{ nu este adevărată“}\\ \text{„}P\text{ nu este absurdă“}\\ \text{„}P\text{ nu este falsă“}\end{array}\right\}\text{ au valorile logice }\left\{\begin{array}{l}-\varphi(P),\\ *\varphi(P),\\ \urcorner\varphi(P).\end{array}\right.$$

Funcțiile:

$$\left.\begin{array}{c}-\\ *\\ \urcorner\end{array}\right\}\text{ vor fi numite }\left\{\begin{array}{l}\text{neadevărul,}\\ \text{neabsurditatea,}\\ \text{nefalsitatea.}\end{array}\right.$$

Scanned with OKEN Scanner

Suprapunerea a doi factori monari din tabelul (I) este dată de tabelul de mai jos:

	$\vdash$	$*$	$\downarrow$	$-$	$\neg$	$\exists$	$\sim$
$\vdash$	$\vdash$	$*$	$\downarrow$	$-$	$\neg$	$\exists$	$\neg$
$*$	1	1	1	1	1	1	$*$
$\downarrow$	0	0	0	0	0	0	$\downarrow$
$-$	$-$	$\downarrow$	$*$	$\vdash$	$\exists$	$\neg$	$\exists$
$\neg$	$-$	$\downarrow$	$*$	$\vdash$	$\exists$	$\neg$	$\vdash$
$\exists$	$\vdash$	$*$	$\downarrow$	$-$	$\neg$	$\exists$	$-$
$\sim$	$-$	$\downarrow$	$*$	$\vdash$	$\exists$	$\neg$	I

ea fiind făcută după regula linie-coloană.

Aici am notat cu I funcția identitate și cu 0, 1 funcțiile constante.

Tabelul de mai sus conține 49 principii logice. De exemplu, egalitatea:

$$\vdash \vdash = \vdash$$

se traduce prin *principiul dublei aserțiuni*: propozițiile:

„P este adevărată“

și:

„Este adevărat că P este adevărată“

au aceeași valoare logică. Tot astfel egalitatea:

$$\sim \sim = I$$

sau, altfel scris:

$$\sim \sim X = X,\ X \in B$$

se traduce prin *pirincipiul dublei negații*: orice fel de propoziție are aceeași valoare logică ca și dubla ei negație.

Acest principiu este diferit de principiul dublei falsități:

$$\neg \neg = \exists$$

Scanned with OKEN Scanner

care se traduce prin raționamentul:

„Este fals că P este falsă"

are aceeași valoare logică ca și propoziția:

„P nu este falsă".

0.3.0. Tipuri de demonstrații.
Oricare ar fi propozițiile p, q, r au loc:

0.3.0.1. Raționamentul prin *modus ponens*:

$$p \wedge (p \longrightarrow q) \Longrightarrow q$$

care se traduce prin: dacă se afirmă p și p implică q atunci se afirmă și q.

0.3.0.2. Trecerea de la echivalență la implicație:

$$(p \longleftrightarrow q) \Longrightarrow (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p).$$

0.3.0.3. Trecerea de la implicația reciprocă la echivalență:

$$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p) \Longrightarrow (p \longleftrightarrow q).$$

0.3.0.4. Regulile *silogismului*:

$$(p \longrightarrow q) \Longrightarrow (q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow r),$$
$$(p \longrightarrow q) \Longrightarrow (r \longrightarrow p) \longrightarrow (r \longrightarrow q)$$
$$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \Longrightarrow (p \longrightarrow r).$$

0.3.0.5. Demonstrația prin silogism ipotetic cu echivalență:

$$(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r) \Longrightarrow (p \longleftrightarrow r).$$

0.3.0.6. Principiul *dilemei*:

$$(p \vee q) \wedge (p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r) \Longrightarrow r.$$

0.3.0.7. Principiul *identității*:

$$p \Longrightarrow p.$$

0.3.0.8. Principiul *reducerii la absurd*:

$$p \longrightarrow \neg p \Longrightarrow \neg p.$$

Scanned with OKEN Scanner

0.3.0.9. Principiile *tautologiei*:

$$p \vee p \Longrightarrow p,$$
$$p \Longrightarrow p \wedge p.$$

PROBLEME PROPUSE

0.P.1. Convenim să notăm peste tot prin $\mathcal{C}$ mulțimea propozițiilor adevărate sau false cu care lucrăm astfel încît dacă $A, B \in \mathcal{C}$ atunci încă $A \wedge B$, $\neg A$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B \in \mathcal{C}$.

Să se arate că propoziția:

$$P: A \wedge B \longrightarrow A$$

este o *tautologie* adică oricare ar fi valorile logice ale propozițiilor A, B, propoziția P este adevărată.

0.P.2. Dacă $x \in B$ atunci:

a°). $\underbrace{* * \ldots *}_{n \geq 2 \text{ de } *} x = 1$

unde $** \ldots x \overset{\text{def.}}{=} *(*(* \ldots (*)))$;

b°). $\underbrace{\downarrow \downarrow \ldots \downarrow}_{n \geq 2 \text{ de } \downarrow} x = 0$

unde $\downarrow \downarrow \ldots \downarrow \overset{\text{def.}}{=} \downarrow (\downarrow (\downarrow \ldots (\downarrow)))$.

0.P.3. Dacă $p, q \in \mathcal{C}$ atunci propozițiile:

$$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow \neg p)] \longrightarrow (\neg p),$$
$$[(p \longrightarrow q) \wedge (\neg p \longrightarrow q)] \longrightarrow q$$

sînt tautologii.

0.P.4. Dacă $p, q \in \mathcal{C}$ atunci are loc principiul dublei negații:

$$p \Longleftrightarrow \neg\neg p \text{ (sau } p \Longleftrightarrow \overline{\overline{p}}).$$

Scanned with OKEN Scanner

0.P.5. Să se dovedească *principiul noncontradicției*: propoziția:

$$\neg(p \wedge \neg p) \quad (\text{sau } \overline{p \wedge \bar{p}})$$

este întotdeauna adevărată ($p \in \mathcal{C}$).

0.P.6. Să se arate că:

$$\vdash * \downarrow - \neg\neg \sim x = 1, \ (\forall)\ x \in B.$$

0.P.7. Fie propozițiile:

$$P[x, y]: „x - y - 2 = 0“,$$
$$Q[x, y]: „x + 2y - 5 = 0“$$

x, y fiind elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a°). Să se determine x și y astfel încît afirmația „$P[x, y]$ sau $Q[x, y]$“ să fie adevărată.

b°). Să se determine x și y astfel încît afirmația „$P[x, y]$ și $Q[x, y]$“ să fie adevărată.

0.P.8. Se consideră propozițiile $A, B, C \in \mathcal{C}$ și tabelul:

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1				

.

Se cere:

a°). Să se completeze tabelul;

b°). Să se precizeze dacă propozițiile:

$$P_1 = (A \vee B) \wedge C$$

și:

$$P_2 = (A \wedge B) \vee C$$

au aceeași valoare logică, oricare ar fi valorile logice ale propozițiilor A, B și C.

Scanned with OKEN Scanner

0.P.9. Se consideră propozițiile $A, B \in \mathcal{C}$ și tabelul:

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$	$\overline{A \vee B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1						

Se cere:

a°). Să se completeze tabelul;

b°). Propozițiile:

$$P_1 = \overline{A \wedge B}$$

și:

$$P_2 = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

au aceeași valoare logică oricare ar fi valorile logice ale propozițiilor A, B?

c°). Dar propozițiile $P_3 = \overline{A \vee B}$, $P_4 = \bar{A} \wedge \bar{B}$?

0.P.10. Se consideră propozițiile $A, B \in \mathcal{C}$ și tabelul:

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$A \to \bar{B}$	$\bar{A} \to B$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0
0	0					
0	1					

a°). Se cere să se completeze tabelul;

b°). Dacă $F(A) = F(B)$ atunci:

$$F[(A \to B) \wedge (B \to A)] = 1;$$

c°). Dacă $F(A) \cdot F(B) = 0$ și $F(A) \neq F(B)$ atunci $F[(A \to B) \wedge (B \to A)] = 0$, F reprezentînd funcția de adevăr;

d°). Să se demonstreze afirmațiile de la b°) și c°) fără a folosi tabelul.

Scanned with OKEN Scanner

0.P.11. Fie $A, B \in \mathcal{C}$. Care din propozițiile:

1°). $(A \longrightarrow B) \vee (B \longrightarrow A)$,
2°). $(A \longrightarrow \bar{B}) \wedge (B \longrightarrow \bar{A})$,
3°). $(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$

sînt tautologii?

SOLUȚII, INDICAȚII, RĂSPUNSURI

0.P.1. Aplicînd funcția de adevăr:

$$F(P) = 1 - F(A \wedge B) + F(A \wedge B) \cdot F(A) = 1 - F(A) \cdot F(B) + F(A) \cdot F(B) \cdot F(A) = 1,$$

fapt ce demonstrează afirmația din enunț.

0.P.2. a°). Se vede prin calcul că:

$$*(* x) = ** x = 1, \quad (\forall) x \in B$$

și cum $* 1 = 1$ rezultă:

$$\underbrace{** \ldots *}_{n \geqslant 2 \text{ de } *} x = 1, \quad (\forall) x \in B.$$

b°). Analog:

$$\downarrow \downarrow x = 0, \quad (\forall) x \in B$$

deci și afirmația din enunț căci $\downarrow 0 = 0$.

0.P.3. Putem folosi funcția de adevăr:

$$F\{[(p \to q) \wedge (q \to \neg p)] \to (\neg p)\} = 1 - F[(p \to q) \wedge (q \to \neg p)] + F[(p \to q) \wedge (q \to \neg p)] F(\neg p) = 1 - F(p \to q) \cdot F(q \to \neg p) + F(p \to q) F(q \to \neg p) F(\neg p) = 1 - [1 - F(p) + F(p) F(q)][1 - F(q) + F(q) F(\neg p)] + [1 - F(p) + F(p) F(q)][1 - F(q) + F(q) F(\neg p)][1 - F(p)] = 1 - 1 + F(p) - F(p) F(q) + F(q) - F(p) F(q) + F(p) F(q) - F(q) F(\neg p) + F(p) F(q) F(\neg p) - F(p) F(q) F(q) F(\neg p) + [1 - F(p) + F(p) F(q) - F(q) + F(p) F(q) - F(p) F(q) + F(q) F(\neg p) - F(q) F(p) F(\neg p) + F(p) F(q) F(q) F(\neg p)][1 - F(p)] = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Am folosit aici faptul că $F^2(p) = F(p)$, pentru orice propoziție p (căci $1^2=1$, $0^2 = 0$).

Analog pentru a doua relație.

0.P.4. Faptul este evident avînd în vedere definiția echivalenței.

0.P.5. Se folosesc definițiile.

0.P.6. Se are în vedere definiția factorilor monari respectivi.

0.P.7. a°). Satisfac cuplurile (3, 1), (4, 2), (5, 3), (1, 2).
b°). $x = 3$, $y = 1$.

0.P.8. a°). Tabelul completat arată astfel:

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$	$(A \wedge B)$	$(A \wedge B) \vee C$
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1

b°). Răspunsul este negativ.

0.P.9. a°). Tabelul arată astfel:

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$	$\overline{A \vee B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1

b°). Da.
c°). Da.

0.P.10. a°). Tabelul completat arată astfel:

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$A \to \bar{B}$	$\bar{A} \to B$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0

Scanned with OKEN Scanner

b°), c°). Din tabel rezultă valabilitatea afirmațiilor.

d°). În adevăr, pentru b°):

$$F[(A \to B) \wedge (B \to A)] = F(A \to B)\, F(B \to A) =$$
$$= [1 - F(A) + F(A)\, F(B)]\, [1 - F(B) + F(A)\, F(B)] =$$
$$= 1 - F(A) - F(B) + 2F(A)F(B) = 1.$$

0.P.11. Numai 1°).

Scanned with OKEN Scanner

MULȚIMI

I.1.0. Proprietăți generale. Mulțime. Element. Compararea mulțimilor.

I.1.1.0. *Apartenența.* Adoptăm noțiunea de *mulțime* drept o noțiune primară (așa cum spunea un elev odată: *mulțimea este, prin definiție, indefinibilă).* Dacă facem abstracție de proprietățile particulare ale obiectelor ce compun o mulțime — de natură fizică, geometrică, etc. — spunem că avem de-a face cu o mulțime în sens matematic.

Drept exemple, putem considera o mulțime de creioane de o anumită culoare, o grămadă de pietricele, mulțimea punctelor care umplu un cub, mulțimea dreptelor care trec printr-un punct fix al planului etc.

Obiectele ce compun o mulțime capătă, pentru uniformizarea limbajului, pe scurt, numele de *elemente.*

O mulțime poate fi concretizată:

1°). prin prezentarea tuturor elementelor din care este alcătuită (sintetic);

2°). punînd în evidență o proprietate caracteristică tuturor elementelor sale (analitic).

În ambele cazuri se folosește *acolada.* În primul caz, pentru mulțimea formată din elementele □, △, =, *d* avem notația {□, △, =, *d*} iar pentru al doilea caz, pentru a pune în evidență, de exemplu, mulțimea numerelor naturale pare, scriem {2, 4, 6, ...} sau {$2k \mid k = 1, 2, \ldots$}.

Distingem aici mulțimea formată dintr-un singur element *a*, {*a*}, distingem și mulțimea fără nici un element (sau *vidă*), notată { } sau, cel mai frecvent ∅ sau încă ϕ.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a arăta că un element a aparține sau nu mulțimii A scriem:

$$a \in A$$

dacă sîntem în primul caz, respectiv:

$$a \notin A$$

dacă sîntem în al doilea caz și citim: *a aparține* (respectiv, nu aparține) mulțimii A. Ca exemple, putem scrie:

$1 \in N$; $2{,}5 \notin N^*$,

$\sqrt{2} \notin Q$; $3 \in Q$,

$1{,}(3) \in R$; $5 \notin \varnothing$.

La fel cum numerele pot fi comparate (de pildă $2 < 3$, $0 > -1$, etc.), tot astfel putem compara și mulțimile, introducînd relații noi cum ar fi incluziunea, egalitatea.

I.1.2.0. *Incluziunea.* Fie A mulțimea tuturor patrulaterelor convexe din plan și B mulțimea tuturor paralelogramelor din plan. Orice paralelogram aparține mulțimii A (pentru că, în general, este patrulater convex), dar există patrulatere convexe care nu sînt paralelograme (de exemplu, trapezul).

Spunem că mulțimea B *este inclusă* în mulțimea A și scriem $B \subset A$ după cum, potrivit observației anterioare, putem spune că mulțimea A *nu este inclusă* în mulțimea B și scriem $A \not\subset B$. Pentru primul caz mai putem scrie $A \supset B$, adică A *include* pe B, respectiv, $B \not\supset A$, adică B *nu include* pe A. Acest exemplu ne conduce să spunem că o mulțime A include o mulțime B dacă orice element al mulțimii B aparține și mulțimii A. Deci dacă $B \subset A$ și $b \in B$ atunci $b \in A$, prin b înțelegînd orice element al mulțimii B.

Dacă $A \subset B$ spunem că A este o *submulțime proprie* a lui B (facem distincție de notație între $A \subset B$ și $A = B$ în sensul că „$A \subset B$ și $A = B$" este o propoziție întotdeauna falsă; pentru a pune în evidență și eventuala egalitate a mulțimilor A și B — în cazul în care știm că A este inclus în B — scriem $A \subseteq B$).

Scanned with OKEN Scanner

Vom traduce deci expresia $A \subset B$ prin: A este *strict inclusă* în B sau, mai simplu, A este inclusă în B, iar expresia $A \subseteq B$ prin: $A \subset B$ sau $A = B$ adică A este strict inclusă în B sau egală cu B.

Exemple

I.1.2.1. Fie mulțimile:

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ și $B = \{1, 2, 5, 7, 12\}$. Atunci $A \not\subset B$ și $B \not\subset A$.

I.1.2.2. Fie mulțimile:

$A \equiv$ mulțimea triunghiurilor, $B \equiv$ mulțimea triunghiurilor isoscele. Atunci $B \subset A$.

Mulțimile, din aceste puncte de vedere, pot fi și incomparabile ca, de exemplu, mulțimea numerelor întregi și mulțimea bețelor de chibrit dintr-o cutie.

I.2.0. Operații cu mulțimi. Reuniunea. Intersecția. Diferența. Complementara. Diferența simetrică. Produs cartezian. Partiții.

I.2.1.0. *Reuniunea.* Într-o clasă (liceală, de exemplu) se adună elevi, absolvenți ai unor școli generale; într-o cutie cu creioane colorale sînt creioane nu numai de aceeași culoare; într-o bibliotecă se pot afla cărți scrise în mai multe limbi.

În fiecare din aceste colecții nu există numai elemente ale unei anume mulțimi, elevi ai unei anumite școli (în primul caz), creioane de o aceeași culoare (pentru al doilea caz) sau lucrări scrise într-o singură limbă (în al treilea caz), ci elemente provenite din mai multe colectivități. Particularizînd, dacă dintr-un set luăm toate creioanele de culoare roșie iar din alt set numai pe cele de culoare verde, atunci noul set formnat este compus și din creioane roșii și din creioane verzi, deci din *reuniunea* celor două mulțimi de creioane (roșii și respectiv verzi). În felul acesta putem spune că *reuniunea a două mulțimi* A și B este mulțimea ale cărei elemente aparțin fie lui A fie lui B. Dacă T este

Scanned with OKEN Scanner

mulțimea creioanelor roșii iar K mulțimea creioanelor verzi, reuniunea lor o vom scrie ca $T \cup K$. Fie:

$$S = A \cup B;\ p \in S \Rightarrow \begin{array}{l} \text{sau } p \in A \\ \text{sau } p \in B \\ \text{sau } p \in A \text{ și } p \in B. \end{array}$$

Este interesant de reținut că dacă $p \in A$, atunci $p \in A \cup B \cup C \cup D \cup \ldots$, adică elementul p aparține reuniunii lui A cu oricare altă mulțime.

I.2.1.1. *Exemple*

1°). Dacă $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, atunci:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

(Iată deci că elementele comune — în cazul nostru 3 — sînt scrise în *mulțimea — reuniune* o singură dată).

2°). Dacă:

$A \equiv$ mulțimea triunghiurilor oarecare,
$B \equiv$ mulțimea triunghiurilor isoscele,
$C \equiv$ mulțimea triunghiurilor echilaterale,

atunci:

$$(A \cup B) \cup C = A;\quad A \cup (B \cup C) = A;$$
$$B \cup C = B.$$

Printre *proprietățile reuniunii* amintim:

a°). Reuniunea mulțimilor este, asemenea adunării, *comutativă*:

$$A \cup B = B \cup A$$

căci atît mulțimea $A \cup B$ cît și mulțimea $B \cup A$ sînt formate amîndouă din elemente ce aparțin fie mulțimii A, fie mulțimii B, fie și lui A și lui B.

b°). Un raționament asemănător ne conduce la proprietatea de *asociativitate* a reuniunii:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

pe care am întîlnit-o și la studiul numerelor naturale, în raport cu adunarea și înmulțirea.

Scanned with OKEN Scanner

c°). Există o mulțime E, unică, astfel încît:

$$A \cup E = E \cup A = A$$

pentru orice mulțime A, anume $E = \varnothing$.

d°). Există și proprietatea de *idempotență* a reuniunii:

$$A \cup A = A.$$

e°). Deoarece reuniunea este asociativă, putem considera reuniunea unui număr oarecare de mulțimi A_i, $i = \overline{1, n}$:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

I.2.2.0. *Intersecția* a două mulțimi A și B este formată din elementele ce aparțin lui A și lui B.

I.2.2.1. Un exemplu concret de intersecție este dat de diagrama de mai jos, intersecția mulțimilor A și B fiind reprezentată prin porțiunea haşurată. Simbolic scriem:

$$A \cap B = C.$$

Proprietățile intersecției:

a°). *Comutativitatea* intersecției:

$$A \cap B = B \cap A;$$

b°). *Asociativitatea* intersecției:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

c°). Există o mulțime unică E astfel încît:

$$A \cap E = E \cap A = \varnothing,$$

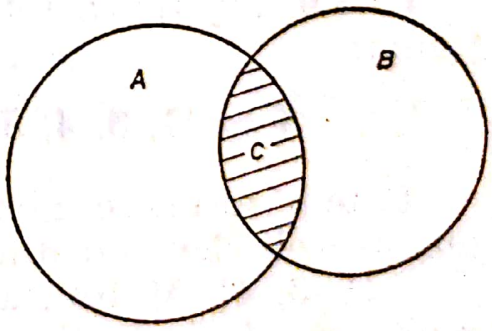


Fig. I.2.2.

pentru orice mulțime A, anume $E = \varnothing$;

d°). *Idempotența* intersecției:

$$A \cap A = A;$$

e°). Putem extinde operația la mai multe mulțimi. Expresia:

$$M = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

nu este altceva decît mulțimea tuturor acelor elemente x care aparțin simultan și lui A_1, și lui A_2, ..., și lui A_n. Este clar că rezultatul poate să ducă și la mulțimea vidă și pentru aceasta este suficient să existe A_i și A_j astfel ca:

$$A_i \cap A_j = \varnothing$$

(unde prin $\varnothing$ s-a notat, potrivit convenției făcute, mulțimea vidă).

Analog:

$$T = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

reprezintă mulțimea tuturor elementelor care aparțin sau lui A_1, sau lui A_2, sau ... sau lui A_n. Aici, condiția necesară și suficientă ca $T = \varnothing$ este $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = \varnothing$ după cum se poate constata imediat pornind de la definiție.

Pentru mulțimile A, B, C, distincte sau nu, au loc relațiile:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

I.2.3.0. *Diferența. Complementara.* Considerăm mulțimile:

$$A = \{1, 3, 4, 5\}, \quad B = \{2, 5, 7, 10\}.$$

Putem forma o nouă mulțime care să cuprindă numai acele elemente din A care nu aparțin mulțimii B, $C = \{1, 3, 4\}$. Mulțimea C se numește *diferența* dintre mulțimea A și mulțimea B și se notează:

$$C \overset{\text{def.}}{=\!=} A - B \overset{\text{def.}}{=\!=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

Dacă B este o submulțime a lui A atunci mulțimea C se mai numește (pentru a îmbogăți limbajul) *comple-*

Scanned with OKEN Scanner

mentara mulțimii B în raport cu mulțimea A. Ea se notează $\mathbf{C}_A B$. Ca exemple:

a°). Dacă $A = \{n \mid n \in N\}$ și $B = \{2n \mid n \in N\}$ atunci $\mathbf{C}_A B = \{2n + 1 \mid n \in N\}$.

b°). Fie A mulțimea patrulaterelor și B mulțimea dreptunghiurilor. Atunci $A - B$ reprezintă mulțimea patrulaterelor care nu sînt dreptunghiuri și:

$$B - A = \varnothing.$$

Proprietăți

Dacă T este o mulțime *totală* (o mulțime în care sînt incluse toate mulțimile cu care lucrăm) atunci:

$$\mathbf{C}_T T = \varnothing,$$
$$\mathbf{C}_T \varnothing = T,$$
$$\mathbf{C}_T(\mathbf{C}_T A) = A,$$
$$\mathbf{C}_T(A \cap B) = \mathbf{C}_T A \cup \mathbf{C}_T B,$$
$$\mathbf{C}_T(A \cup B) = \mathbf{C}_T A \cap \mathbf{C}_T B,$$

(ultimele două relații se numesc relațiile lui *De Morgan*)

$$A \cap \mathbf{C}_T A = \varnothing.$$

Se pot deduce ușor relațiile:

$$A \cap (A \cup B) = A,$$
$$A \cup (A \cap B) = A,$$

care reprezintă legile de *absorbție*.

Dacă T este mulțimea totală și A o submulțime a sa, atunci:

$$\mathbf{C}_T A = \bar{A}.$$

Se pot scrie relațiile:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Diferența simetrică a mulțimilor A și B o definim prin:

$$A \Delta B \overset{\text{def.}}{=} (A - B) \cup (B - A).$$

Scanned with OKEN Scanner

I.2.3.1. Ca exemplu, dacă $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 6\}$, atunci $A - B = \{1, 5\}$, $B - A = \{2, 6\}$ și deci $A \Delta B = \{1, 5\} \cup \{2, 6\} = \{1, 2, 5, 6\}$.

De asemenea:

$$B \Delta A = (B - A) \cup (A - B) = A \Delta B$$

ceea ce arată că diferența simetrică este comutativă.

I.2.4.0. *Produs cartezian.* Definim *produsul cartezian* dintre mulțimea A și mulțimea B, notat $A \times B$, prin:

$$A \times B \overset{\text{def.}}{=} \{(x, y) \mid x \in A, \ y \in B\}.$$

I.2.4.1. *Exemplu*

Fie:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\},$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

cu $a_i = a_j \Leftrightarrow i = j$, $b_i = b_j \Leftrightarrow i = j$. Atunci:

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_1), (a_4, b_2), (a_4, b_3)\}.$$

Așadar, produsul $A \times B$ este o mulțime de perechi (x, y) cu $x \in A$, $y \in B$.

Este clar că:

$$A \times B = B \times A$$

dacă și numai dacă $A = B$ sau $A = \varnothing$ sau $B = \varnothing$.

Proprietăți

a°). $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

b°). $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Produsul cartezian se poate extinde la n mulțimi astfel:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \overset{\text{def.}}{=} \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ atunci, prin definiție, $A \times A \times \ldots \times A = A^n$ și A^n se numește în acest caz n — puterea carteziană a lui A.

I.2.4.2. Mulțimea:

$$R \times R = R^2$$

reprezintă 2 — puterea carteziană a lui R.

I.2.5.0. *Mulțimea părților unei mulțimi* A, notată $\mathcal{P}(A)$ este formată din totalitatea submulțimilor $X \subseteq A$, inclusiv mulțimea vidă. De exemplu, dacă:

$$A = \{1, 3, 5\}$$

atunci:

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}.$$

I.2.6.0. *Partiții.* Fie A o mulțime. O familie de mulțimi $P = \{A_i\}_{i \in I}$ se numește *partiție* a lui A dacă:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing$$

pentru orice $(i, j) \in I^2$, $i \neq j$.

I.3.0. Funcția caracteristică a unei mulțimi.

Fie X o mulțime și $\mathcal{P}(X)$ familia submulțimilor lui X. Definim pe $\mathcal{P}(X)$ o aplicație φ care asociază unei mulțimi $A \in \mathcal{P}(X)$ și unui element $x \in X$ un element din mulțimea $B_2 = \{0, 1\}$ după cum urmează:

$$\varphi_x(A) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in A, \\ 0 \text{ dacă } x \notin A. \end{cases}$$

Numim această aplicație, *funcția caracteristică asociată mulțimii* A.

Ca o primă constatare, $\varphi_x^2(A) = \varphi_x(A)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă A, $B \in \mathcal{P}(X)$ iar $\bar{A}$ este complementara lui A în raport cu X, se poate scrie:

$$\varphi_x(\varnothing) \equiv 0; \quad \varphi_x(X) \equiv 1, \tag{1}$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi_x(A) \leqslant \varphi_x(B), \tag{2}$$

$$A = B \Leftrightarrow \varphi_x(A) = \varphi_x(B), \tag{3}$$

$$\varphi_x(\bar{A}) = 1 - \varphi_x(A), \tag{4}$$

$$\varphi_x(A \cap B) = \varphi_x(A)\ \varphi_x(B), \tag{5}$$

$$\varphi_x(A \cup B) = \varphi_x(A) + \varphi_x(B) - \varphi_x(A)\ \varphi_x(B), \tag{6}$$

$$\varphi_x(A - B) = \varphi_x(A)\ (1 - \varphi_x(B)), \tag{7}$$

$$\varphi_x(A \Delta B) = \varphi_x(A) + \varphi_x(B) - 2\,\varphi_x(A)\ \varphi_x(B). \tag{8}$$

În adevăr, (1) rezultă din definiție.
Pentru (2) considerăm cazurile:

a°). $x \in A$, $x \in B$ deci $\varphi_x(A) = 1 \leqslant \varphi_x(B) = 1$,

b°). $x \notin A$, $x \in B$ deci $\varphi_x(A) = 0 \leqslant \varphi_x(B) = 1$,

c°). $x \notin A$, $x \notin B$ deci $\varphi_x(A) = 0 \leqslant \varphi_x(B) = 0$.

Reciproc:

$x \in A \Rightarrow \varphi_x(A) = 1 \leqslant \varphi_x(B) = 1$ deci $x \in B$ adică $A \subset B$.

Afirmația (3) rezultă imediat din (2).
Relația (4) rezultă imediat din raționamentul:

a°). $x \in A \Rightarrow \varphi_x(A) = 1$, $\varphi_x(\bar{A}) = 0$;

b°). $x \notin A \Rightarrow \varphi_x(A) = 0$, $\varphi_x(\bar{A}) = 1$.

Pentru (5):

a°). $x \in A$, $x \in B \Rightarrow \varphi_x(A) = \varphi_x(B) = 1$ și $\varphi_x(A \cap B) = 1$ deci $1 \cdot 1 = 1$;

b°). $x \notin A$, $x \in B \Rightarrow \varphi_x(A) = 0$, $\varphi_x(B) = 1$ și $\varphi_x(A \cap B) = 0$ deci $0 = 0 \cdot 1$;

c°). $x \in A$, $x \notin B \Rightarrow \varphi_x(A) = 1$, $\varphi_x(B) = 0$ și $\varphi_x(A \cap B) = 0$ deci $0 = 0 \cdot 1$;

d°). $x \notin A$, $x \notin B \Rightarrow \varphi_x(A) = 0$, $\varphi_x(B) = 0$ și $\varphi\ (A \cap B) = 0$ deci $0 \cdot 0 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Relația (6) rezultă din justificări similare ca la (5); cum $A - B = A \cap \bar{B}$, rezultă $\varphi_x(A - B) = \varphi_x(A)\varphi_x(\bar{B}) = \varphi_x(A)(1 - \varphi_x(B))$ deci (7).

Relația (8) rezultă din (6) și (7), pe baza definiției diferenței simetrice.

I.4.1. Mulțimi de numere reale.

Fie $a, b \in R$, $a < b$. Notăm:

$(a, b) = \{x \mid x \in R,\ a < x < b\} = \{x \mid x \in R, x = (1 - \lambda)a + \lambda b,\ 0 < \lambda < 1\}$;

$(a, +\infty) = \{x \mid x \in R,\ x > a\}$;

$(-\infty, a) = \{x \mid x \in R,\ x < a\}$;

$[a, b) = (a, b) \cup \{a\} = \{x \mid x \in R,\ a \leqslant x < b\}$;

$(a, b] = (a, b) \cup \{b\} = \{x \mid x \in R,\ a < x \leqslant b\}$;

$[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\} = \{x \mid x \in R,\ a \leqslant x \leqslant b\}$.

Numim *interval deschis* în R o mulțime $I \subseteq R$ care are una din formele (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, R, unde $a, b \in R$ și $a < b$.

Se numește *interval închis* (sau *compact*) o mulțime $I \subseteq R$, $I = [a, b]$ unde $a, b \in R$ și $a < b$.

Se numește *interval* în R o mulțime I care are una din formele (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, R, unde $a, b \in R$ și $a < b$.
Cînd $a = b$, considerăm și intervalul $[a, b]$ redus la un punct.

Dacă I este un interval de forma (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ unde $a, b \in R$ și $a < b$ vom spune că I are capătul stîng în a și capătul drept în b.

Dacă I este un interval reprezentat de una din formele $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$ vom spune că I are capetele a și $+\infty$, respectiv $-\infty$ și a.

Fie $X \subseteq R$ o mulțime. Numim *majorant* (respectiv *minorant*) al mulțimii X un element M (respectiv m)

Scanned with OKEN Scanner

din R cu proprietatea că $x \leqslant M$, $(\forall)x \in R$ (respectiv $m \leqslant x$, $(\forall)x \in X$).

O mulțime care are un majorant și un minorant se numește *mărginită*.

Cel mai mic majorant (respectiv *cel mai mare minorant*) al mulțimii A se numește *marginea superioară* (respectiv *marginea inferioară*) a mulțimii A și se notează $\sup\limits_{x\in A} A$ (respectiv $\inf\limits_{x\in A} A$).

Dacă $\sup\limits_{x\in A} A \in A$ (respectiv $\inf\limits_{x\in A} A \in A$) atunci $\sup\limits_{x\in A} A$ (respectiv $\inf\limits_{x\in A} A$) se numește *maximul* (respectiv *minimul*) mulțimii A și se notează $\max\limits_{x\in A} A$ (respectiv $\min\limits_{x\in A} A$).

Se numește *vecinătate* a unui punct $x \in R$ și se notează cu $V(x)$, orice interval deschis care conține pe x.

O vecinătate a punctului x de forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ unde $\varepsilon > 0$ se numește *vecinătate simetrică* ε sau ε — *vecinătate* a lui x și se notează cu $V_\varepsilon(x)$.

Se numește *vecinătate* a punctului $+\infty$ (infinit) orice mulțime de forma $(r, +\infty) \cup \{+\infty\}$ unde $r \in R$ și se notează cu $V_r(+\infty)$ sau $(r, +\infty]$.

Se numește vecinătate a punctului $-\infty$ orice mulțime de forma $(-\infty, r) \cup \{-\infty\}$ unde $r \in R$ și se notează cu $V_r(-\infty)$ sau $[-\infty, r)$.

I.5.0. Considerații finale.

Convenim să notăm prin card A sau $|A|$ sau încă $\overline{\overline{A}}$ numărul de elemente ale mulțimii A.

Dacă mulțimea are un număr finit de elemente spunem că mulțimea este *finită* și scriem simbolic:

$$|A| < +\infty,$$

iar dacă mulțimea are un număr infinit de elemente atunci scriem:

$$|A| = +\infty$$

și spunem că este *infinită*.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME REZOLVATE

I.R.1. Să se determine mulțimile:

$$A \cup B;\ A \cup C;\ B \cup C;\ (A \cup B) \cup C;\ A \cup (B \cup C);\ A \cap B;$$
$$A \cap C;\ (A \cap B) \cap C;\ A \cap (B \cap C)$$

știind că:

$$A = \{2, 3, 5\},$$
$$B = \{1, 4, 6\},$$
$$C = \{2, 3, 4\}.$$

Soluție. Conform definiției, scriem:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$A \cup C = \{2, 3, 4, 5\},$$
$$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\},$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = \varnothing$$
$$A \cap B = \varnothing,$$
$$A \cap C = \{2, 3\}.$$

S-au folosit aici proprietățile de asociativitate ale reuniunii, respectiv ale intersecției.

I.R.2. Mă gîndesc la o mulțime X (necunoscută) și mă întreb dacă ar fi posibil ca:

$$X \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 5\}. \qquad (1)$$

Mulțimea $\{1, 2, 5\}$ satisface condiția? Dar mulțimea $\{1, 5\}$?

Mai există oare și alte mulțimi care verifică relația (1)?

Soluție. Este posibil căci, potrivit definiției reuniunii, $X = \{1, 2, 5\}$ verifică:

$$\{1, 2, 5\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 5\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea $X = \{1, 5\}$, de asemenea, verifică deoarece:

$$\{1, 5\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 5\}.$$

În afară de aceste soluții mai există și:

$$X = \{5\},$$

respectiv:

$$X = \{2, 5\}.$$

Oricare altă mulțime S care diferă de cele menționate nu verifică relația $S \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\}$.

I.R.3. Știm că $A = B \cap A$ și $B = A \cap B$.

Mulțimile A și B au elemente comune? Au și elemente necomune? Considerați un exemplu.

Soluție. Folosind comutativitatea intersecției observăm imediat că $A = B$. Se constată că mulțimile $A = \{1, 3\}$ și $B = \{1, 2, 3\}$ nu verifică relațiile din enunț (ele nu sînt egale).

I.R.4. Știm că $A = \{0, 1, 2, 3, 7\}$ și $B = \{2, 3, 5, 12\}$. Calculînd $A - B$ obținem $A - B = \{0, 1, 7\}$. Păstrînd mulțimea A neschimbată putem să înlocuim mulțimea B prin mulțimea C astfel încît $A - C = \{0, 1, 7\}$.

Mulțimile B și C au elemente comune?

În caz că răspunsul la întrebarea precedentă este afirmativ, care sînt aceste elemente?

Soluție. Din definiția diferenței, se constată că orice mulțime care include mulțimea $\{2, 3\}$ și care nu conține elementele 0, 1, 7 satisface relația din enunț. Mulțimile B și C pot avea ca elemente comune fie pe 2 fie pe 3 fie pe 2 și 3.

I.R.5. Care sînt elementele mulțimii:

$$A = \{x \mid x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \text{și} \quad x \in N\}?$$

Soluție. Ecuația:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

are soluțiile $x_1 = 1 \in N$, $x_2 = 4 \in N$ deci $A = \{1, 4\}$.

Scanned with OKEN Scanner

I.R.6. Care sînt elementele mulțimii:

$$A = \{x \mid x^2 + 5x + 4 = 0,\ x \in N\}?$$

Soluție. Ecuația:

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

conduce la $x_1 = -1 \notin N$, $x_2 = -4 \notin N$; rezultă că:

$$A = \varnothing.$$

I.R.7. Se consideră $A = \{1, 2, 3\}$. Să se scrie familia părților sale.

Soluție. Avem:

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

I.R.8. Fie $A = \{1, 2, 3, a, b\}$ și $B = \{5, 6, a, c\}$. Se pot determina elementele a, b, c cunoscînd că:

$$\{4, 5\} \times \{2, 4\} \subset A \times B?$$

Soluție. Rezultă de aici $\{4, 5\} \subset A$ și $\{2, 4\} \subset B$ deci $a = 4$, $b = 5$ și $c = 2$.

Răspunsul este deci afirmativ.

I.R.9. Fie $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4\}$.

Să se determine $\mathbf{C}_T A$ și $\mathbf{C}_T B$.

Soluție. Se poate scrie:

$$\mathbf{C}_T A = T - A = \{5, 6\},$$

$$\mathbf{C}_T B = T - B = \{1, 2, 5, 6\}.$$

I.R.10. Fie P mulțimea patrulaterelor, P_1 mulțimea paralelogramelor, P_2 mulțimea dreptunghiurilor, P_3 mulțimea romburilor și P_4 mulțimea pătratelor. Sînt corecte afirmațiile:

$$P \supset P_1 \supset P_4;\ P_2 \cap P_3 = P_4;$$

$$P_2 \cup P_3 \cup P_4 = P?$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Incluziunea:

$$P \supset P_1 \text{ (sau } P_1 \subset P)$$

este corectă deoarece orice paralelogram este un patrulater; incluziunea:

$$P_4 \subset P_1$$

este, de asemenea, corectă deoarece orice pătrat este un paralelogram particular.

$P_2 \cap P_3$ conține acele patrulatere care au laturile egale (romburile) și unghiurile drepte (dreptunghiurile) deci pătratele astfel că afirmația:

$$P_2 \cap P_3 = P_4$$

este valabilă.

Afirmația:

$$P_2 \cup P_3 \cup P_4 = P$$

este falsă căci în afară de paralelograme, care fie că sînt romburi, fie dreptunghiuri, fie pătrate, există și alte patrulatere (de exemplu, trapezele). Nici afirmația:

$$P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 = P$$

nu este adevărată. Mulțimea P conține și patrulatere care nu sînt paralelograme.

I.R.11. Se consideră intervalele $I_1 = [3, 8)$ și $I_2 = (3, 8)$, Se poate spune că $I_2 \subset I_1$? De ce?

Soluție. Considerînd reprezentarea pe o axă d a celor două intervale, se constată că I_2 nu conține pe 3 pe cînd I_1 conține acest număr. Incluziunea este evidentă.

Observație. Este greșit să se argumenteze afirmația anterioară făcînd observația că I_1 ar avea „mai multe" elemente decît I_2.

I.R.12. Demonstrați că:

$$(A \cap A) \cup (A \cap B) = A,$$
$$A \cup (B - A) \subset A \cup B,$$
$$B \cap (A - B) = \varnothing,$$

A și B fiind mulțimi oarecare.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Avem, pentru primul caz, $A \cap A = A$ deci prima parte a primei egalități devine:

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B) = A$$

(am folosit aici proprietatea de distributivitate a reuniunii față de intersecție) și care reprezintă tocmai proprietatea de absorbție.

Pentru a doua relație:

$$x \in A \cup (B - A) \Rightarrow x \in A \quad \text{sau} \quad x \in (B - A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \in A) \text{ sau } (x \in B \text{ și } x \notin A) \Rightarrow (x \in A \text{ sau } x \in B)$$

$$\text{și } (x \in A \text{ sau } x \notin A) \Rightarrow x \in A \cup B,$$

ceea ce dovedește incluziunea (căci „$x \in A$ sau $x \notin A$" este o propoziție întotdeauna adevărată).

Pentru a treia egalitate:

$$x \in B \cap (A - B) \Rightarrow x \in B \text{ și } x \in (A - B) \Rightarrow x \in B \text{ și}$$

$$(x \in A \text{ și } x \notin B) \Rightarrow x \in A \text{ și } x \in \varnothing \Rightarrow x \in \varnothing \cap A = \varnothing$$

deci $B \cap (A - B) \subseteq \varnothing$ adică $B \cap (A - B) = \varnothing$.

I.R.13. Se cunosc mulțimile:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$B = \{2, 4, 5, 7, 9, 10\}.$$

Să se cerceteze dacă următoarele afirmații sînt corecte:

a°). $A \subset B$;

b°). $A \cap B = \{2, 4, 5, 9\}$;

c°). $A - B = \{7, 9, 10\}$;

d°). $B - A = \{1, 3, 6\}$;

e°). $\mathbf{C}_B A = \{1, 3, 6\}$;

f°). $(7, 6) \in A \times B$;

g°). $\mathbf{C}_A B = \{1, 3, 6\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. a°). $A \not\subset B$ (A nu este inclus în B) deoarece $1, 3, 6 \notin B$.

b°). $A \cap B = \{2, 4, 5\} \neq \{2, 4, 5, 9\}$ deci nici această afirmație nu este adevărată.

c°). $A - B = \{1, 3, 6\} \neq \{7, 9, 10\}$ deci afirmația este falsă.

d°). $B - A = \{7, 9, 10\} \neq \{1, 3, 6\}$ deci afirmația din enunț este falsă.

e°). Pentru ca simbolul $\mathbf{C}_B A$ să existe este necesar ca, potrivit definiției, $A \subset B$ ceea ce în cazul nostru nu este valabil.

f°). $(7, 6) \in A \times B$ implică $7 \in A$ și $6 \in B$, fals; $(7, 6) \in B \times A$.

g°). Analog cu e°).

I.R.14. Pentru a arăta cum este propoziția compusă „P și Q" — falsă sau adevărată — în funcție de valoarea logică a propozițiilor P și Q folosim tabelul:

P	Q	$P \wedge Q$
A	A	A
A	F	1
F	2	F
F	F	F

.

Să se completeze tabelul, punînd în locul numerelor 1 și 2 valorile logice respective.

Soluție. Avem situația:

$$1 - F,$$

$$2 - A \text{ sau } F.$$

I.R.15. Dovediți că dacă A și B sînt două mulțimi, are loc relația:

$$A \Delta B = A \cup B - A \cap B.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Folosim funcția caracteristică. Avem:

$$\varphi_x(A \Delta B) = \varphi_x((A - B) \cup (B - A)) = \varphi_x(A - B) + \varphi_x(B - A) - \varphi_x(A - B)\varphi_x(B - A) = \varphi_x(A) + \varphi_x(B) - 2\varphi_x(A)\varphi_x(B) - \varphi_x((A - B) \cap B - A)) = \varphi_x(A) + \varphi_x(B) - 2\varphi_x(A)\varphi_x(B) - \varphi_x(\varnothing) = \varphi_x(A) + \varphi_x(B) - \varphi_x(A)\varphi_x(B) - \varphi_x^2(A)\varphi_x(B) - \varphi_x(A)\varphi_x^2(B) + \varphi_x^2(A)\varphi_x^2(B) = (\varphi_x(A) + \varphi_x(B) - \varphi_x(A)\varphi_x(B)) \cdot (1 - \varphi_x(A)\varphi_x(B)) = \varphi_x(A \cup B) \quad (1 - \varphi_x(A \cap B))$$

de unde, avînd în vedere (3) din I.3.0 rezultă:

$$A \Delta B = A \cup B - A \cap B.$$

TESTE

I.T.1. Fie mulțimile:

$$A = \{1, 3, 5, 7\}, \quad B = \{2, 4, 8, 9\}.$$

Care din următoarele afirmații:

a°). $3 \in A$ și $5 \in B$; b°). $1 \in A$ sau $2 \in B$; c°). $9 \in A$ și $3 \in B$; d°). $4 \notin A$ sau $5 \in B$

sînt adevărate?

I.T.2. Fie $A = \{x \in R \mid |x - 3| < 2\}$. Atunci:

a°). $A = (-\infty, 5)$; b°). $A = (1, +\infty)$; c°). $A = (1, 5)$; d°). $A = (2, 7)$.

I.T.3. Fie propozițiile:

$A_1 \equiv$ Triunghiul ABC este isoscel.

$A_2 \equiv$ Triunghiul ABC are $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 70°$.

$A_3 \equiv$ Triunghiul este echilateral.

Scanned with OKEN Scanner

Care din următoarele implicații:

a°). $A_1 \Rightarrow A_2$; b°). $A_1 \Rightarrow A_3$; c°). $A_2 \Rightarrow A_3$; d°). $A_3 \Rightarrow A_1$; e°). $A_3 \Rightarrow A_2$; f°). $A_2 \Rightarrow A_1$,

sînt întotdeauna adevărate?

I.T.4. Fie mulțimile:

$$A = \{0, 1, 3\},$$
$$B = \{1, 3, 5\},$$
$$C = \{-1, 0, 1, 3, 5\}.$$

Este posibil ca:

a°). $A \subset C$?

b°). $A \subset B$?

I.T.5. Se poate calcula produsul cartezian între o mulțime A nevidă și mulțimea vidă? Argumentați răspunsul.

I.T.6. Mulțimea părților $\mathcal{P}(A)$ a unei mulțimi A cu 6 elemente are:

a°). $1 \cdot 2 \ldots 6$ elemente; b°). 3^6 elemente; c°). 6^2 elemente.

I.T.7. Dacă se cunoaște mulțimea părților unei mulțimi finite A, se poate determina mulțimea A?

I.T.8. Fie:

$$M = \{x \in R \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

și:

$$N' = \{2, 4\}.$$

Care din următoarele variante:

a°). $M \cap N' = \{3\}$; b°). $M \cup N' = \{2, 1, 4\}$; c°). $\mathbf{C}_M N' = \{3\}$,

sînt corecte?

I.T.9. Se consideră:

$$W = \{x \in Z \mid x = \frac{k+7}{k+1},\ k \in N^*\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci:

a°). $W = \{2, 3, 4\}$; b°). $W = \{1, 3, 4\}$; c°). $W = \varnothing$.

I.T.10. În planul π se consideră punctele M, N' și fie:

$$A = \{X \in \pi \mid |XM - XN'| > N'M\}.$$

Atunci:

a°). A este formată din punctele mediatoarei segmentului MN';

b°). A este formată din punctele circumferinței cu diametrul AB;

c°). A este mulțimea vidă.

I.T.11. Se consideră mulțimile:

$$X = \{x \in Q \mid x = \frac{2k+3}{2k-1}, \quad k \in Z\},$$

$$Y = \{x \in Q \mid x = \frac{3k-2}{3k-5}, \quad k \in Z\}.$$

Atunci:

a°). $X \cap Y = \{1\}$; b°). $X \cap Y = \varnothing$; c°). $X \cap Y = X$.

I.T.12. Dacă:

$$A \cup (X - B) = B \cup (X - A)$$

atunci:

a°). $A = B$; b°). $A \cap B = \varnothing$; c°). $A - B = \varnothing$.

I.T.13. Dacă A, $B \subset T$ atunci:

$$\complement_T A \Delta B = A \cap B$$

are loc dacă și numai dacă[1]:

a°). $A \cap B = \varnothing$; b°). $A = B$; c°). $\complement_T A \cup B = \varnothing$.

---

[1] Expresia „dacă și numai dacă" înseamnă, de pildă, că propozițiile $\complement_T A \Delta B = A \cap B$ și $A \cap B = \varnothing$ rezultă una din alta.

Dacă $\complement_T A \Delta B = A \cap B$, rezultă că $A \cap B = \varnothing$.

Dacă $A \cap B = \varnothing$, rezultă:

$$\complement_T A \Delta B = A \cap B.$$

Scanned with OKEN Scanner

I.T.1. b°), d°). **I.T.2.** c°). **I.T.3.** d°), f°). **I.T.4.** a°). Da, b°). Nu. **I.T.5.** Rezultatul este mulțimea vidă. **I.T.6.** Nici una din variantele expuse nu este adevărată. **I.T.7.** Da. Considerăm mulțimea cea mai „bogată" în care sînt incluse toate celelalte (o astfel de mulțime există în mulțimea $\mathcal{P}(A)$ a părților lui A căci $A \in \mathcal{P}(A)$). **I.T.8.** b°). **I.T.9.** a°). **I.T.10.** c°). În adevăr, dacă $M = N'$, $A = \varnothing$ căci inegalitatea pe care o verifică X se scrie $0 > 0$ (nu există nici un astfel de punct X care să verifice inegalitatea precedentă). Presupunem deci $M \neq N'$. Pentru punctele care nu sînt situate pe MN' avem:

$$|XM - XN'| < MN'$$

(din triunghiul XMN') deci rămîne cazul în care X s-ar afla pe dreapta ce suportă segmentul MN'. Dacă X se află în M sau în N' atunci obținem în ambele cazuri $MN' > MN'$, absurd. Dacă X este între M și N' atunci $|XM - XN'| < XM + XN' = MN'$ iar dacă X se află pe dreapta ce suportă segmentul MN' dar în afara acestuia atunci:

$$|XM - XN'| = MN',$$

contrar ipotezei. Rămîne că $A = \varnothing$. **I.T.11.** b°). **I.T.12.** a°). **I.T.13.** c°).

PROBLEME PROPUSE

I.P.1. Dacă $A = \{0, 3\}$ și $B = \varnothing$, să se calculeze $A \cup B$, $A \cap B$.

I.P.2. Știm că $A = \{1, 2, 4, 7\}$ și $B = \{2, 4, 5, 6\}$. Observăm că:

$$A \cap B = \{2, 4\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuim pe A prin X. Se poate determina unic mulțimea X astfel încît:

$$X \cap B = \{2, 4\}$$

cunoscînd mulțimea B?

Este corectă afirmația: X reprezintă orice mulțime în care este inclusă mulțimea $\{2, 4\}$?

I.P.3. Se consideră mulțimile $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\ m\}$ și $C = \{a, c, n, p\}$, numerele a, b, c, d, m, n, p fiind diferite între ele. Determinați:

$$A \cup B;\ (A \cup B) \cap C;\ A \cap C;\ B \cap C;\ (A \cap C) \cup (B \cup C).$$

Comparați mulțimile:

$$M = (A \cup B) \cap C \quad \text{și} \quad N = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

I.P.4. Dați exemple de mulțimi care să satisfacă egalitatea:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(proprietatea de distributivitate a reuniunii față de intersecție).

I.P.5. Verificați pe cale grafică (folosind diagramele *Euler-Venn*) valabilitatea egalității de la exercițiul I.P.4.

I.P.6. Să se determine mulțimea A știind că:

$$A \cup \{2, 4, 5\} = \{1, 2, 4, 5, 6\}.$$

Mulțimea A poate fi unic determinată? Mai trebuie să cunoaștem rezultatul aplicării unei alte operații între A și altă mulțime?

Dați un exemplu.

I.P.7. Știm că:

$$A \cup \{2, 4, 5\} = \{1, 2, 4, 5, 6\},$$
$$A \cap \{2, 4, 5\} = \{2, 4, 5\}.$$

Mulțimea A se determină astfel:

1°). Folosind rezultatul intersecției se constată că mulțimea A trebuie să cuprindă elementele 2, 4, 5.

Scanned with OKEN Scanner

2°). Folosind rezultatul reuniunii se constată că mulțimea A cuprinde elementele 1 și 6. Deci:

$$A = \{1, 2, 4, 5, 6\}.$$

Se face verificarea și se constată că mulțimea găsită anterior verifică relațiile.

Pe baza unui astfel de raționament, sau al unuia asemănător, să se determine A în condițiile:

a°). $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, (1)

$A - B = \{1, 6\}$, (2)

$B = \{2, 4, 5\}$. (3)

b°). $A \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$, (1′)

$A - B = \{4, 6\}$, (2′)

$B = \{1, 2, 3, 5\}$. (3′)

I.P.8. Să se determine mulțimile A și B știind că:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, (1)

$A \cap B = \{4, 6, 9\}$, (2)

$A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$, (3)

$B \cup \{4, 8\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. (4)

I.P.9. Fie A, B două mulțimi și card $A = 5$, card $B = 6$. Care este numărul maxim de elemente pe care le poate avea mulțimea $A \cup B$?

Dar intersecția lor?

I.P.10. Determinați mulțimile A, B și C știind că:

$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, (1)

$(A \cap B) \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$, (2)

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\}$. (3)

Obțineți o singură soluție sau mai multe? De ce?

I.P.11. Determinați mulțimile A și B în condițiile:

a°). $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

b°). $A - B = \{1, 4\}$,

Scanned with OKEN Scanner

c°). Există $x \in A \cap B$ astfel încît $x \notin \{3, 4, 5\}$ și mulțimile A și B au același număr de elemente (același cardinal).

I.P.12. Pentru mulțimile găsite la exercițiul I.P.11, calculați:

$$\overline{A \cup B} \text{ și } \bar{A} \cap \bar{B},$$
$$\overline{A \cap B} \text{ și } \bar{A} \cup \bar{B},$$

complementara considerîndu-se în raport cu mulțimea $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Comparați rezultatele. Ce puteți spune? (În loc de $\complement_T A$ vom folosi notația $\bar{A}$ cînd se specifică mulțimea totală).

I.P.13. Determinați mulțimile T (mulțimea totală), A și B știind că:

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7\}, \quad \bar{B} = \{2, 4, 7, 8\},$$
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

I.P.14. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 3, 4\}$. Calculați:

$$A \times B, \ B \times A, \ A \times A, \ B \times B, \ (A \times A) \cup (B \times B),$$
$$(A \times A) \cap (B \times B).$$

I.P.15. Considerați mulțimile A, B, C și D astfel încît $A \subset B$ și $C \subset D$. Determinați produsele $A \times C$ și $B \times D$. Comparați aceste produse și stabiliți dacă $A \times C \subset B \times D$.

I.P.16. Fie $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{1, 4, 5\}$. Construiți mulțimile $A \times B$, $B \times A$.

Reprezentați în plan punctele corespunzătoare cuplurilor produsului $A \times B$. Cum sînt așezate aceste cupluri față de prima bisectoare?

I.P.17. Determinați mulțimile A și B știind că:

a°). $A \times B \subset \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$,

b°). $B \times A \subset \{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$,

c°). $(1, 4) \in A \times B$.

Scanned with OKEN Scanner

I.P.18. În ce condiții o mulțime A nu este inclusă într-o mulțime B? Se poate folosi semnul de incluziune între mulțimile:

a°). $A = \{1, 3, 5, 7\}$ și $B = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

respectiv:

b°). $C = \{1, 2, 3\}$ și $D = \{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$?

I.P.19. Fie $A \subset B$ și $C \subset D$. Sînt adevărate afirmațiile:

$$A \cup C \subset B \cup D; \quad A \cap C \subset B \cap D?$$

I.P.20. Construiți mulțimile A, B, C astfel încît afirmațiile:

a°). $A - B = A \cap C$,

b°). $B - A = B \cap C$,

să fie simultan adevărate.

I.P.21. Cu mulțimile de la I.P.20, calculați mulțimile:

$(A - B) \cap (A - C)$, $(A - B) \cup (A - C)$, $A \cap B \cap C$.

În ce caz toate mulțimile de mai sus coincid cu mulțimea vidă?

I.P.22[1]**.** Considerați trei mulțimi A, B, C și calculați:

$$(A \times B) \cup (A \times C) \quad \text{și} \quad A \times (B \cup C).$$

Concluzii. De ce se obține același rezultat?

I.P.23. Fie $I_1 = [3, 7]$ și $I_2 = (3, 7)$. Se poate spune că $I_2 \subset I_1$? De ce?

I.P.24. Determinați $I = (3, 8) \cap [3, 5)$.

I.P.25. Se pot exprima mulțimile:

$$I_1 = \{x \in R \mid |2x - 1| < 3\},$$

$$I_2 = \{x \in Z \mid |4 - 3x| < 5\}.$$

ca intervale ale dreptei reale?

Scanned with OKEN Scanner

I.P.26. Este corectă afirmația: dacă $x \in (-2, 5)$ și $I = \{x \mid \frac{x+2}{3} - x \geqslant 1\}$ atunci $I \subset (-2, 5)$?

I.P.27[1]. Fie $M = \{x \in Q \mid x = \frac{n+13}{n+1},\ n = 1, 2, \ldots\}$.

Să se determine mulțimea $I = \{x \in M \mid x \in Z\}$.

I.P.28. Dacă oricare ar fi x, $x \in A \cup (B \cap C)$, se poate spune că:

a°). $x \in A \cup C$? b°). $x \in A \cup B$?

I.P.29. Dacă $x \in A \cap (B \cup C)$, au sens întotdeauna afirmațiile:

a°). $x \in A$ și $x \in (B \cup C)$;

b°). $x \in A$ și $x \in B$;

c°). $x \in A$ și $x \in C$?

I.P.30. Dacă $A = (2, 10)$ se poate spune că există mulțimea:

$$I = \{x \in A \mid \frac{x+3}{2x} \leqslant 1 \text{ și } \frac{x+8}{4-x} \geqslant 1\}?$$

Puteți determina mulțimea I?

I.P.31. Dacă s-ar considera mulțimea $A = (-2, 10)$, se poate vorbi de mulțimea:

$$I = \{x \in A \mid \frac{x+3}{2x} \leqslant 1 \text{ și } \frac{x+8}{4-x} \geqslant 1\}?$$

Verificați dacă $I = (-2, 0) \cup [3, 4]$.

I.P.32. Determinați mulțimea $S = \{x \in R \mid x^2 + 4x + 5 = 0\}$. De ce $S = \varnothing$?

I.P.33[2]. O mulțime A are m elemente iar o mulțime B are n elemente. Aflați:

a°). Cîte elemente are $A \cup B$ știind că $A \cap B$ are p elemente;

b°). Cîte elemente are $A \cap B$ știind că $A \cup B$ are q elemente.

Scanned with OKEN Scanner

I.P.34[2]. Se poate afirma că două mulțimi A și B sînt egale dacă produsele $A \times B$ și $B \times A$ sînt aceleași?

I.P.35[3]. Să se compare mulțimile finite A și B știind că $A \cup B$ și $A \cap B$ au același număr de elemente.

I.P.36[3]. a°). Să se determine mulțimile de numere A și B știind că:

$$A \cap B = \{2, 4\}, \quad A - B = \{1, 3, 5\}$$

și:

$$B - A = \{6\}.$$

b°). Să se determine elementele mulțimii:

$$M = (B - C) \cup (C - B)$$

știind că:

$$C = \{x \in N \mid (x^2 - 9)\ (4 - x^2)\ (2 + x^2) = 0\}.$$

(Concurs elevi, 1972)

INDICAȚII

I.P.4. Se poate demonstra valabilitatea afirmației cînd A, B, C sînt mulțimi oarecare.

I.P.9. Se poate demonstra în prealabil că:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ |A \cap B| &= |A| + |B| - |A \cup B|. \end{aligned} \qquad (1)$$

I.P.12. Se pot folosi și relațiile lui *De Morgan*.

I.P.17. Se are în vedere faptul că dacă $(a, b) \in A \times B$ atunci $a \in A$ și $b \in B$.

I.P.33[2]. Se pot folosi relațiile (1) citate mai sus.

I.P.34[2]. Răspunsul este negativ. Vi se cere să-l argumentați.

Scanned with OKEN Scanner

I.P.1. $A \cup B = \{0, 3\}$, $A \cap B = \varnothing$.

I.P.2. În cazul în care $B = \{2, 4, 5, 6\}$, X poate fi oricare din mulțimile care conțin elementele 2 și 4, fără a conține pe 5 și 6. Rezultă deci că afirmația enunțată este falsă.

I.P.3. $A \cup B = \{a, b, c, d, m\}$; $(A \cup B) \cap C = \{a, b, c, d, m\} \cap \{a, c, n, p\} = \{a, c\}$; $A \cap C = \{a, c\}$; $B \cap C = \{c\}$; $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{a, c\}$.

Se verifică deci și legea de distributivitate a intersecției față de reuniune:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

deci, în fond, $M = N$.

I.P.4. Putem considera, de exemplu, $A = \{1, 2, 5, 7\}$, $B = \{2, 7, 9, 10\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Verificarea este imediată.

I.P.5. Din diagrama I.P.5. rezultă $B \cap C = \varnothing$ deci $A \cup (B \cap C) = A$. $A \cup B$ se reprezintă prin regiunea

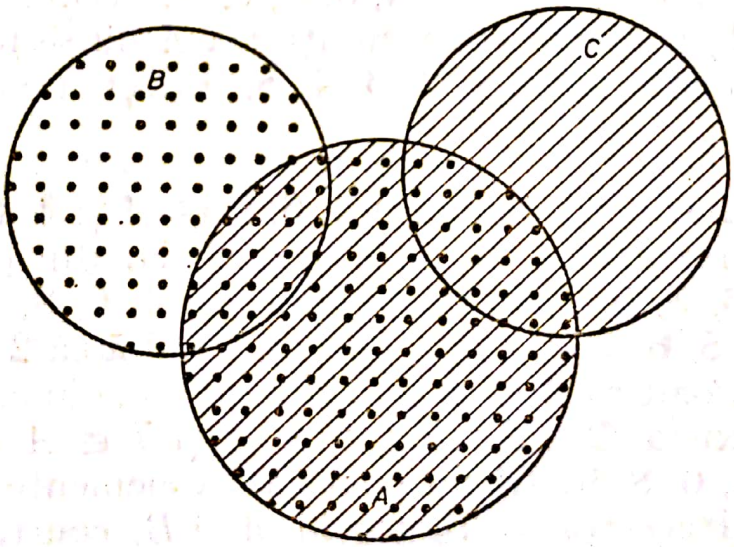


Fig. I.P.5

punctată iar $A \cup C$ prin regiunea hașurată de unde se vede că regiunea hașurată și punctată (intersecția mulțimilor $A \cup B$ și $A \cup C$) este tocmai mulțimea A.

Scanned with OKEN Scanner

Cazurile cînd $B \cap C \neq \varnothing$ etc. se tratează analog (se observă că am impus soluției un anumit grad de abstractizare în sensul că unei mulțimi oarecare i-am asociat o regiune din plan, fără a ține deci seama neapărat de natura elementelor ce o compun).

I.P.6. Pentru A avem mulțimea de soluții:

$$\{1, 6\},\ \{1, 2, 6\},\ \{1, 4, 6\},\ \{1, 5, 6\},$$
$$\{1, 2, 4, 6\},\ \{1, 2, 5, 6\},\ \{1, 2, 4, 5, 6\},$$
$$\{1, 4, 5, 6\},$$

de unde rezultă că mulțimea A nu este unic determinată. Pentru a determina unic mulțimea A putem impune, pentru a obține de exemplu soluția $A = \{1, 6\}$ condiția:

$$A \cap \{2, 4, 5\} = \varnothing.$$

I.P.7. a°). Din (2) deducem $1 \in A$, $6 \in A$. Avînd în vedere (3) obținem pentru A mulțimea de soluții:

$$\{\{1, 6\},\ \{1, 2, 6\},\ \{1, 4, 6\},\ \{1, 5, 6\},\ \{1, 2, 4, 6\},$$
$$\{1, 2, 5, 6\},\ \{1, 4, 5, 6\},\ \{1, 2, 4, 5, 6\}\}.$$

b°). Din (1') rezultă $\{1, 2, 3, 5\} \subset A$. Din (2') rezultă $\{4, 6\} \subset A$ deci $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset A$. Avînd în vedere (3') și (2') obținem că în mulțimea A nu se mai găsesc alte elemente decît 1, 2, 3, 4, 5, 6 deci $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

I.P.8. Din (2) deducem $4, 6, 9 \in A$ și $4, 6, 9 \in B$. Din (3) rezultă că $\{1, 6, 8, 9\} \subset A$ iar din (4) rezultă că $\{2, 3, 5, 6, 7, 9\} \subset B$. Deci $\{1, 4, 6, 8, 9\} \subset A$ și $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\} \subset B$. Din (3) rezultă că $2 \notin A$, din (4) am văzut că $3 \in B$ deci $3 \notin A$ (căci în caz contrar nu ar exista (2)). Analog, $5 \notin A$ și $7 \notin A$ deci $A = \{1, 4, 6, 8, 9\}$ (A nu poate avea elemente mai mari ca 9 căci acestea ar figura în $A \cup B$, contrar relației (1)). Analog se arată că $1 \notin B$, $8 \notin B$ deci $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

I.P.9. Evident că $A \cup B$ va avea un număr maxim de $5 + 6 = 11$ elemente cînd A și B sînt disjuncte

Scanned with OKEN Scanner

(n-au elemente comune) căci în reuniune elementele comune apar o singură dată.

Pentru intersecție numărul maxim este de 5 elemente, anume cînd $A \subset B$.

I.P.10. Problema este propusă pentru a evidenția faptul că sistemele de acest gen nu admit, în general, soluție unică. Se observă că $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{5\}$ verifică toate relațiile din enunț. De asemenea, mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{4, 5\}$ verifică.

I.P.11. Fie $|A|$ numărul de elemente al mulțimii A. Este clar că:

$$|A \cup B| = |A| + |B - |A \cap B| \qquad (*)$$

căci în reuniune elementele comune intră o singură dată iar în suma $|A| + |B|$, elementele comune intră de două ori deci din această sumă trebuie scăzut numărul elementelor comune adică $|A \cap B|$. Cum, din a doua relație, $1 \in A$ și $1 \notin B$ deci $1 \notin A \cap B$ iar din a treia afirmație fiecare din elementele 3, 4, 5 nu aparțin lui $A \cap B$ deci, avînd în vedere prima relație și a treia afirmație, $A \cap B = \{2\}$ deci $|A \cap B| = 1$ astfel că din (*) și în ipoteza $|A| = |B|$ rezultă $5 = |A \cup B| = 2|A| - 1$ deci $|A| = |B| = 3$. Ca atare, cum $1, 4, 2 \in A$ rezultă $A = \{1, 2, 4\}$. Din prima relație rezultă $3, 5 \in B$ deci cum și $2 \in B$ rezultă $B = \{2, 3, 5\}$.

I.P.12. Dat fiind că mulțimea totală este $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ rezultă $\overline{A \cup B} = \varnothing$ și $\bar{A} \cap \bar{B} = \{3, 5\} \cap \cap \{1, 4\} = \varnothing$, $\overline{A \cap B} = \{1, 3, 4, 5\}$, $\bar{A} \cup \bar{B} = \{3, 5\} \cup \cup \{1, 4\} = \{1, 3, 4, 5\}$.

Iată deci încă o verificare a relațiilor lui *De Morgan*.

I.P.13. Din a doua relație rezultă $8 \in T$ și din prima, cum $\bar{A} = T - A$ rezultă $8 \in A$ deci $8 \in A \cup B$, absurd căci, potrivit enunțului, $8 \notin A \cup B$. Deci sistemul propus nu are soluții.

Scanned with OKEN Scanner

I.P.14. Se poate scrie:

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\},$$

$$B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\},$$

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\},$$

$$B \times B = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\},$$

$$(A \times A) \cup (B \times B) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\},$$

$$(A \times A) \cap (B \times B) = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}.$$

I.P.15. Considerînd $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ $C = \{2\}$, $D = \{2, 3\}$ putem scrie $A \times C = \{(1, 2)\}$, $B \times D = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$.

Se constată că propoziția $A \times C \subset B \times D$ este adevărată. În general, propoziția este adevărată oricare ar fi mulțimile A, B, C, D în condițiile enunțului.

I.P.16. Putem scrie:

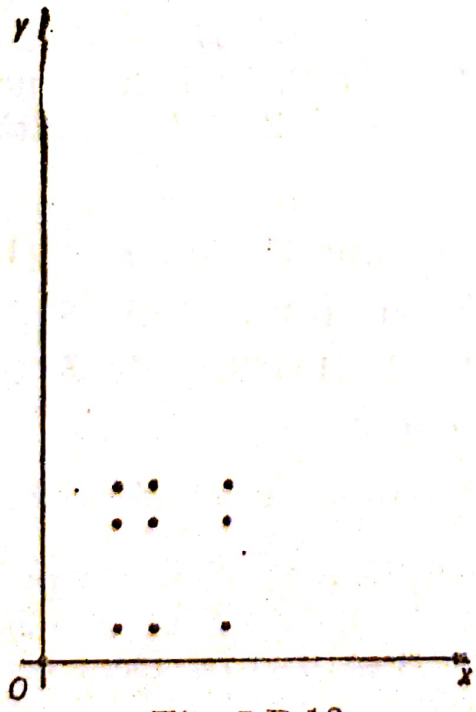


Fig. I.P.16

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 5), (5, 1), (5, 4), (5, 5)\},$$

$$B \times A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}.$$

Cercetînd diagrama I.P.16. se constată că 4 cupluri se găsesc deasupra primei bisectoare, 4 cupluri dedesubt și un cuplu pe ea. Se poate alcătui o diagramă asemănătoare și pentru produsul $B \times A$.

Scanned with OKEN Scanner

I.P.17. Din cele trei relații deducem (din prima și a treia);

$$A \subset \{1, 3\}, \tag{1}$$

$$B \subset \{2, 3, 4\}, \tag{2}$$

$$\{1\} \subset A, \tag{3}$$

$$\{4\} \subset B. \tag{4}$$

Făcînd produsul $B \times A$ se constată că ajungem la o absurditate deoarece acest produs trebuie să conțină și perechea (4, 1) care însă nu se află în mulțimea $\{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$. Deci nu există mulțimile A și B cu proprietatea cerută.

I.P.18. O mulțime A nu este inclusă într-o mulțime B cînd există $x \in A$ astfel ca $x \notin B$. Ca atare, nu putem avea, în cazul de față, $A \subset B$, $C \subset D$ sau $B \subset A$, $D \subset C$, deoarece $1 \notin B$ și $3 \notin D$.

I.P.19. Incluziunea $A \cup C \subset B \cup C$ este evidentă. Pentru a doua fie $x \in A \cap C$. Atunci $x \in A$ și $x \in C$ deci $x \in A \subset B$ și $x \in C \subset D$ adică $x \in B \cap D$ de unde și a doua incluziune. Dacă nu există $x \in A \cap C$ atunci $A \cap C = \varnothing$ deci, oricum $A \cap C \subset B \cap D$.

I.P.20. Putem lua, de exemplu, $A = B = \{1, 2, 3\}$ și $C = \{4\}$.

I.P.21. În condițiile exercițiului I.P.20:

$$(A - B) \cap (A - C) = \varnothing,$$

$$(A - B) \cup (A - C) = \{1, 2, 3\},$$

$$A \cap B \cap C = \varnothing.$$

I.P.22[1]**.** Considerînd, de exemplu, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{3, 5, 6\}$, putem scrie:

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\},$$

$$A \times C = \{(1, 3), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (3, 6)\},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A \times (B \cup C) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}.$$

Se vede că:

$$(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C).$$

Această afirmație este valabilă oricare ar fi mulțimile A, B, C. În adevăr, dacă $A = \varnothing$, afirmația este evidentă căci $\varnothing \times Y = \varnothing$, oricare ar fi mulțimea Y. Analog, dacă $B = C = \varnothing$.

Fie, în caz contrar, $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Avem: $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B)$ sau $(x, y) \in (A \times C) \Leftrightarrow (x \in A$ și $y \in B)$ sau $(x \in A$ și $y \in C) \Leftrightarrow x \in A$ și $(y \in B$ sau $y \in C) \Leftrightarrow x \in A$ și $y \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \times (B \cup C)$ deci $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$ deoarece din șirul de implicații $\Rightarrow$ regultă $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$ iar din șirul $\Leftarrow$ rezultă incluziunea contrară, deci egalitate.

I.P.23. Deoarece $3, 7 \in I_1$ și $3, 7 \notin I_2$, deci $I_2 \subset I_1$.

I.P.24. $I = (3, 5)$.

I.P.25. Da pentru primul caz, pentru că $|2x - 1| < 3$ implică $-3 < 2x - 1 < 3$ deci $-2 < 2x < 4$ sau $-1 < x < 2$ adică $I_1 = (-1, 2)$.

Analog, $I_2 = \left\{x \mid x \in Z \text{ și } -\frac{1}{3} < x < 3\right\} = \{0, 1, 2\}$.

I.P.26. Nu, afirmația nu este corectă deoarece $I = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ și, evident, $I \not\subset (-2, 5)$.

I.P.27[1]. Dacă $x \in Q$ și $x = \frac{n + 13}{n + 1}$, $n \in N^*$, iar $\frac{n + 13}{n + 1} = \frac{n + 1}{n + 1} + \frac{12}{n + 1} = 1 + \frac{12}{n + 1}$, atunci $M = \left\{7, 5, \ldots, \frac{k + 13}{k + 1}, \ldots\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Este acum clar că $I = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ căci $\frac{n+13}{n+1} \in Z$, $n \in N^*$, implică $\frac{12}{n+1} \in Z$ deci $n+1$ trebuie căutat printre divizorii lui 12, or, acest lucru se întîmplă cînd $n \in \{1, 2, 3, 5, 11\}$.

I.P.28. Din relația $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, apartenența $x \in A \cup (B \cap C)$ implică $x \in A \cup B$ și $x \in A \cup C$.

I.P.29. Numai afirmația a°) este întotdeauna adevărată deoarece, pentru b°) este posibil ca $x \in C$, fără ca $x \in B$, și să avem $x \in A \cap (B \cup C)$ etc...

I.P.30. Sistemul de inegalități:

$$\begin{cases} \frac{x+3}{2x} \leqslant 1 \\ \frac{x+8}{4-x} \geqslant 1 \end{cases}$$

conduce la sistemul:

$$\begin{cases} \frac{3-x}{2x} \leqslant 0 \\ \frac{x+2}{4-x} \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad x \in (2, 10).$$

Prima inecuație este verificată atunci cînd:

(1) $-x+3 \leqslant 0, 2x > 0$ sau $-x+3 \geqslant 0, 2x < 0$

iar a doua:

(2) $x+2 \geqslant 0, \quad 4-x > 0$ sau $x+2 \leqslant 0, 4-x < 0.$

(1) conduce la $x \in (-\infty, 0) \cup [3, \infty)$ iar (2) la $x \in [-2, 4)$ deci (1) și (2) la $x \in [-2, 0), \cup [3, 4)$. Ca atare, $I = [3, 4)$, deoarece $x \in A = (2, 10)$.

I.P.31. Da. $I = (-2, 0) \cup [3, 4)$, conform cu exercițiul precedent.

Scanned with OKEN Scanner

I.P.32. Ecuația $x^2 + 4x + 5 = 0$ nu are nici o soluție reală ($\Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$) deci $S = \varnothing$ (sau $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 > 0, \quad (\forall)\, x \in R$).

I.P.33[2]. a°). Dacă A are m elemente (card $A = m$) și B are n elemente (card $B = n$) atunci $A \cup B$ are $m + n - p$ elemente deoarece reuniunea cuprinde elementele comune o singură dată, deci card $(A \cup B) =$ $=$ card A + card B − card $(A \cap B) = m + n - p$.

b°). Din observația precedentă:

$$\text{card}\,(A \cap B) = \text{card}\ A + \text{card}\ B - \text{card}\ (A \cup B) = m + n - q.$$

I.P.34[2]. Nu, deoarece, de exemplu, $\varnothing \times \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} \times \varnothing = \varnothing$.

I.P.35[3]. Din soluția problemei I.P.33. rezultă:

$$\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\ A + \text{card}\ B - \text{card}\ (A \cap B).$$

Însă card $(A \cup B) =$ card $(A \cap B)$ deci:

$$\text{card}\ A + \text{card}\ B = 2\,\text{card}\,(A \cup B) = 2\,\text{card}\,(A \cap B).$$

Fie $p = \text{card}\ A$, $q = \text{card}\ B$. Este clar că avem:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \text{card}\,(A \cap B) &\leqslant p, \\ \text{card}\,(A \cap B) &\leqslant q \end{aligned}$$

deci:

$$p + q = 2\,\text{card}\,(A \cap B) \leqslant p + q.$$

Rezultă deci din relațiile (1) că $p = q$.

I.P.36[3]. a°). Deoarece pentru orice mulțimi A și B putem scrie:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

și:

$$B = (B - A) \cup (A \cap B)$$

(identități ce se pot dovedi, de exemplu, cu ajutorul funcției caracteristice), ținînd seama de condițiile din enunț se obține:

$$A = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

și:

$$B = \{6\} \cup \{2, 4\} = \{2, 4, 6\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b°). Ecuația:

$$(x^2 - 9)\ (4 - x^2)\ (2 + x^2) = 0$$

are ca mulțime de soluții:

$$T = \{3,\ -3,\ 2,\ -2,\ i\sqrt{2},\ -i\sqrt{2}\}.$$

Deci:

$$C = T \cap N = \{2,\ 3\}$$

astfel că:

$$M = \{3,\ 4,\ 6\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

STRUCTURI ALGEBRICE

II.1.0. Relații de preordine, ordine, echivalență. Fie mulțimile A, B și $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ și $y \in B\}$.

II.1.1. *Definiție.* Se numește *relație* (sau *corespondență*) între mulțimile A și B, un triplet $\mathcal{R} = (G, A, B)$, unde $G \subseteq A \times B$.

Mulțimea A este numită *mulțimea (domeniul) de plecare* sau *de definiție* (sau *sursă*) a relației $\mathcal{R}$, mulțimea B reprezintă *mulțimea (codomeniul) de sosire* (sau *adresă*) a relației $\mathcal{R}$ iar G *graful* (sau *graficul*) relației $\mathcal{R}$.

Dacă $(x, y) \in G$ vom spune că elementele x și y sînt în relația $\mathcal{R}$ și scriem $x\mathcal{R}y$; dacă $(x, y) \notin G$, spunem că x și y nu sînt în relația $\mathcal{R}$ și scriem $x\overline{\mathcal{R}}y$.

Se observă imediat că $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in G$. În baza acestei observații, o relație $\mathcal{R}$ de sursă A și adresă B este complet determinată dacă se dă graficul său G și reciproc.

O relație de tipul celei definită anterior se numește *binară* deoarece se referă la două elemente. Se pot defini relații *ternare*, în general n — are, însă, pentru considerațiile noastre, ne vom opri numai la relațiile binare.

Exemple

II.1.2. Fie $N^* = \{1, 2, \ldots\}$ mulțimea numerelor naturale fără 0. Mulțimea:

$$G = \{(x, y) \in N^* \times N^* \mid x \mid y\}$$

este graficul unei relații în N^*.

Scanned with OKEN Scanner

II.1.3. $x\mathcal{R}y \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} x = y$, $x, y \in R$ este o relație.

II.1.4. Dacă $A = \{2, 3, 7\}$, mulțimea:

$$G = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leqslant y\}$$

este graficul unei relații în A.

II.1.5. *Definiție.* Fie o relație $\mathcal{R} = (G, A, B)$. Se numește *simetrica*, *inversa* sau încă *reciproca* sa, relația $\mathcal{R}^{-1} = (G', B, A)$, definită astfel:

$(y, x) \in G'$ dacă și numai dacă $(x, y) \in G$ adică $y\mathcal{R}^{-1}x \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$.

II.1.6. *Definiție.* Fie $\mathcal{R}_1 = (G, A, B)$, $\mathcal{R}_2 = (G', B, C)$ două relații. Relația $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R} = (G'', A, C)$ definită prin:

$$x\mathcal{R}z$$

dacă există $y \in B$ astfel încît $x\mathcal{R}_1 y$ și $y\mathcal{R}_2 z$, se numește *compusa* sau încă *produsul* relațiilor $\mathcal{R}_1$ și $\mathcal{R}_2$.

II.1.7. Fie $\mathcal{R} = (G, A, A)$ o relație.

a°). Dacă $(x, x) \in G$, $(\forall)\ x \in A$ — adică $x\mathcal{R}x$ — atunci relația $\mathcal{R}$ se numește *reflexivă*.

b°). Dacă $(x, y) \in G$ implică $(y, x) \in G$ (adică $x\mathcal{R}y$ implică $y\mathcal{R}x$) atunci relația $\mathcal{R}$ se numește *simetrică*.

c°). Dacă $(x, y) \in G$ și $(y, z) \in G$ implică $(x, z) \in G$ (adică $x\mathcal{R}y$ și $y\mathcal{R}z$ implică $x\mathcal{R}z$) atunci relația se numește *tranzitivă*.

d°). Dacă $(x, y) \in G$ și $(y, x) \in G$ implică $x = y$ (adică $x\mathcal{R}y$ și $y\mathcal{R}x$ implică $x = y$) atunci relația se numește *antisimetrică*.

e°). Dacă $(x, y) \in G$ și $(y, x) \in G$ nu pot avea loc simultan pentru nici o pereche $(x, y) \in A \times A$ atunci relația se numește *strict antisimetrică*.

II.1.8. *Definiție.* Fie $\mathcal{R} = (G, A, A)$ o relație. Relația $\mathcal{R}$ se numește de *ordine parțială* dacă ea este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.

O mulțime în care s-a definit o relație de ordine parțială se numește *parțial ordonată*.

Scanned with OKEN Scanner

II.1.9. *Definiție.* Fie $\mathcal{R} = (G, A, A)$ o relație. Relația $\mathcal{R}$ se numește de *preordine* dacă este reflexivă și tranzitivă.

O mulțime în care s-a definit o relație de preordine se numește *preordonată*.

II.1.10. *Definiție.* O relație $\mathcal{R} = (G, A, A)$, reflexivă, simetrică și tranzitivă se numește relație *de echivalență* pe mulțimea A.

Dacă $x\mathcal{R}y$, $\mathcal{R}$ fiind o relație de echivalență, se spune că x este *congruent* cu y modulo $\mathcal{R}$.

Mulțimea $\hat{x} = C_x = \{y \in A \mid y\mathcal{R}x\}$ se numește *clasa de echivalență modulo* $\mathcal{R}$ a lui x.

Mulțimea ale cărei elemente sînt clasele de echivalență ($C_x \in \mathcal{P}(A)$) modulo $\mathcal{R}$ se numește *cîtul* mulțimii A prin relația $\mathcal{R}$ sau *mulțimea cît* a lui A prin $\mathcal{R}$. Notăm această mulțime cu $A/\mathcal{R}$.

Exemple

II.1.11. Fie R mulțimea numerelor reale și relația de egalitate „=". Această relație este reflexivă, $x = x$, $(\forall)\ x \in R$ (cf. def. II.1.7. a°)), simetrică, $x = y \Rightarrow y = x$ (cf. def. II.1.7. b°)) și tranzitivă, $x = y$ și $y = z \Rightarrow x = z$ (cf. def. II.1.7. c°)). Deci această relație este o relație de echivalență.

Mulțimea cît, $R/=$, conține toate mulțimile ce se pot forma cu fiecare număr real deci card R = card $R/=$.

II.1.12. Fie $\mathcal{R} = \{G, A, \mathcal{P}(A)\}$ o relație. Atunci $\mathcal{R}' = \{G', \mathcal{P}(A), A\}$ este *simetrica* relației $\mathcal{R}$.

II.1.13. Relația de inegalitate (nestrictă) definește pe R o relație de ordine parțială căci este reflexivă ($x \leqslant x$, $(\forall)\ x \in R$), antisimetrică ($x \leqslant y$ și $y \leqslant x \Rightarrow x = y$) și tranzitivă ($x \leqslant y$ și $y \leqslant z$ implică $x \leqslant z$; de aici și abuzul de limbaj *„prin tranzitivitate"* — în multe cazuri această proprietate trebuie dovedită).

Scanned with OKEN Scanner

II.1.14. Fie Z mulțimea numerelor întregi și $n \neq 0$ un întreg oarecare. Definim relația $\equiv$ prin:

$$x \equiv y \pmod{n}^1$$

dacă și numai dacă $(x - y) \vdots n$. Această relație este de echivalență deoarece este reflexivă, $x \equiv x \pmod{n}$ $(x - x = 0 \vdots n)$, simetrică, $x \equiv y \pmod{n} \Rightarrow y \equiv x \pmod{n}$ $(x - y \vdots n \Rightarrow y - x \vdots n)$ și tranzitivă, $x \equiv y \pmod{n}$ și $y \equiv z \pmod{n}$ implică $x \equiv z \pmod{n}$ $(x - y \vdots n$ și $y - z \vdots n$ implică $x - z \vdots n$, prin adunarea relațiilor $x - y = k_1 n$ și $y - z = k_2 n$, $k_1, k_2 \in Z)$.

Clasele de echivalență ale acestei relații încă se mai numesc, pentru uniformizarea limbajului, clase de resturi modulo n și sînt în număr de n:

$$\hat{0} = C_0 = \{x \in Z \mid x \equiv 0 \pmod{n} \text{ adică } x = kn, k \in Z\},$$

$$\hat{1} = C_1 = \{x \in Z \mid x \equiv 1 \pmod{n} \text{ adică } x = kn + 1, k \in Z\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\widehat{n-1} = C_{n-1} = \{x \in Z \mid x \equiv n - 1 \pmod{n} \text{ adică } x = kn + n - 1, k \in Z\}.$$

În adevăr, orice $x \in Z$ dă la împărțirea la n unul din resturile $0, 1, \dots, n - 1$ (teorema împărțirii cu rest a numerelor întregi) — și orice două clase sînt disjuncte căci dacă $x \in C_i \cap C_j$, $i < j$, atunci $x = k_1 n + i = k_2 n + j$ de unde $0 \leqslant n(k_1 - k_2) = j - i \leqslant n - 1$ deci $i = j$, contrar ipotezei.

Ca atare, $P = \{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\}$ constituie o partiție a lui Z.

---

[1] Citim, de obicei, această relație: „x este congruent cu y modulo n" deși n nu identifică relația.

Scanned with OKEN Scanner

II.1.15. Afirmația anterioară are un caracter general, anume dacă $\mathcal{R} = (G, A, A)$ este o relație de echivalență pe A:

a°). Relația $\mathcal{R}$ determină pe A o partiție $\{C_x\}_{x \in A}$ în clase de echivalență modulo $\mathcal{R}$,

b°). $x \in C_x = \hat{x}$, $(\forall)\ x \in A$,

c°). $\hat{x} = C_x = C_y = \hat{y}$ dacă și numai dacă $x \mathcal{R} y$.

În adevăr, $\mathcal{R}$ fiind reflexivă, $x \mathcal{R} x$, $(\forall)\ x \in A$, deci $x \in \{y \in A \mid y \mathcal{R} x\} = C_x$; de aici $C_x \neq \varnothing$.

Fie $C_x = C_y$ și $x \in C_x = C_y$. Atunci $x \mathcal{R} y$. Reciproc, fie $x \mathcal{R} y$; atunci, din $z \mathcal{R} x$ rezultă $z \mathcal{R} y$ adică $z \in C_y$. Deci $C_x \subseteq C_y$. Analog, $C_x \subseteq C_y$ deci $C_x = C_y$.

De aici rezultă că două clase de echivalență sînt, ori disjuncte, ori coincid și că $A = \bigcup_{x \in A} C_x$. Deci familia de submulțimi $\{C_x\}_{x \in A}$ ale lui A este o partiție a mulțimii A, numită *partiția asociată relației de echivalență* $\mathcal{R}$. Reciproc, dacă $\{A_i\}_{i \in I}$ este o partiție a mulțimii A, atunci $G = \bigcup_{i \in I} A_i^2 \subseteq A^2$ este graficul unei relații de echivalență $\mathcal{R}$ pe A ($x \mathcal{R} y \Leftrightarrow$ există un unic $i \in I$ astfel ca $x, y \in A_i$; aici $C_x = A_i$).

II.2.0. Relații funcționale.

II.2.1. *Definiție.* Fie X și Y două mulțimi. Se numește *relație funcțională* sau *funcție* definită pe X cu valori în Y o relație $f = (G, X, Y)$ cu proprietatea că pentru orice $x \in X$ există un *element unic* $y \in Y$ astfel încît $(x, y) \in G$.

În acest caz, G se numește *graficul* funcției, X este *domeniul de definiție al funcției* iar mulțimea Y este numită *domeniul de valori (codomeniul)* al funcției.

Dacă $x \in X$, elementul unic $y \in Y$ pentru care $(x, y) \in G$ se numește *imaginea* prin f a lui x sau *valoarea funcției* f în x și se notează $f(x)$.

A se face deci diferența dintre f, care reprezintă funcția, și $f(x)$ care reprezintă valoarea funcției în punctul x.

Scanned with OKEN Scanner

Ca atare:

$$y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in G$$

și deci:

$$G = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

De obicei mulțimea funcțiilor $f : X \to Y$ se notează Y^X.

Exemple

R fiind mulțimea numerelor reale:

II.2.2. $f : R \to R$, definită prin $f(x) = x$ este o funcție cu domeniul de definiție R și codomeniul tot R (numită *funcția identitate* a lui R).

II.2.3. $f : R \to R$ definită prin $f(x) = x^2$ este tot o funcție.

În loc de $f : X \to Y$ se mai notează $X \xrightarrow{f} Y$.

De obicei, pentru a simplifica limbajul, lucrînd în general cu numere reale, nu se mai specifică domeniul de definiție și codomeniul, ci numai legea care definește funcția. De asemenea, în loc de:

„Se dă funcția $f : D_f \to R$ dată de legea $f(x) = \ldots$ Să se determine cea mai mare mulțime (în raport cu relația de incluziune) $D_f \subseteq R$ pentru care există funcția" vom folosi:

„Să se determine domeniul maxim de definiție (format numai din numere reale) al funcției $f(x) = \ldots$"

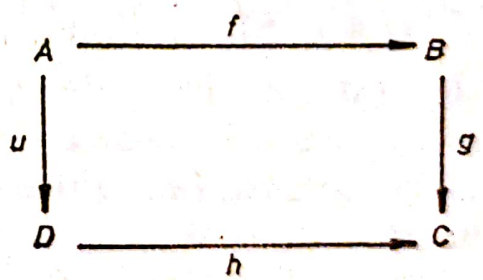


Fig. II.2.4.1

II.2.4. Fie $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, $A \xrightarrow{u} D \xrightarrow{h} C$ patru funcții.

Spunem că diagrama II.2.4.1 este *comutativă* dacă:

$$g(f(x)) = h(u(x)), \ (\forall)x \in A.$$

Conform convenției de notație:

$$g(f(x)) \overset{\text{def.}}{=} (g \circ f)(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

relația se transcrie:

$$g \circ f = h \circ u.$$

În acest caz, deoarece $g \circ f$ este tot o funcție, după cum se poate constata cu ușurință, ea se mai numește *compusa* lui g cu f.

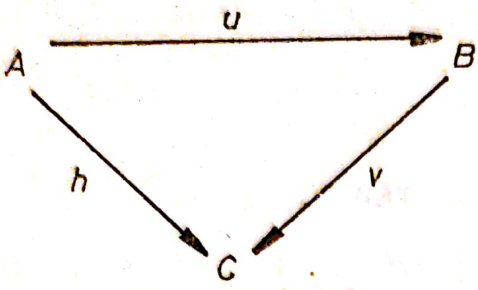


Fig. II.2.4.2

Mai frecvent vom folosi *diagramele triunghiulare* (vezi fig. II.2.4.2) care sînt comutative dacă:

$$v \circ u = h.$$

II.3.0. Legi de compunere interne.

II.3.1. *Definiție.* Fie A o mulțime nevidă. Numim *operație algebrică (lege de compunere)* internă pe mulțimea A, orice funcție:

$$f : A \times A \to A.$$

Dacă $x, y \in A$, elementul $f(x, y) \in A$ se numește *compusul* (uneori *compunerea*) elementului x cu y prin operația f.

Exemlpe

II.3.2. Fie R mulțimea numerelor reale. *Adunarea*, $+$, este o lege de compunere internă, $f(x, y) = x + y$, căci dacă $(x, y) \in R^2$ atunci $x + y \in R$. De asemenea, *înmulțirea* în R este o lege de compunere în R.

II.3.3. Fie N^* mulțimea numerelor naturale. Adunarea este în N^* o lege de compunere internă căci dacă $(x, y) \in (N^*)^2$ atunci $x + y \in N^*$. Scăderea nu este o lege de compunere internă deoarece nu întotdeauna $x - y \in N^*$ dacă $(x, y) \in (N^*)^2$ (căci, de exemplu, $1 - 3 = -2 \notin N^*$).

Înmulțirea este o lege de compunere internă pe N^*.

Scanned with OKEN Scanner

II.3.4. *Observație.* Legile de compunere interne se notează de obicei cu unul din simbolurile: $\oplus$, $+$, $\cdot$, $\perp$, $\top$, $*$, $\wedge$, $\vee$, $\circ$, $*$, $\odot$, $\otimes$, etc., De exemplu, operația $f: R \times R \to R$ definită prin:

$$f(x, y) = x + 3y + 1$$

poate fi scrisă:

$$x \top y = x + 3y + 1$$

sau:

$$x \vee y = x + 3y + 1$$

sau, mai frecvent:

$$x * y = x + 3y + 1.$$

Unele din semnele enumerate anterior sînt însă specifice unor operații importante în matematică, de exemplu $\oplus$ pentru *suma directă*, $\wedge$ și $\vee$ pentru operațiile într-o *latice* etc.

Vom nota, frecvent, operațiile algebrice fie cu semnul $+$, operația fiind numită în acest caz *adunarea* sau $\cdot$ (sau chiar fără acest semn, așa cum se face de obicei la înmulțirea dintre numerele reale ori complexe), operația fiind numită în acest caz *înmulțire*. Pentru cazul adunării vom mai spune că operația este *aditivă* iar pentru cel al înmulțirii vom spune că operația este *multiplicativă*.

Aceste operații nu trebuie confundate cu operațiile de adunare și înmulțire cu care ne-am obișnuit la studiul numerelor reale, mulțimile pe care sînt definite fiind diferite de la caz la caz. Vor fi situații cînd în aceeași mulțime M vom defini două operații algebrice distincte dar notate la fel. Aceasta pentru că, în studiul pe care îl vom face în continuare nu are importanță operația în sine, ci numai proprietățile de structură ale mulțimilor cu care operăm.

Sperăm că cititorul va face deosebirea între adunarea din R (sau C) și operația aditivă oarecare dintr-o mulțime oarecare (observație analoagă și pentru înmulțire).

Scanned with OKEN Scanner

Vom face, de asemenea, următoarele convenții:

Dacă M este o mulțime și $+$ (sau $\cdot$) o operație definită pe $M \times M$ cu valori în M (internă deci) notăm:

$$nx \overset{\text{def.}}{=} \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ ori}}$$

respectiv:

$$x^n \overset{\text{def.}}{=} \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{n \text{ ori}}.$$

Încă:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \overset{\text{def.}}{=} x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \overset{\text{def.}}{=} x_1 \cdot x_2 \ldots x_n.$$

II.3.5. *Definiție.* Fie f o lege de compunere internă pe o mulțime M. Spunem că f este *asociativă* dacă:

$$f(f(x, y), z) = f(x, (y, z)), \quad (\forall)\ (x, y, z) \in M^3$$

sau încă, scris aditiv:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

respectiv pentru scrierea multiplicativă:

$$(xy)z = x(yz).$$

Exemplu

II.3.6. Operațiile obișnuite de adunare și înmulțire în N, Z, Q, R, C sînt asociative. Scăderea nu este însă asociativă deoarece:

$$x - (y - z) = (x - y) - z$$

nu are loc decît dacă $z = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

II.3.7. *Definiție.* Operația $+$ (sau $\cdot$) definită pe M se numește *comutativă* dacă:

$$x + y = y + x \quad (\forall)\ (x, y) \in M^2$$

(sau, scris multiplicativ:

$$xy = yx).$$

II.3.8. *Exemplu.* În N, Z, Q, R, C adunarea și înmulțirea sînt operații comutative.

II.3.9. *Definiție.* Fie M o mulțime înzestrată cu două legi de compunere notate $+$ și $\cdot$. Spunem că legea $\cdot$ este *distributivă* față de legea $+$ dacă:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (\forall)\ (x, y, z) \in M^3.$$

II.3.10. *Exemplu.* În N, Z, Q, R, C înmulțirea este distributivă față de adunare.

II.3.11. *Definiție.* Fie M o mulțime și $+$ o lege de compunere internă. Un element $e \in M$ (notat, pentru operația scrisă aditiv, 0 sau, pentru operația scrisă multiplicativ, 1) se numește *element neutru (nul* sau *unitate)* dacă:

$$x + e = e + x = x \quad (\forall)\ x \in M.$$

sau, respectiv:

$$x \cdot e = e \cdot x = x.$$

II.3.12. *Observație.* Dacă e există atunci el este unic. În adevăr, dacă $e' \neq e$ este un alt element neutru pentru $+$ atunci, din faptul că e este element neutru pentru $+$ rezultă, cînd $x = e'$:

$$e + e' = e' + e = e'.$$

Dar din faptul că e' este element neutru pentru $+$:

$$e + e' = e' + e = e$$

deci $e' = e$, contrar ipotezei. Deci, oricum, $e' = e$.

II.3.13. *Exemplu.* În R, adunarea obișnuită are drept element neutru pe 0, înmulțirea pe 1.

Scanned with OKEN Scanner

II.3.14. *Definiție.* Fie M o mulțime și $+$ o operație internă cu element neutru, e, definită pe M și un element $x \in M$. Spunem că $x' \in M$ este *simetricul (opusul* pentru operațiile notate aditiv sau *inversul* pentru operațiile notate multiplicativ) elementului x dacă:

$$x + x' = x' + x = e \text{ (respectiv } x \cdot x' = x' \cdot x = e).$$

II.3.15. *Observație.* Elementul invers al unui element nu mai este unic, el poate, chiar mai mult, să nu existe (chiar dacă elementul unitate există).

II.3.16. *Exemplu.* Definim pe R operația $*$ prin:

$$x * y = \sqrt{|x^2 - y^2|}.$$

Atunci elementul unitate este $e = 0$ iar pentru $x = 2$ există $x' = 2$ și $x'' = -2$ astfel încît:

$$x * x' = x' * x = e,$$

$$x * x'' = x'' * x = e.$$

II.4.0. Semigrup. O noțiune de bază din algebră este aceea de *semigrup*.

II.4.1. *Definiție.* Fie M o mulțime și $+$ o lege de compunere internă definită pe M. Dacă operația $+$ este asociativă atunci se spune că dubletul $(M, +)$ este un *semigrup (monoid)*.

Dacă, în plus, admite element neutru atunci semigrupul $(M, +)$ se numește *unitar* (cu *unitate)*.

Dacă orice $x \in M$ este inversabil atunci $(M, +)$ este semigrup unitar în care orice element este inversabil. În acest caz este consacrată următoarea terminologie:

II.4.2. *Definiție.* Un semigrup $(M, +)$ unitar în care orice element este inversabil se numește *grup*.

II.4.3. *Exemplu.* N, mulțimea numerelor naturale, este semigrup cu operația $+$. În plus, acest semigrup este unitar, elementul neutru fiind 0.

Scanned with OKEN Scanner

Fie S și S' două semigrupuri[1], cu legile de compunere notate aditiv. O funcție $f : S \to S'$ se numește *morfism (omomorfism)* de semigrupuri dacă:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad (\forall)\ x, y \in S.$$

Aici $x + y$ înseamnă suma elementelor x și y din S (deci în raport cu operația internă din S, diferită de operația internă din S' deși au fost notate cu același semn, $+$), iar $f(x) + f(y)$ suma elementelor $f(x)$ și $f(y)$ din S'.

Dacă semigrupurile S și S' sînt unitare atunci sînt utilizate mai des *morfismele unitare*, care duc elementul neutru al lui S în elementul unitate al lui S'.

II.4.4. *Definiție.* Un morfism de semigrupuri $f : S \to S'$ se numește *izomorfism* dacă există un morfism $f' : S' \to S$ astfel încît:

$$f' \circ f = 1_S$$

și:

$$f \circ f' = 1_{S'},$$

prin 1_S și $1_{S'}$ notîndu-se, respectiv, aplicațiile identice ale mulțimilor S și S'.

În acest caz, semigrupurile S și S' se zic *izomorfe*.

II.4.5. *Exemplu.* Fie $a \in N$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, și $(N, +)$ semigrupul aditiv al numerelor naturale respectiv $(N, \cdot)$ semigrupul multiplicativ. Se constată că submulțimea $A = \{1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots\}$ a lui N este, împreună cu operația de înmulțire, semigrup. Funcția $f : N \to A$ definită prin $f(n) = a^n$ este un morfism:

$$f(n + m) = f(n)f(m) \quad (\forall)\ (n, m) \in N^2$$

căci, în adevăr:

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

Se poate demonstra chiar că acest morfism este izomorfism.

---

[1] Pentru simplificare, în loc de $(S, +)$ vom scrie S, fără a mai specifica operația. Convenția o vom păstra și pentru grupuri, inele, corpuri.

Scanned with OKEN Scanner

II.5.0. Grupuri.

II.5.1. *Definiție.* Orice semigrup G unitar în care orice element este inversabil se numește *grup.*

Dacă, în plus, $x + y = y + x$, $(\forall)$ $(x, y) \in G^2$, grupul se numește *comutativ* (sau *abelian*, după numele matematicianului *Abel*).

Exemple

II.5.2. R împreună cu adunarea obișnuită este grup comutativ căci:

1°). Dacă $x, y \in R$ atunci $x + y \in R$,

2°). $x + (y + z) = (x + y) + z$, $(\forall)$ $(x, y, z) \in R^3$,

3°). $(\exists!)$ $e = 0$ astfel încît:

$$x + 0 = 0 + x = x, \quad (\forall) \quad x \in R,$$

4°). Pentru orice $x \in R$, $(\exists!)$ $x' = -x$ astfel încît:

$$x + x' = x' + x = e = 0,$$

5°). Pentru orice $(x, y) \in R^2$ există egalitatea:

$$x + y = y + x.$$

II.5.3. Mulțimea $2Z = \{2k \mid k \in Z\}$ față de adunarea obișnuită este un grup comutativ.

II.5.4. Mulțimea numerelor reale fără 0, $R - \{0\}$, împreună cu înmulțirea obișnuită, constituie grup comutativ.

II.5.5. *Definiție.* Fie G și G' două grupuri (comutative sau nu), ale căror operații sînt notate aditiv. Atunci o funcție $f : G \to G'$ se numește *morfism (omomorfism* sau încă *homomorfism) de grupuri* dacă:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad (\forall) \quad (x, y) \in G^2.$$

Exemple

II.5.6. Fie $(R, +)$, $(R - \{0\}, \cdot)$ grupul aditiv al numerelor reale respectiv grupul multiplicativ al numerelor reale fără 0. Fie, de asemenea, $a \in R^+$, $a \neq 0$, $a \neq 1$.

Funcția $f: R^+ \to R - \{0\}$ dată de $f(x) = a^x$ este un morfism de grupuri. Acest morfism este unitar adică duce unitatea grupului $(R^+, +)$ în unitatea grupului $(R - \{0\}, \cdot)$, $f(0) = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

II.5.7. Fie G un grup și $E \subseteq G$. Dacă E, împreună cu operația indusă de cea a lui G, formează grup, E se numește *subgrup* al lui G.

II.6.0. Inele.

II.6.1. *Definiție.* Fie M o mulțime și $+$, $\cdot$ două legi de compunere internă definite pe M. Dacă $(M, +)$ este un grup comutativ iar operația $\cdot$ este asociativă și, în plus, distributivă față de operația $+$, atunci tripletul $(M, +, \cdot)$ se numește *inel*. Dacă operația $\cdot$ admite element neutru atunci inelul $(M, +, \cdot)$ se numește *unitar*. Dacă operația $\cdot$ este comutativă atunci inelul $(M, +, \cdot)$ se numește *comutativ* (unitar, dacă admite unitate).

Exemple

II.6.2. Mulțimea R împreună cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire formează un inel comutativ unitar (cu unitatea 1).

În plus, orice $x \in R - \{0\}$ este, față de operația $\cdot$, inversabil.

II.6.3. Dacă G este un inel iar $E \subseteq G$ împreună cu operațiile induse de cele ale inelului G formează inel, atunci acesta se numește *subinel* al lui G.

Fie $(G, +, \cdot)$ și $(G', +, \cdot)$ două inele (operațiile — repetăm — nu sînt aceleași deși ele au fost în ambele inele notate la fel). Avem în acest caz următoarea:

II.6.4. *Definiție.* O funcție $f : G \to G'$ se numește *morfism (omomorfism* sau încă *homomorfism) de inele* dacă:

$$1^\circ).\ f(x + y) = f(x) + f(y), \quad (\forall)\ (x, y) \in G^2,$$

$$2^\circ).\ f(xy) = f(x)f(y), \quad (\forall)\ (x, y) \in G^2.$$

II.6.5. *Observație.* Fie $G \xrightarrow{f} G'$ un morfism de grupuri. Dacă $G = G'$ atunci f se numește *endomorfism* al lui G. Dacă f este izomorfism, el se mai numește încă *automorfism* al lui G.

Definițiile pentru inel sînt analoage.

Scanned with OKEN Scanner

II.7.0. Corpuri.

II.7.1. *Definiție.* Fie $(G, +, \cdot)$ un inel comutativ unitar. Dacă orice $x \in \{G\} - \{0\}$ este inversabil față de operația $\cdot$, 0 fiind unitatea operației $+$, atunci inelul $(G, +, \cdot)$ se numește *corp*. Dacă operația $\cdot$ este comutativă, corpul se numește *comutativ* (în acest caz este consacrată terminologia de *cîmp*).

Exemple

II.7.2. Inelul $(R, +, \cdot)$ este un cîmp.

II.7.3. Inelul $(Q, +, \cdot)$ este un cîmp.

II.7.4. Inelul $(G, +, \cdot)$ este un cîmp.

Încheiem aceste considerații despre structuri cu cîteva elemente pe care le vom folosi în paginile următoare:

II.8.0*. Restricția unei relații. Relația indusă. Relația diagonală. Funcția identică. Ordinul unui grup. Cel mai mare element într-o mulțime ordonată. Cel mai mic element într-o mulțime ordonată.

Fie $A = \{a_i\}_{i \in I}$, $B = \{b_j\}_{j \in J}$, $C = A \times B = \{z = (a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ produsul cartezian al acestor mulțimi. Fiind dat $z = (a, b)$, numim pe a și b *coordonatele* lui z sau *proiecțiile* lui z. Notăm:

$$a = \mathrm{pr}_1 z, \quad b = \mathrm{pr}_2 z.$$

Definim și:

$$\mathrm{pr}_1^{-1}(a) = \{(a, b) \mid b \in B\} = \{a\} \times B$$

pentru un a fixat. Pentru $A' \subseteq A$:

$$\mathrm{pr}_1^{-1}(A') = \{(a, b) \mid a \in A', \ b \in B\}.$$

Fie $\mathcal{R} = (G, A, B)$ o relație și $A' \subseteq A$. Relația $\mathcal{R}|_{A'} = (G|_{A'}, A', B)$ în care $G|_{A'} = G \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(A')$ se numește *restricția primă* a lui $\mathcal{R}$ la A'.

În mod analog se definește și *restricția secundă*; dacă $B' \subseteq B$, avem restricția $\mathcal{R} \nearrow_{B'} = (G \nearrow_{B'}, A, B')$ în care $G \nearrow_{B'} = G \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(B')$.

Scanned with OKEN Scanner

Restricția totală la A' și B' se definește ca fiind relația $\mathcal{R}|_{A \nearrow B} = (G|_{A' \nearrow B'}, A', B')$ cu $G|_{A' \nearrow B'} = G|_{A'} \cap G \nearrow_{B'}$.

Dacă $\mathcal{R} = (G, A, A)$ este o relație în A, vom numi *relația indusă* în $A' \subseteq A$, relația (în A') : $\mathcal{R}|_{A' \nearrow A'}$.

Fie A o mulțime și $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ *diagonala* lui $A \times A$. Funcția $I_A = (\Delta_A, A)$ poartă numele de *funcția identică* a lui A.

Diagonala produsului cartezian $A \times A$ generează relația diagonală, considerînd ca relație binară între A și B orice submulțime K a produsului cartezian $A \times B$ (A și B fiind mulțimi oarecare).

Fie G un grup cu un număr finit de elemente. Numărul card G se numește *ordinul* lui G.

Fie M o mulțime înzestrată cu o relație de ordine pe care să o notăm $\leqslant$. Două elemente $x, y \in M$ se numesc *compatibile* sau *comparabile* dacă $x \leqslant y$ sau $y \leqslant x$ (fără excludere). Un element $u \in M$ se numește *majorant (minorant)* pentru o submulțime nevidă A a lui M dacă $a \leqslant u$ (respectiv $u \leqslant a$) pentru orice $a \in A$.

Dacă submulțimea A a lui M are un majorant (minorant), se spune că ea este *mărginită superior (inferior)*. Mulțimea M se numește *filtrantă la dreapta (stînga)* dacă orice submulțime finită a lui M are un majorant (minorant). Un element $u \in M$ se numește *marginea superioară (inferioară)* pentru o submulțime A a lui M dacă u este un majorant (minorant) pentru A și pentru orice majorant (minorant) $b \in M$ al lui A avem că $u \leqslant b$ (respectiv $b \leqslant u$). Dacă u și u' sînt margini superioare (inferioare) ale submulțimii A a lui M, atunci, din definiție, $u \leqslant u'$ și $u' \leqslant u$.

Marginea superioară (inferioară), dacă există pentru submulțimea A a lui M, se notează cu sup A (inf A). Un element m al unei submulțimi A a lui M se numește *maximal (minimal)* a lui A dacă din faptul că un element x din A este comparabil cu m rezultă $x \leqslant m$ (respectiv $m \leqslant x$). Un element $a \in A$ se numește *cel mai mare element (cel mai mic element)* a lui A dacă $a = \sup A$ (respectiv $a = \inf A$).

Scanned with OKEN Scanner

Fie M o mulțime înzestrată cu o relație de ordine. Ea se numește *bine ordonată* dacă orice submulțime a sa are un cel mai mic element, în particular M are un cel mai mic element. O mulțime M este *total ordonată* sau încă *liniar ordonată* dacă orice două elemente din M sînt comparabile.

PROBLEME REZOLVATE

II.R.1. Fie G un grup (cu operația notată multiplicativ) iar H o submulțime nevidă a sa. Dovediți că următoarele afirmații sînt echivalente:

1°). Legea de compunere de pe G induce o lege de compunere pe H împreună cu care H este grup.

2°). Sînt satisfăcute următoarele condiții:

a°). Pentru orice $x, y \in H$ avem $xy \in H$.

b°). $e \in H$ (e fiind elementul neutru al lui G).

c°). Pentru orice $x \in H$ avem $x^{-1} \in H$.

3°). Pentru orice $x, y \in H$ avem $xy^{-1} \in H$.

Soluție. Să arătăm că 1°) $\Rightarrow$ 2°). Faptul că legea de compunere de pe G induce o lege de compunere pe H, înseamnă că pentru orice $x, y \in H$, compunerea xy este tot un element din H adică a°). Fie e' elementul neutru al lui H; atunci $e'e' = e'$; dacă $(e')^{-1}$ este inversul lui e' în G (acest invers există) atunci $e' = (e')\,(e')^{-1} = e$ și deci $e \in H$ adică b°). În fine, fie $x \in H$ și x' inversul lui x în H. Atunci $xx' = x'x = e$ deci x' este inversul x^{-1} al lui x în G. Deci $x^{-1} \in H$ adică c°).

Dacă $x, y \in H$ atunci, conform cu c°), rezultă $y^{-1} \in H$ adică, potrivit cu a°), $xy^{-1} \in H$ deci 2°)$\Rightarrow$ 3°).

În sfîrșit, dacă $x \in H$ atunci $xx^{-1} = e \in H$ și $x^{-1} = ex^{-1} \in H$. De asemenea, dacă $y \in H$, deoarece $y^{-1} \in H$, obținem $xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$ deci 3°) $\Rightarrow$ 2°) (deoarece $(y^{-1})^{-1} = y$).

Scanned with OKEN Scanner

II.R.2. Pe R^+, mulțimea numerelor reale pozitive, introducem legea de compunere definită prin:

$$x * y = x + y - 1, \quad (\forall)\, x, y \in R^+.$$

Este $(R^+, *)$ grup?

Soluție. $(R^+, *)$ nu este grup deoarece legea $*$ nu este internă, anume $0 * 0 = 0 + 0 - 1 \notin R^+$ $(0 \in R^+)$.

II.R.3. Pe mulțimea N a numerelor naturale introducem următoarea relație:

$$m \sim n \text{ dacă } m = n \text{ sau } m = n^2 \text{ sau } m^2 = n.$$

Dovediți că aceasta nu este o relație de echivalență.

Soluție. În adevăr, relația nu este tranzitivă căci:

$$3 \sim 9 \text{ și } 9 \sim 81 \text{ dar } 3 \not\sim 81.$$

II.R.4. Formează R împreună cu operația $\boxdot$ definită prin:

$$x \boxdot y = 2x + 2y - 3$$

grup?

Soluție. Operația este internă căci dacă $x, y \in R$ atunci $x \boxdot y \in R$.

Să arătăm că operația nu este asociativă. Are loc:

$$x \boxdot (y \boxdot z) = x \boxdot (2y + 2z - 3) = 2x + 2(2y + 2z - 3) - 3 = 2z + 4y + 4z - 9,$$

$$(x \boxdot y) \boxdot z = (2x + 2y - 3) \boxdot z = 2(2x + 2y - 3) + 2z - 3 = 4x + 4y + 2z - 9.$$

Egalitatea $x \boxdot (y \boxdot z) = (x \boxdot y) \boxdot z$ nu poate avea loc pentru orice $x, y, z \in R$ căci, de exemplu, $1 \boxdot (2 \boxdot 3) \neq (1 \boxdot 2) \boxdot 3$ după cum se poate constata cu ușurință.

Ca atare, $(R, \boxdot)$ nu este grup.

II.R.5. Pe R, mulțimea numerelor reale, introducem următoarea relație:

$$x \sim y \Leftrightarrow 2x + 3y = 0.$$

Este aceasta o relație de echivalență?

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Relația nu este simetrică întrucît, de exemplu, $1 \sim / \sim 1$.

II.R.6. Dacă $f: G \to G'$, G fiind grup cu operația notată aditiv și este definită și în G', cu proprietatea că:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad (\forall)\ x, y \in G,$$

atunci $f(G)$, mulțimea tuturor valorilor pe care le poate lua f cînd variabila parcurge pe G, este grup.

Soluție. $f(e)$ este element neutru, iar $f(a^{-1})$ este element invers pentru $f(a)$. Asociativitatea se păstrează, ea rezultînd din asociativitatea operației în G.

II.R.7. Să se arate că grupul Hom (Q, Z) al morfismelor de la Q la Z (cu operația adunarea) are un singur element, morfismul nul.

Soluție. Să considerăm $f: Q \to Z$ un morfism de grupuri. Are loc, din definiția morfismului:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad (\forall)\ x_1, y_2 \in Q$$

și deci, în general:

$$f(x_1 + \ldots + x_n) = f(x_1) + \ldots + f(x_n), \ (\forall),\ n > 0,$$
$$(\forall) \quad x_i \in Q, \quad i = \overline{1, n}.$$

Făcînd $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$ rezultă:

$$f\underbrace{\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ ori}} = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ ori}}$$

deci $f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$.

Făcînd $x_1 = \ldots = x_n = 1$ rezultă $f(n) = nf(1)$, $n > 0$.

Cum $f\left(\frac{1}{n}\right) \in Z$ rezultă $\frac{1}{n} f(1) \in Z$, $(\forall)\ n \in N^*$ deci $f(1) = 0$ adică $f(n) = 0$, $(\forall)\ n \in N$ (deoarece din $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ rezultă $f(0) = 0$).

Scanned with OKEN Scanner

Cum însă, pentru $m, n \in N^*$:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{n}\right)}_{m \text{ ori}} = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1) = 0$$

deci $f(q) = 0$, $(\forall)\ q \in Q$, $q > 0$.

Din $0 = f(0) = f(n - n) = f(n) + f(-n)$ rezultă $f(-n) = -f(n) = -nf(1) = 0$ deci $f(n) = 0$, $(\forall)\ n \in Z$ și analog $f(q) = 0$, $(\forall)\ q \in Q$.

Ca atare, Hom $(Q, Z) = \{0\}$, 0 identificînd morfismul nul.

II.R.8. Mulțimea numerelor întregi formează inel?

Soluție. Da. Z, împreună cu adunarea este grup, înmulțirea este asociativă și este distributivă față de adunare. Acest inel este cu unitate (1).

TESTE

II.T.1. Care din următoarele relații sînt de echivalență?

a°). Relația de perpendicularitate între mulțimea dreptelor din plan;

b°). Relația de paralelism între mulțimea dreptelor din plan;

c°). Relația de inegalitate strictă în mulțimea numerelor reale;

d°). Relația de divizibilitate în Z;

e°). Relația de asemănare a triunghiurilor plane.

II.T.2. Care din relațiile de la testul precedent sînt tranzitive?

II.T.3. Fie y definit de $y^2(x) + x^2 - 4 = 0$, $x \in R$. Este y o funcție?

a°). Da; b°). Nu.

Scanned with OKEN Scanner

II.T.4. Fie $(R, +)$, $(R, -\{0\}, \cdot)$ grupurile aditiv, respectiv multiplicativ ale numerelor reale. Care din următoarele funcții:

a°). $f(x) = x$; b°). $f(x) = x^2$; c°). $f(x) = 0$; d°). $f(x) = 1$ aparțin lui Hom $[(R, +), (R - \{0\}, \cdot)]$ (adică sînt morfisme)?

II.T.5. Care din morfismele găsite mai sus sînt morfisme unitare?

II.T.6. Fie R mulțimea numerelor reale. Care din operațiile de mai jos:

a°). $x * y = x + y + 1$; b°). $x \boxed{\cdot} y = x - y$; c°). $x \perp y = x + 2y - xy$; d°). $x \top y = xy$; e°). $x \odot y = x^2y - 1$; f°). $x \oplus y = 3x - x^2 + 3y - 2y^2$

induc pe R o structură de grup (comutativ sau nu)?

II.T.7. Fie R mulțimea numerelor reale. Care din operațiile de mai jos, luate cîte două (și în ordinea descrisă) induc pe R o structură de inel?

a°). $x \boxed{\circ} y = x + y + 1$, $x \oplus y = xy$;

b°). $x \boxed{\circ} y = x - y + 1$, $x \oplus y = x - y$;

c°). $x \wedge y = x^2 - y^2$, $x \vee y = x - y$;

d°). $x \perp y = x + y$, $x \top y = x^2y^2$.

II.T.8. Fie M_4 mulțimea claselor de resturi modulo 4 și funcția $f: M_4 \times M_4 \to M_4$ definită prin $(a, b) \xrightarrow{f} a + b$, astfel:

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	p
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	p	$\hat{1}$	$\hat{2}$

Să se precizeze care din afirmațiile:

a°). $p \neq \hat{0}$; b°). $p = \hat{0}$,

este adevărată?

Scanned with OKEN Scanner

II.T.9. Fie M_5 mulțimea claselor de resturi modulo 5. Structura $(M_5, +)$ este:

a°). grup abelian; b°). grup necomutativ?

II.T.10. Fie M_5 mulțimea $M_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$. Să se calculeze:

$$\hat{a} = \hat{0} + \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4}$$

și apoi să se precizeze care din egalitățile:

a°). $\hat{a} + \hat{0} = \hat{0}$; b°). $\hat{a} + \hat{1} = \hat{1}$; c°). $\hat{a} + \hat{2} = \hat{2}$,

sînt corecte.

II.T.11. Fie M_5 mulțimea claselor de resturi modulo 5 și funcția $f : M_5 \times M_5 \to M_5$ definită prin $(a, b) \xrightarrow{f} ab$, astfel:

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{p}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{p}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Să se precizeze care din afirmațiile:

a°). $p = \hat{1}$; b°). $p = \hat{2}$; c°). $p = \hat{3}$; d°). $p = \hat{4}$

este corectă.

II.T.12. Se consideră $M = \{x \mid x^4 - 1 = 0, x \in C\}$ și funcția $f : M \times M \to M$ definită prin $f(a, b) = ab$.

Să se precizeze care din afirmațiile:

a°). $t = i$; b°). $t = -i$; c°). $t = 1$; d°). $t = -1$

Scanned with OKEN Scanner

este adevărată, unde t figurează în tabelul:

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	t	i	$-t$

care definește funcția f.

II.T.13. Fie M_4 mulțimea claselor de resturi modulo 4 și $M = \{x \mid x^4 - 1 = 0,\ x \in C\}$.

Se construiește funcția $\varphi : M_4 \to M$ astfel încît:

$$\varphi(\hat{0}) = 1;\ \varphi(\hat{1}) = i;\ \varphi(\hat{2}) = -1;\ \varphi(\hat{3}) = -i.$$

Pe M_4 se definește operația de adunare, iar pe M operația de înmulțire.

Care din afirmațiile următoare:

a°). $\varphi(\hat{2} + \hat{3}) = \varphi(\hat{2}) \cdot \varphi(\hat{3})$;

b°). $\varphi(\hat{2} \cdot \hat{3}) = \varphi(\hat{2}) \cdot \varphi(\hat{3})$

este adevărată?

II.T.14. Se consideră în mulțimea claselor de resturi modulo 4 ecuația:

$$x + \hat{2} = \hat{1}.$$

Să se precizeze dacă soluția ecuației este:

a°). $x = \hat{1}$;

b°). $x = \hat{2}$;

c°). $x = \hat{3}$.

II.T.15. Fie ecuația:

$$\hat{1} \cdot x + \hat{2} \cdot x + \hat{3} \cdot x + \hat{4} \cdot x = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

pe mulțimea claselor de resturi modulo 5. Să se precizeze dacă soluția este:

a°). $x = \hat{0}$;

b°). $x = \hat{1}$;

c°). $x = \hat{2}$;

d°). $x = \hat{3}$;

e°). $x = \hat{4}$.

II.T.16. Se consideră mulțimea claselor de resturi modulo $p \geqslant 3$ și ecuația:

$$\hat{1} \cdot x + \hat{2} \cdot x + \hat{3} \cdot x + \ldots + \widehat{(p-1)} \cdot x = \\ = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \ldots + \widehat{(p-1)}.$$

Să se precizeze dacă ecuația are:

a°). o soluție;
b°). două soluții;
c°). trei soluții;
d°). mai mult de trei soluții cînd:
1°). p este par; 2°). p este impar.

II.T.17. Se consideră un triunghi echilateral ABC cu centrul în O. Se notează cu T_i poziția acestui triunghi în urma rotirii sale în jurul lui O, într-un sens stabilit cu un unghi de $i \cdot 120°$. Se poate obține în acest fel o mulțime K de poziții ale triunghiului cînd i parcurge mulțimea N. Se definește pe mulțimea K^2 operația $\oplus$ în felul următor:

$$T_i \oplus T_j = T_{i+j}.$$

Să se precizeze dacă:

a°). $T_1 \oplus T_2 = T_1$;

b°). $T_1 \oplus T_2 = T_0$;

c°). $T_1 \oplus T_2 = T_2$.

II.T.18. Se notează cu P_i poziția unui pătrat în urma rotirii sale în jurul centrului său O, într-un sens stabilit cu un unghi de $i \cdot 90°$. Pe mulțimea acestor

Scanned with OKEN Scanner

poziții cînd i parcurge mulțimea numerelor naturale se definește operația $\oplus$ prin:

$$P_i \oplus P_j = P_{i+j}.$$

Să se precizeze dacă:

a°). $P_1 \oplus P_2 = P_2$;

b°). $P_1 \oplus P_3 = P_0$;

c°). $P_{21} \oplus P_{23} = P_0$.

II.T.19. Să se reformuleze problema pentru cazul unui poligon regulat cu $n > 4$ laturi.

Să se precizeze dacă:

a°). $P_k \oplus P_l = P_1$;

b°). $P_k \oplus P_l = P_0$.

II.T.20. Se consideră sistemul:

$$\hat{1} \cdot x_1 + \hat{2} \cdot x_2 = \hat{3}$$
$$\hat{3} \cdot x_1 + \hat{1} \cdot x_2 = \hat{4}$$

pe mulțimea claselor de resturi modulo 5. Înmulțind ecuația întîi cu 2, se obține:

$$\hat{2}x_1 + \hat{4}x_2 = \hat{1}$$
$$\hat{3}x_1 + \hat{1}x_2 = \hat{4}$$

și adunînd aceste ecuații, rezultă:

$$\hat{0} \cdot x_1 + \hat{0} \cdot x_2 = \hat{0}.$$

Să se precizeze dacă, în acest mod:

a°). se poate determina o soluție a sistemului;

b°). se pot determina mai multe soluții.

II.T.21. Se consideră sistemul:

$$\hat{1} \cdot x_1 + \hat{2} \cdot x_2 = \hat{3}$$
$$\hat{3} \cdot x_1 + \hat{1} \cdot x_2 = \hat{4}$$

pe mulțimea claselor de resturi modulo 5.

Scanned with OKEN Scanner

Să se precizeze dacă:

a°). $x_1 = \hat{1}$; $x_2 = \hat{2}$;

b°). $x_1 = \hat{2}$; $x_2 = \hat{2}$;

c°). $x_1 = \hat{2}$; $x_2 = \hat{3}$

reprezintă o soluție a sistemului.

RĂSPUNSURI

II.T.1. a°). Nu este relație de echivalență căci relația nu este tranzitivă; b°). Este o relație de echivalență (este simetrică deoarece o dreaptă este paralelă cu ea însăși); c°). Relația nu este simetrică și reflexivă; d°). Este o relație de echivalență; e°). Este o relație de echivalență.

II.T.2. b°), c°), d°), e°).

II.T.3. b°). y nu este o funcție căci lui $x = 0$ îi corespunde $y(0) = 2$ și $y'(0) = -2$ astfel ca relația să fie îndeplinită.

II.T.4. $f(x) = x$ nu este morfism căci $f(x + y) = f(x)f(y)$ implică $x + y = xy$, relație care nu este pentru orice $x, y \in R$ adevărată.

De asemenea, nici $f(x) = x^2$ nu este morfism de grupuri.

$f(x) = 0$ este morfism,

$f(x) = 1$ nu este morfism.

II.T.5. Singurul morfism găsit mai sus este f definit prin $f(x) = 0$. El nu este și unitar deoarece $f(0) = 0$ iar elementul unitate al grupului $(R, \cdot)$ este $1 \neq 0$.

II.T.6. Singura operație care definește pe R o structură de grup este cea de la punctul a°). În cazul lui b°) operația nu este asociativă. Analog, c°), e°), f°).

Scanned with OKEN Scanner

În cazul operației definită la punctul d°), elementul 0 nu are invers.

II.T.7. În cazul a°) operația $\oplus$ nu este distributivă față de operația $\boxed{\circ}$. Analog pentru d°) În cazul b°) operația nu este asociativă. Analog pentru c°).

II.T.8. a°).

II.T.9. a°).

II.T.10. Toate variantele sînt corecte și $\hat{a} = \hat{0}$.

II.T.11. d°).

II.T.12. c°).

II.T.13. a°).

II.T.14. c°).

II.T.15. a°), b°), c°), d°), e°). Ecuația se scrie $\hat{0}x = \hat{0}$.

II.T.16. Considerăm cazul în care p este număr par:

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \ldots + \widehat{(p-3)} + \widehat{(p-2)} + \widehat{(p-1)} =$$

$$= [\hat{1} + \widehat{(p-1)}] + [\hat{2} + \widehat{(p-2)}] + \ldots + \left[\frac{\hat{p}}{2}\right]_* = \left[\frac{\hat{p}}{2}\right]_*.$$

Ecuația se scrie $\frac{\hat{p}}{2} \cdot x = \frac{\hat{p}}{2}$ și este verificată pentru:

$$x = \hat{1},\ x = \hat{3}, \ldots x = \widehat{p-1}.$$

Dacă p este impar, suma:

$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \ldots + \widehat{(p-1)}$ are un număr par de termeni și rezultă că suma este egală cu $[\hat{1} + \widehat{(p-1)}] \cdot$

$$\cdot \frac{\hat{p}}{2} = \hat{0} \cdot \frac{\hat{p}}{2} = \hat{0}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația se scrie:

$$\hat{0} \cdot x = \hat{0}$$

și are p soluții, $x \in Z_p$.

II.T.17. b°).

II.T.18. b°), c°).

II.T.19. Dacă suma $k + l$ este multiplu de n, atunci b°) este adevărată.

Dacă $l + k \equiv 1 \pmod{n}$ atunci a°) este adevărată.

II.T.20. Nu se poate determina soluția.

II.T.21. Sistemul se reduce la o singură ecuație:

$$\hat{1} \cdot x_1 + \hat{2} \cdot x_2 = \hat{3},$$

deoarece ecuația a doua, înmulțită cu $\hat{2}$, conduce la aceeași ecuație.

Ecuația:

$$\hat{1} \cdot x_1 + \hat{2} \cdot x_2 = \hat{3}$$

are soluțiile:

$$(\hat{0}, \hat{4}),\ (\hat{1}, \hat{1},)\ (\hat{2}, \hat{3})\ (\hat{4}, \hat{2}).$$

Rămîne că c°) este adevărată.

PROBLEME PROPUSE

II.P.1. Pe Z^2 introducem următoarea relație binară:

$$(x, x_1)\,\mathcal{R}(y, y_1) \Leftrightarrow x + y_1 = x_1 + y.$$

Este aceasta o relație de echivalență?

II.P.2. Fie G, G' două grupuri cu operațiile notate aditiv și $f: G \to G'$ un morfism de grupuri.

Dovediți că $f(0) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

II.P.3. Fie G și G' două grupuri (cu operația notată aditiv). Dovediți că mulțimea Hom (G, G') a morfismelor de grupuri $f : G \to G'$ este grup, operația fiind determinată de operația din grupul G'.

Care este elementul unitate?

II.P.4. Să se arate că într-un grup elementul invers unui element este unic.

II.P.5. Dacă G este un grup abelian (cu operația notată multiplicativ) atunci:

$$(ab)^2 = a^2b^2.$$

Reciproca este adevărată?

II.P.6. Într-un grup G (cu operația notată multiplicativ) $a^2 = a$ implică $a = e$ (e fiind elementul neutru).

Reciproca este adevărată?

II.P.7[1]**.** Fie I o mulțime. Numim cuvînt cu elemente din I un sistem finit ordonat de elemente din I, $a_1 \dots a_n$.

Vom spune că două cuvinte cu elemente din I:

$$a = a_1 \dots a_n,$$
$$b = b_1 \dots b_m$$

sînt egale dacă $m = n$ și $a_i = b_i$, $(\forall)\ i \in \{1, \dots, n\}$.

Pe mulțimea $L(I)$ a cuvintelor cu elemente din I introducem următoarea operație algebrică multiplicativă:

dacă a și b sînt cuvinte de tipul precedent, atunci:

$$ab = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m.$$

Dovediți că $L(I)$ este semigrup multiplicativ.

II.P.8. Pe mulțimea $(Z - \{0\}) \times (Z - \{0\})$ considerăm următoarea relație binară:

$$(a, b) \approx (a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b.$$

Dovediți că această relație este de echivalență. Să se determine mulțimea factor.

Scanned with OKEN Scanner

II.P.9. Să se determine toate morfismele de semigrupuri de la N la N (cu operația de adunare).

II.P.10. Aceeași chestiune pentru morfismele de grupuri de la Z la Z (operația este adunarea).

II.P.11. Fie A și B două grupuri. Dovediți că mulțimea $A \times B$ formează grup față de operația:

$$(a, b)\,(a_1, b_1) \stackrel{\text{def}}{=} (aa_1, bb_1).$$

II.P.12. Fie $f : R \to R$ o funcție. Definim relația binară $\rho_f = (G, R, R)$ prin:

$$x \rho_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

Să se arate că ρ_f este o relație de echivalență.

II.P.13[1]**.** Fie $\mathcal{R}_1 = (G, A, B)$, $\mathcal{R}_2 = (G', B, C)$ două relații. Dovediți că:

$$(\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1)^{-1} = \mathcal{R}_1^{-1} \circ \mathcal{R}_2^{-1}.$$

II.P.14[1]**.** Fie $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ trei relații. Dacă una din relațiile $\mathcal{R}_3 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1)$, $(\mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_1$ este definită, atunci și cealaltă este definită și:

$$\mathcal{R}_3 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1) = (\mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_1.$$

II.P.15. Într-un grup multiplicativ G, să se demonstreze că au loc afirmațiile:

a°). $(a, b) \in G^2$, $ab = ab' \Rightarrow b = b'$.

b°). $(a^{-1})^{-1} = a$, $(\forall)\ a \in G$.

c°). $(a, b) \in G^2 \Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

II.P.16. Notăm cu nZ mulțimea numerelor întregi multiple de n.

Dovediți că nZ este subgrup al lui Z.

II.P.17[1]**.** Dacă H_1 și H_2 sînt subgrupuri ale grupului G atunci $H_1 \cap H_2$ este subgrup al lui G.

Scanned with OKEN Scanner

II.P.18[2]. Fie $(A, *, \circ)$ și $(B, \boxdot, \perp)$ două inele; pe produsul cartezian $A \times B$ definim următoarele operații:

$$(a, b) \oplus (a', b') = (a * a', b \boxdot b'),$$
$$(a, b) \boxtimes (a', b') = (a \circ a', b \perp b').$$

Dovediți că $(A \times B, \oplus, \boxtimes)$ este inel.
În ce caz inelul astfel construit este comutativ?

II.P.19[3]. Fie $n \in N^* - \{1\}$. Mulțimea Z este împărțită de relația de congruență modulo n în clase de echivalență. Notăm aceste clase cu $\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}$. Este clar că:

$$\hat{0} = \{\ldots, -n, 0, n, \ldots\}$$
$$\hat{1} = \{\ldots, -n+1, 1, n+1, 2n+1, \ldots\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\widehat{n-1} = \{\ldots, -1, n-1, \ldots\}.$$

Fie Z_n (sau altfel scris Z/nZ) mulțimea acestor clase. În Z_n introducem două operații $+$ și $\cdot$ definite prin:

dacă $\hat{a}, \hat{b} \in Z_n$ atunci:

$$\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b},$$
$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{ab}.$$

a°). Dovediți că $(Z_n, +)$ este grup și $(Z_n, +, \cdot)$ inel.

b°). Să se rezolve în Z_3 ecuația:

$$x^3 + x = \hat{0}.$$

c°). Să se arate că inelul $Z_2 \times Z_3$ este izomorf cu inelul Z_6, dar inelul $Z_2 \times Z_2$ nu este izomorf cu Z_4.

II.P.20[3]. Fie A un inel cu proprietatea că grupul aditiv subiacent al său este Z_n (vezi soluția problemei II.P.18). Să se arate că A este izomorf cu inelul Z_n.

Scanned with OKEN Scanner

II.P.21*. a°). Să se determine numărul structurilor de inel unitar, neizomorfe, care pot fi definite pe o mulțime cu 4 elemente.

b°). Să se determine numărul structurilor neizomorfe de inel comutativ ce pot fi definite pe o mulțime cu 4 elemente.

c°). Să se determine numărul structurilor neizomorfe de inel necomutativ ce pot fi definite pe o mulțime cu 4 elemente.

II.P.22*. Să se arate că un inel comutativ unitar $(A, +, \cdot)$ *integru* și cu un număr finit de elemente este corp.

Notă. Un inel A se numește *integru* dacă din $ab = 0$, $a, b \in A$, rezultă $a = 0$ sau $b = 0$.

INDICAȚII

II.P.3. Se are în vedere că elementele mulțimii Hom (G, G') sînt funcții.

II.P.4. Se presupune, prin absurd, că elementul invers nu este unic și se ajunge la o contradicție.

II.P.9. Se pornește de la definiția morfismului.

II.P.13[1]. Traduceți ce înseamnă:

$$x(\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1)^{-1} y.$$

II.P.14[1]. Traduceți ce înseamnă:

$$x(\mathcal{R}_3 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1))y.$$

II.P.17[1]. Verificați axiomele grupului pentru mulțimea $H_1 \cap H_2$ (mulțimea este nevidă).

II.P.19[3]. a°). Dovediți în prealabil că operațiile sînt bine definite.

Scanned with OKEN Scanner

b°). Ecuația propusă se rezolvă nu în cadrul numerelor reale (sau complexe); x este o clasă iar x^3 este socotit după operația multiplicativă definită în Z_n.

c°). Pentru a se obține că $Z_2 \times Z_3$ este izomorf cu Z_6 se construiește efectiv un izomorfism.

Pentru a se arăta că $Z_2 \times Z_2$ nu este izomorf cu Z_4 se presupune prin absurd că există un asemenea izomorfism.

II.P.20[3]**.** Se poate folosi faptul că $(\exists)\ m \in N^*$ astfel încît:

$$me = e + \ldots + e = \hat{0},$$

deoarece grupul abelian Z_n subiacent inelului A este format dintr-un număr finit de elemente, e fiind elementul unitate al inelului A.

II.P.21*. a°), b°), c°). Avem în vedere faptul că grupul aditiv subiacent unui inel cu patru elemente poate fi izomorf cu Z_4 sau $Z_2 \times Z_2$. Deci în inel există 4 elemente distincte:

$$0,\ a,\ b,\ a + b.$$

SOLUȚII

II.P.1. Relația este reflexivă. În adevăr:

$$x + x_1 = x_1 + x$$

deci $(x, x_1)\mathcal{R}(x, x_1)$.

Ea este și simetrică deoarece din $x + y_1 = y + x_1$ rezultă $y + x_1 = y_1 + x$ (aceasta înseamnă $(y, y_1)\ \mathcal{R}\ \mathcal{R}(x, x_1)$).

Fie $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ și $(c, d)\mathcal{R}(e, f)$. Aceasta înseamnă $a + d = b + c$ și $c + f = d + e$. Scăzînd aceste relații, găsim:

$$a - e = b - f$$

Scanned with OKEN Scanner

sau:

$$a + f = e + b$$

deci $(a, b)\mathcal{R}(e, f)$ ceea ce dovedește că relația este și tranzitivă deci este o relație de echivalență.

II.P.2. Are loc:

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0).$$

De aici:

$$f(0) - f(0) = f(0) \text{ sau } f(0) = 0.$$

II.P.3. Fie $f, g \in \text{Hom } (G, G')$. Atunci operația în Hom (G, G') este asociativă deoarece operația din G' este asociativă.

Elementul neutru este morfismul $f = 0$. Pentru orice $f \in \text{Hom } (G, G')$ există $-f \in \text{Hom } (G, G')$ astfel încît:

$$f - f = 0.$$

(că $-f$ este morfism este evident scriind relația $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sub forma $(-f(x)) + (-f(y)) = -f(x+y)$).

Grupul Hom (G, G') este comutativ dacă și numai dacă G' este comutativ.

II.P.4. Notăm operația grupului cu $*$ și elementul neutru cu e.

Atunci, considerînd $x \in G$ și x', x'' inversele lui x în G, avem:

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$$

deci $x' = x''$, ceea ce dovedește afirmația.

II.P.5. Dacă G este abelian atunci:

$$(ab)^2 = (ab)\ (ab) = a((ba)b) = a((ab)b) = a(a(bb)) = (aa)\ (bb) = a^2b^2.$$

Reciproc, să presupunem:

$$(ab)^2 = a^2b^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem:

$$(ab)^2 = (ab)(ab) = a(b(ab)) = a((ba)b) = (aa)(bb) = \\ = a(a(bb)) = a((ab)b).$$

De aici:

$$a((ba)b) = a((ab)b).$$

Înmulțind cu a^{-1} în stînga:

$$(ba)b = (ab)b$$

și înmulțind la dreapta cu b^{-1} rezultă:

$$ba = ab.$$

II.P.6. Din $a^2 = a$ obținem, înmulțind egalitatea cu a^{-1} (inversul lui a în G):

$$a \cdot a \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1}$$

sau, notînd elementul neutru cu e:

$$a \cdot e = e$$

adică $a = e$.

Reciproca este evidentă.

II.P.7[1]**.** Operația introdusă pe $L(I)$ este evident asociativă căci, dacă:

$$c = c_1 \dots c_p$$

este un alt cuvînt cu elemente din I atunci:

$$(ab)c = (a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m)c = (a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m)c_1 \dots c_p = \\ = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m c_1 \dots c_p$$

și:

$$a(bc) = a_1 \dots a_n(b_1 \dots b_m c_1 \dots c_p) = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m c_1 \dots c_p.$$

Elementul unitate este cuvîntul „vid" de *lungime* 0 (numim lungimea cuvîntului $a = a_1 \dots a_n$, numărul n).

II.P.8. Relația este reflexivă:

$$(a, b) \approx (a, b) \Leftrightarrow ab = ba$$

căci înmulțirea în Z este comutativă.

Scanned with OKEN Scanner

Fie:

$$(a, b) \approx (a', b').$$

Aceasta înseamnă, potrivit definiției, $ab' = ba'$ deci și $a'b = b'a$ adică $(a', b') \approx (a, b)$ ceea ce dovedește că relația $\approx$ este simetrică.

Fie $(a, b) \approx (c, d)$ și $(c, d) \approx (e, f)$. Avem $ad = bc$ și $cf = de$. Pentru a dovedi tranzitivitatea relației $\approx$ trebuie să arătăm că $af = be$. Deoarece $abcd \neq 0$, din relațiile de mai sus deducem:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ și } \frac{a}{b} = \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \text{ adică } af = be.$$

Ca atare, relația este de echivalență. Clasa unui element (a, b) este:

$$C_{(a, b)} = \left\{(c, d) \in (Z - \{0\})^2 \,\middle|\, \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\right\}.$$

II.P.9. Din definiția unui morfism:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \ (\forall)\ (x, y) \in N^2.$$

Pentru $x = y = 0$ obținem $f(0) = 0$. Pentru $x = y = 1$, $f(2) = 2f(1)$. Avem:

$$f(x_1 + \ldots + x_n) = f(x_1 + \ldots + x_{n-1}) + f(x_n) = \ldots$$
$$\ldots = f(x_1) + \ldots + f(x_n).$$

Pentru $x_1 = \ldots = x_n = 1$ găsim $f(n) = nf(1)$. Ca atare orice morfism de semigrupuri $f : N \to N$ este determinat de valoarea lui f în punctul 1. Deoarece $f(n) \in N$ pentru orice $n \in N$ rezultă, pentru $n = 1$, $f(1) \in N$ deci toate morfismele cerute sînt de forma $f(n) = cn$ cu $c \in N$.

Pentru $c = 0$ obținem morfismul nul iar pentru $c = 1$ obținem morfismul identic.

II.P.10. Analog, obținem $f(n) = cn$, $(\forall)\ n \in Z$, $(c \in Z)$.

II.P.11. Operația din $A \times B$ este asociativă. În adevăr, dacă:

$$(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci:

$$(a, b) \cdot ((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) = (a, b) \cdot (a_1a_2, b_1b_2) = \\ = (aa_1a_2, bb_1b_2)$$

(astfel, deoarece operațiile din A și B sînt asociative deci putem suprima parantezele) și:

$$((a, b) \cdot (a_1, b_1)) \cdot (a_2, b_2) = (aa_1, bb_1) \cdot (a_2, b_2) = \\ = (aa_1a_2, bb_1b_2).$$

Elementul neutru al operației din $A \times B$ este (e_1, e_2), e_1, e_2 fiind elementele neutre din A respectiv B.

În adevăr:

$$(a, b) \cdot (e_1, e_2) = (ae_1, be_2) = (a, b);$$
$$(e_1, e_2) \cdot (a, b) = (e_1a, e_2b) = (a, b).$$

Însemnînd prin a^{-1} elementul simetric al lui a în A și prin b' elementul simetric al lui b în B, elementul simetric al lui (a, b) în $A \times B$ este (a^{-1}, b'), după cum rezultă din egalitatea:

$$(a, b) \cdot (a^{-1}, b') = (aa^{-1}, bb') = (e_1, e_2).$$

și din faptul că într-un grup elementul simetric unui element a este unic. Grupul $A \times B$ este grup comutativ dacă și numai dacă atît A cît și B sînt grupuri comutative.

II.P.12. Relația ρ_f este simetrică deoarece din $x\rho_f x'$ adică $f(x) = f(x')$ rezultă $f(x') = f(x)$ (din simetria relației de egalitate) adică $x'\rho_f x$. Ea este și reflexivă căci egalitatea banală $f(x) = f(x)$ înseamnă $x\rho_f x$.

În fine, relația este și tranzitivă căci $x\rho_f x'$ și $x'\rho_f x''$ se transcrie $f(x) = f(x')$ și $f(x') = f(x'')$ și, din tranzitivitatea relației de egalitate, $f(x) = f(x'')$ adică $x\rho_f x''$ ceea ce dovedește afirmația anterioară.

II.P.13[1]**.** Avem:

$$z(\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1)^{-1}x \Leftrightarrow x(\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1)z$$

adică există $y \in B$ astfel încît:

$$x\mathcal{R}_2 y \text{ și } y\mathcal{R}_1 z$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$y\mathcal{R}_2^{-1}x,\ z\mathcal{R}_1^{-1}y$$

deci:

$$z(\mathcal{R}_1^{-1}\circ\mathcal{R}_2^{-1})x.$$

Ca atare:

$$z(\mathcal{R}_2\circ\mathcal{R}_1)^{-1}x \Leftrightarrow z(\mathcal{R}_1^{-1}\circ\mathcal{R}_2^{-1})x,$$

ceea ce dovedește afirmația din enunț.

II.P.14[1]. Avem că:

$$y(\mathcal{R}_3\circ(\mathcal{R}_2\circ\mathcal{R}_1))x,\ y((\mathcal{R}_3\circ\mathcal{R}_2)\circ\mathcal{R}_1)x$$

înseamnă același lucru, anume că există a și b astfel încît:

$$a\mathcal{R}_1x,\ b\mathcal{R}_2a,\ y\mathcal{R}_3b.$$

II.P.15. a°). Fie e elementul neutru al lui G. Din $ab = ab'$, înmulțind în stînga cu a^{-1} și folosind proprietatea de asociativitate, obținem:

$$\begin{gathered}a^{-1}(ab) = a^{-1}(ab');\\(a^{-1}a)b = (a^{-1}a)b';\\eb = eb';\\b = b'.\end{gathered}$$

b°). Din $a^{-1}a = e$ și $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = e$ rezultă $a^{-1}a = a^{-1}(a^{-1})^{-1}$ de unde, folosind proprietatea a°) de la exercițiul precedent, $a = (a^{-1})^{-1}$.

c°). Avem $(ab)(ab)^{-1} = e$ și $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$ și folosind unicitatea elementului invers:

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

II.P.16. Pentru $n = 0$ afirmația este evidentă. Fie $n \neq 0$. Adunarea este internă în nZ căci suma a doi multipli întregi de n este încă un multiplu de n. Adunarea din nZ este asociativă deoarece este indusă de adunarea din Z care are proprietatea anterioară. Elementul neutru este 0 iar orice $nk \in nZ$ admite invers (opus) pe $-nk \in nZ$, $k \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

II.P.17[1]. Fie $x, y \in H_1 \cap H_2$. Atunci $x, y \in H_1$ și $x, y \in H_2$ deci $xy \in H_1$ și $xy \in H_2$ adică $xy \in H_1 \cap H_2$.

Deoarece H_1 și H_2 sînt subgrupuri și e, elementul neutru al lui G, este element neutru pentru H_1 și H_2 (deoarece dacă, de exemplu, H_1 ar avea elementul neutru $e_1 \neq e$ atunci, considerînd egalitatea $xe_1 = x$, $x \in H_1$, în G, obținem $e_1 = e$, contrar ipotezei) rezultă $e \in H_1 \cap H_2$. În plus, operația este internă în $H_1 \cap H_2$ și este asociativă și orice $x \in H_1 \cap H_2$ are simetric în $H_1 \cap H_2$ deoarece el are simetric atît în H_1 cît și în H_2 (deoarece aceste mulțimi sînt organizate ca grupuri) și acestea sînt egale (considerînd relațiile $xx_1^{-1} = e$, $xx_2^{-1} = e$ din H_1 și H_2 în G și avînd în vedere unicitatea elementului neutru într-un grup).

II.P.18[2]. Dubletul $(A \times B, \oplus)$ este grup abelian. În adevăr, avem:

1°). Comutativitatea:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a * c, b \boxdot d) = (c * a, d \boxdot b) = \\ = (c, d) \oplus (a, b).$$

2°). Asociativitatea:

$$[(a, b) \oplus (c, d)] \oplus (e, f) = (a * c, b \boxdot d) \oplus (e, f) = \\ = [(a * c) * e, (b \boxdot d) \boxdot f] = [a * (c * e), b \boxdot (d \boxdot f)] = \\ = (a, b) \oplus (c * e, d \boxdot f) = (a, b) \oplus [(c, d) \oplus (e, f)].$$

3°). Existența elementului neutru. Fie e elementul neutru al grupului subiacent inelului A (adică grupul obținut din inelul A reținînd numai operația $*$) și e' elementul neutru al grupului subiacent inelului B. Atunci, pentru $(a, b) \in A \times B$ avem:

$$(a, b) \oplus (e, e') = (a * e, b \boxdot e') = (e * a, e' \boxdot b) = \\ = (e, e') \oplus (a, b) = (a, b).$$

4°). Existența elementelor simetrizabile. Fie $(a, b) \in A \times B$ și a' simetricul lui a în grupul $(A, *)$ respectiv b' simetricul lui b în grupul $(B, \boxdot)$. Atunci (a', b') este inversul în $A \times B$ al lui (a, b) căci, în adevăr:

$$(a, b) \oplus (a', b') = (a * a, b \boxdot b') = (e, e').$$

Scanned with OKEN Scanner

Faptul că operația $\boxed{\times}$ este asociativă și distributivă față de operația $\oplus$ se deduce imediat din proprietățile operațiilor din inelele A și B. Inelul $A \times B$ este comutativ cînd inelele A, B sînt comutative.

II.P.19³. a°). Faptul că Z_n împreună cu adunarea formează grup, se verifică plecînd de la definiția grupului. De asemenea, faptul că $(Z_n, +, \cdot)$ este inel. Mai dificil este de arătat că cele două operații sînt interne și bine definite (nu depind de reprezentanții aleși pentru fiecare clasă). Pentru a demonstra acest lucru să observăm că dacă $\hat{a}$ și $\hat{b}$ sînt două clase din Z_n, atunci $\widehat{a+b}$ este încă o clasă deoarece dacă suma $a+b$ depășește pe n, atunci $a+b$ este congurent cu un număr mai mic decît n ca fiind restul împărțirii dintre $a+b$ și n, deci $a+b$ este un reprezentant al unei clase din Z_n. Discuția este analogă pentru operația notată multiplicativ.

b°). Mulțimea Z_3 cuprinde clasele $\hat{0}$, $\hat{1}$ și $\hat{2}$. Avem:

$$\hat{0}^3 + \hat{0} = \hat{0}$$

deci clasa $\hat{0}$ verifică ecuația. Apoi:

$$\hat{1}^3 + \hat{1} = \hat{2} \neq \hat{0}$$

deci clasa $\hat{1}$ nu verifică ecuația. În fine:

$$\hat{2}^3 + \hat{2} = \widehat{10} = \hat{1} \neq \hat{0}$$

deci clasa $\hat{2}$ nu verifică ecuația. Rezultă că singura soluție este $\hat{0}$.

c°). În inelele considerate, operațiile sînt induse de cele existente în factorii produselor carteziene (vezi II.P.18). Pentru a demonstra că inelul $Z_2 \times Z_3$ este izomorf cu Z_6 considerăm funcția $f : Z_6 \to Z_2 \times Z_3$ definită prin $f(\hat{m}) = (\overline{m}, \dot{m})$ unde $\hat{m}$ este clasa lui m în Z_6, $\overline{m}$ este clasa lui m în Z_2 iar $\dot{m}$ este clasa lui m

Scanned with OKEN Scanner

în Z_3. Să arătăm că această funcție stabilește un izomorfism între Z_6 și $Z_2 \times Z_3$. În adevăr, această funcție este un morfism între structurile de grup subiacente celor două inele căci:

$$f(\widehat{m + n}) = (\overline{m + n}, \dot{m + n}) = (\bar{m}, \dot{m}) + (\bar{n}, \dot{n}) = \\ = f(\hat{m}) + f(\hat{n}).$$

Funcția este bine definită căci dacă $\hat{x} = \hat{y}$ atunci $x - y$ este multiplu de 6 deci este și multiplu de 2 și multiplu de 3 astfel $\bar{x} = \bar{y}$ și $\dot{x} = \dot{y}$. Deci $f(\hat{x}) = f(\hat{y})$ și astfel funcția este bine definită (nu există mai mulți y astfel ca pentru un singur x să avem $f(x) = y$).

Funcția f este injectivă. În adevăr, dacă $f(\hat{x}) = f(\hat{y})$ atunci $(\bar{x}, \dot{x}) = (\bar{y}, \dot{y})$ deci $\bar{x} = \bar{y}$ și $\dot{x} = \dot{y}$. De aici rezultă că $x - y$ este divizibil și prin 2 și prin 3 și cum 2 și 3 sînt numere prime între ele rezultă că $x - y$ este divizibil prin 6 deci $\hat{x} = \hat{y}$. De aici, funcția f este injectivă.

Funcția este surjectivă deoarece ea este injectivă iar Z_6 și $Z_2 \times Z_3$ au același număr de elemente.

Mai rămîne să arătăm că:

$$f(\hat{m}\hat{n}) = f(\hat{m})f(\hat{n}),$$

deoarece, evident, $f(\hat{m} + \hat{n}) = f(\hat{m}) + f(\hat{n})$.

În adevăr:

$$f(\hat{m}\hat{n}) = f(\widehat{mn}) = (\overline{mn}, \dot{mn}) = (\bar{m}\bar{n}, \dot{m}\dot{n}) = (\bar{m}, \dot{m})(\bar{n}, \dot{n})$$

de unde, cum $(\bar{m}, \dot{n}) = f(\hat{m})$, $(\bar{n}, \dot{n}) = f(\hat{n})$, rezultă:

$$f(\hat{m}\hat{n}) = f(\hat{m})f(\hat{n}).$$

Să demonstrăm că inelul $Z_2 \times Z_2$ nu este izomorf cu Z_4. Un izomorfism între cele două inele stabilește, de asemenea, un izomorfism între grupurile subiacente celor două inele. Să arătăm că acest lucru nu este posibil, de unde va rezulta afirmația enunțului.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că există un izomorfism $f : Z_4 \to Z_2 \times Z_2$ de grupuri. Fie $\hat{m}$ clasa lui m în Z_4 și $x = f(\hat{1}) = (\bar{a}, \dot{b})$. Atunci:

$$f(\hat{1}) = f(\hat{1} \cdot \hat{1}) = f(\hat{1})f(\hat{1})$$

deci:

$$(\bar{a}, \dot{b}) = (\bar{a}, \dot{b})\,(\bar{a}, \dot{b}) = (\overline{aa}, \dot{bb}),$$

de unde avem posibilitățile:

1°). $f(\hat{1}) = (\bar{1}, \dot{0})$,

2°). $f(\hat{1}) = (\bar{1}, \dot{1})$,

3°). $f(\hat{1}) = (\bar{0}, \dot{1})$,

4°). $f(\hat{1}) = (\bar{0}, \dot{0})$.

Dar și $f(\hat{0}) = (\bar{0}, \dot{0})$ deoarece dacă $f(\hat{0}) = (\bar{a}, \dot{b})$, atunci din:

$$f(\hat{0}) = f(\hat{0}) + f(\hat{0})$$

rezultă $(\bar{a}, \dot{b}) = (2\bar{a}, 2\dot{b})$ deci $\bar{a} = \bar{0}$ și $\dot{b} = \dot{0}$.

Varianta $f(\hat{1}) = (\bar{0}, \dot{0})$ nu poate fi acceptată deoarece am avea $f(\hat{2}) = f(\hat{1}) + f(\hat{1}) = (\bar{0}, \dot{0}) + (\bar{0}, \dot{0}) = (\bar{0}, \dot{0}) = f(\hat{0})$ fapt ce contrazice injectivitatea funcției f (în virtutea faptului că f este presupusă bijectivă).

Analog pentru cazurile 1°), 2°), 3°).

II.P.20[3]**.** Fie e elementul unitate al inelului A. Deoarece grupul abelian Z_n subiacent inelului A este finit, există un $m \in N^*$ astfel încît $me = \underbrace{e + e + \ldots + e}_{m \text{ ori}} = \hat{0}$.

Aceasta înseamnă că pentru orice $a \in A$ avem:

$$ma = m(e \cdot a) = (me) \cdot a = \hat{0} \cdot a = \hat{0}.$$

În particular, $m\hat{1} = \hat{0}$, adică $\hat{m} = \hat{0}$ și deci m este divizibil prin n.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă prin absurd am avea $m > n$, atunci ar rezulta că în inelul A sînt m elemente distincte:

$$0, e, 2e, \ldots, (m-1)e,$$

contrar faptului că Z_n are doar n elemente. Deci $m = n$ și astfel orice $a \in A$ se scrie sub forma qe cu $0 \leqslant q < n$ iar $ne = \hat{0}$.

Să considerăm aplicația $f: A \to Z_n$ dată de $f(qe) = \hat{q}$. Dacă $a = qe$ și $b = re$ sînt două elemente din A, atunci:

$$f(a+b) = f(qe + re) = f((q+r)e) = \widehat{q+r} = \\ = \hat{q} + \hat{r} = f(qe) + f(re) = f(a) + f(b)$$

și:

$$f(a \cdot b) = f(qe \cdot re) = f(qre \cdot e) = f(qre) = \widehat{qr} = \hat{q}\hat{r} = \\ = f(a)f(b),$$

deoarece $e \cdot e = e(e+e) = e \cdot e + e \cdot e$ și deci $e \cdot e = e$.

Astfel, f este omomorfism de inele iar faptul că e bijectiv este evident.

II.P.21*. a°). Grupul aditiv subiacent unui inel cu patru elemente poate fi izomorf cu Z_4 sau cu $Z_2 \times Z_2$.

În primul caz, inelul este izomorf cu Z_4 (vezi II.P.20).

Să presupunem că grupul aditiv subiacent inelului A este de tip $Z_2 \times Z_2$. Atunci în inelul A există elementele distincte:

$$0, a, b, a+b$$

cu $a + a = b + b = 0$. Între elementele a, b, $a+b$ nefiind nici o deosebire din punctul de vedere al proprietăților aditive, putem presupune fără a restrînge generalitatea că elementul unitate al inelului A este a.

Ca atare:

$$a \cdot a = a, \quad a \cdot b = b, \quad b \cdot a = b, \quad (a+b) \cdot a = \\ = a \cdot (a+b) = a + b.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $0x = x0 = 0$ pentru orice $x \in A$, rezultă că singurele produse cărora trebuie să li se afle valoarea sînt:

$$b \cdot b,\ b \cdot (a + b),\ (a + b) \cdot b,\ (a + b) \cdot (a + b).$$

Dacă însă $b \cdot b = y$ atunci $b \cdot (a + b) = b \cdot a + b \cdot b = b + y$ și analog $(a + b) \cdot b = b + y$ iar $(a + b)(a + b) = a + y$. Ca atare, produsul $b \cdot b$ determină valorile tuturor produselor rămase.

Sînt de studiat 4 cazuri:

1°). $b \cdot b = 0$ În acest caz tabela înmulțirii este:

$\cdot$	0	a	b	$a + b$
0	0	0	0	0
a	0	a	b	$a + b$
b	0	b	0	b
$a + b$	0	$a + b$	b	a

Obținem astfel un tip de structură de inel (înmulțirea coincide cu înmulțirea din inelul Z_4 dar adunarea nu coincide). Vom nota acest inel cu I_4.

2°). $b \cdot b = a$. În acest caz, definind aplicația:

$$f: A \to I_4$$

prin:

$$f(0) = 0,$$
$$f(a) = a,$$
$$f(b) = a + b,$$
$$f(a + b) = b,$$

obținem că f este un izomorfism de inele. Ca atare acest caz ne conduce tot la I_4.

3°). $b \cdot b = b$. În acest caz tabela înmulțirii este următoarea:

$\cdot$	0	a	b	$a + b$
0	0	0	0	0
a	0	a	b	$a + b$
b	0	b	b	0
$a + b$	0	$a + b$	0	$a + b$

Scanned with OKEN Scanner

Acest inel nu este izomorf cu I_4 (se observă că în tabela înmulțirii lui I_4 apar două locuri pe care figurează $0 : 0^2 = 0$ și $b^2 = 0$, or, în tabelul anterior numai $0^2 = 0$).

O verificare imediată arată că aplicația $f : A \to Z_2 \times Z_2$ dată de $f(0) = (\hat{0}, \hat{0}), f(a) = (\hat{1}, \hat{1}), f(b) = (\hat{0}, \hat{1}), f(a+b) = (\hat{1}, \hat{0})$ este un izomorfism de inele.

Deci A, în acest caz, este izomorf cu $Z_2 \times Z_2$.

4°). $b \cdot b = a + b$. În acest caz avem tabela pentru înmulțire:

$\cdot$	0	a	b	$a+b$
0	0	0	0	0
a	0	a	b	$a+b$
b	0	b	$a+b$	a
$a+b$	0	$a+b$	a	b

Această structură de inel nu are divizori ai lui 0 (în sensul că dacă în inelul A avem $ab = 0$ atunci sau $a = 0$ sau $b = 0$), pe cînd celelalte de mai sus au divizori ai lui 0. Obținem astfel o altă structură de inel.

În plus, se constată imediat că pentru orice $x \in A$, $x \neq 0$, există un $y \in A$ astfel încît $xy = yx = a$ (elementul unitate). De fapt, aceasta este o structură de corp, pe care o notăm F_4.

Deci pe o mulțime cu 4 elemente pot fi introduse 4 structuri de inel unitar neizomorfe: $Z_4, I_4, Z_2 \times Z_2, F_4$.

Toate sînt inele comutative.

b°). Grupul aditiv subiacent unui astfel de inel poate fi, după cum remarcam, izomorf cu Z_4 sau cu $Z_2 \times Z_2$. Distingem deci două cazuri:

i°). Dacă acest grup este izomorf cu Z_4, atunci elementele inelului pot fi scrise astfel:

$$0, \quad a, \quad 2a, \quad 3a,$$

elementul $4a$ fiind egal cu 0. Dacă definim produsul $a \cdot a$, atunci, deoarece $qa \cdot ra = qra \cdot a$, rezultă că este definită înmulțirea inelului, condițiile de comuta-

Scanned with OKEN Scanner

tivitate și asociativitate fiind îndeplinite. Deosebim în felul acesta 4 cazuri:

1°). $a \cdot a = 0$; În acest caz produsul oricăror două elemente este nul. Fie acest inel N_4.

2°). $a \cdot a = a$. În acest caz, $a \cdot x = x \cdot a = x$ pentru orice x din inel. Ca atare, elementul unitate este a, deci el este izomorf cu Z_4.

3°). $a \cdot a = 2a$. În acest caz obținem un inel pe care îl notăm A_4 a cărui tabelă de înmulțire este:

$\cdot$	0	a	$2a$	$3a$
0	0	0	0	0
a	0	$2a$	0	$2a$
$2a$	0	0	0	0
$3a$	0	$2a$	0	$2a$

4°). $a \cdot a = 3a$. În acest caz $3a \cdot x = x \cdot 3a = x$ pentru orice element x din inel după cum se poate ușor constata. Ca atare, inelul este unitar și izomorf cu Z_4.

ii°). Grupul aditiv subiacent al inelului este izomorf cu $Z_2 \times Z_2$. În acest caz elementele inelului pot fi scrise astfel:

$$0, \quad a, \quad b, \quad a + b$$

unde $a + a = b + b = 0$, $a + b = b + a$.

Din cauza ipotezei de comutativitate a înmulțirii inelului, relațiile de asociativitate:

$$x \cdot (y \cdot x) = (x \cdot y) \cdot x$$

sînt evident îndeplinite. Se poate arăta imediat că dacă sînt îndeplinite și relațiile de asociativitate:

$$a \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a) \cdot b,$$
$$(a \cdot b) \cdot b = a \cdot (b \cdot b),$$

atunci înmulțirea este asociativă.

Din cauza distributivității înmulțirii față de adunare, produsul oricăror două elemente este perfect determinat dacă definim expresiile următoarelor trei produse:

$$a \cdot a, \quad b \cdot b, \quad a \cdot b.$$

Scanned with OKEN Scanner

Distingem și aici mai multe cazuri (vom ține seamă de simetriile existente între elementele a și b):

1°). $a \cdot a = b \cdot b = 0$. Dacă notăm $a \cdot b = x$ atunci $a \cdot (a + b) = x$ și $b \cdot (a + b) = x$. Din condiția de asociativitate $b \cdot (b \cdot a) = (b \cdot b) \cdot a$ deducem că $b \cdot x = 0$. Dacă am avea $x = a$, ar rezulta din cele de mai sus că $a = a \cdot b = 0$, contradicție. De asemenea, din condiția de asociativitate $a \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a) \cdot b$ deducem că $a \cdot x = 0$. Deci, dacă am avea $x = b$, ar rezulta $b = a \cdot b = 0$, contradicție.

Apoi, dacă $x = a + b$, atunci rezultă $0 = a \cdot x = a \cdot (a + b) = a \cdot b = x$, contradicție.

Deci unica posibilitate este ca $a \cdot b = 0$. În acest caz obținem că toate produsele sînt nule. Acest inel, de fapt, este izomorf cu produsul direct $N_2 \times N_2$, N_2 fiind un inel cu două elemente astfel încît produsul oricăror două elemente ale sale este 0.

2°). $a \cdot a = 0$, $b \cdot b = a$. Dacă notăm $a \cdot b = x$ atunci din cele două condiții de asociativitate deducem că $a \cdot x = 0$ și $b \cdot x = 0$. Se poate deduce de aici, imediat, că $x \neq a, b, a + b$. Obținem deci ca unică posibilitate inelul a cărui tabelă de înmulțire este următoarea:

$\cdot$	a	b	$a + b$
a	0	0	0
b	0	a	a
$a + b$	0	a	a

Vom nota cu B_4 acest inel.

3°). $a \cdot a = 0$, $b \cdot b = b$. Dacă notăm $a \cdot b = x$, din condițiile de asociativitate deducem că $a \cdot x = 0$ și $b \cdot x = x$. Se deduce de aici, imediat, că $x \neq b, a + b$.

Rămîn deci două posibilități:

3°′). $a \cdot b = 0$. În acest caz obținem inelul al cărui tabel de înmulțire este următorul:

$\cdot$	a	b	$a + b$
a	0	0	0
b	0	b	b
$a + b$	0	b	b

Scanned with OKEN Scanner

Acest inel este izomorf cu produsul direct $Z_2 \times Z_2$, prin aplicația definită de:

$$0 \to (\hat{0}, \hat{0}),\ a \to (\hat{0}, \hat{1}),\ b \to (\hat{1}, \hat{0}),\ a + b \to (\hat{1}, \hat{1}).$$

3°″). $a \cdot b = a$. În acest caz, b este element unitate; inelul este izomorf cu inelul I_4.

4°). $a \cdot a = 0$, $b \cdot b = a + b$. Ca și mai sus, deducem că avem doar două posibilități:

4°′). $a \cdot b = 0$. În acest caz, inelul este izomorf cu produsul direct $Z_2 \times Z_2$.

4°″). $a \cdot b = a$. Acest inel este izomorf cu I_4.

5°). $a \cdot a = b \cdot b = a$. Deducem că avem doar două posibilități:

5°′). $a \cdot b = a$. Acest inel este izomorf cu $Z_2 \times Z_2$.

5°″). $a \cdot b = b$. Acest inel este izomorf cu I_4.

6°). $a \cdot a = a$, $b \cdot b = b$. Avem trei posibilități:

6°′). $a \cdot b = 0$. În acest caz, prin aplicația:

$$0 \to (\hat{0}, \hat{0}),\ a \to (\hat{0}, \hat{1}),\ b \to (\hat{1}, \hat{0}),\ a + b \to (\hat{1}, \hat{1}),$$

acest inel este izomorf cu $Z_2 \times Z_2$.

6°″). $a \cdot b = a$ care se tratează împreună cu:

6°‴). $a \cdot b = b$, inelele fiind izomorfe cu produsul direct $Z_2 \times Z_2$.

7°). $a \cdot a = a$, $b \cdot b = a + b$. În acest caz, din condițiile de asociativitate rezultă că $a \cdot b = b$. Acest inel este izomorf cu inelul F_4.

8°). $a \cdot a = b$, $b \cdot b = a + b$. Să notăm $a \cdot b = x$. Dacă am avea $x = 0$, atunci $0 = a \cdot x = a \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a) \cdot b = b \cdot b = a + b$, contradicție. Dacă am avea $x = a$, atunci $a + b = b \cdot b = (a \cdot a) \cdot b = a \cdot (a \cdot b) = a \cdot x = a \cdot a = b$, contradicție. Dacă am avea $x = b$, atunci $a + b = b \cdot b = b \cdot (b \cdot a) = (b \cdot b) \cdot a = (a + b) \cdot a = b + b = 0$, contradicție. Dacă am avea $x = a + b$, atunci $x = a + b = b \cdot b = (a \cdot a) \cdot b = a \cdot (a \cdot b) = a \cdot x = a \cdot (a + b) = b + x$, de unde $b = 0$, contradicție. Deci acest caz nu este posibil.

Așadar, pe o mulțime cu 4 elemente se pot defini 9 structuri neizomorfe de inel comutativ.

Scanned with OKEN Scanner

c°). Grupul aditiv subiacent al unui astfel de inel trebuie să fie izomorf cu $Z/2Z \times Z/2Z$, deci elementele inelului pot fi scrise astfel:

$$0,\ a,\ b,\ c$$

unde:

$$a + a = b + b = c + c = 0,\quad b + a = a + b = c.$$

Între elementele a, b, c nu există deci deosebiri din punct de vedere al proprietăților aditive.

Din cauza distributivității față de adunare, din $a \cdot b = b \cdot a$ rezultă $a \cdot c = a \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b = a \cdot a + b \cdot a = c \cdot a$ și $b \cdot c = c \cdot b$, deci inelul este comutativ. De asemenea, din $a \cdot c = c \cdot a$ sau $b \cdot c = c \cdot b$ deducem că inelul este comutativ.

Dacă am avea $a \cdot a = b$, atunci din relația de asociativitate:

$$a \cdot (a \cdot a) = (a \cdot a) \cdot a.$$

deducem $a \cdot b = b \cdot a$ și deci inelul este comutativ; de asemenea, dacă am avea $a \cdot a = c$, din aceeași relație de asociativitate deducem $a \cdot c = c \cdot a$ și deci inelul ar fi comutativ. Așadar, $a \cdot a$ poate lua doar valorile 0 și a. Prin simetrie $b \cdot b$ poate lua doar valorile 0 și b iar $c \cdot c$ poate lua doar valorile 0 și c.

Să observăm că dacă știm valorile celor patru produse:

$$a \cdot a,\ b \cdot b,\ c \cdot c,\ a \cdot b,$$

atunci știm valorile tuturor produselor $x \cdot y$ din inel. Căci, de exemplu, $b \cdot a = c \cdot c + a \cdot a + b \cdot b + a \cdot b$, $a \cdot c = a \cdot a + a \cdot b$ etc.

Distingem 4 cazuri:

1°). $a \cdot a = b \cdot b = c \cdot c = 0$. În acest caz $a \cdot b = b \cdot a$ deci inelul este comutativ.

2°). $a \cdot a = a$, $b \cdot b = c \cdot c = 0$. Să notăm $a \cdot b = x$. Atunci, din relația de asociativitate:

$$a \cdot (b \cdot a) = (a \cdot b) \cdot a$$

deducem:

$$a \cdot (b \cdot a) = x \cdot a.$$

Scanned with OKEN Scanner

Însă:

$$b \cdot a = c \cdot c + a \cdot a + b \cdot b + a \cdot b = a + x$$

deci:

$$a \cdot (a + x) = x \cdot a,$$

de unde $a + a \cdot x = x \cdot a$. Dacă $x = a$ deducem $a + a = a$, contradicție. Dacă $x = 0$, deducem $a = 0$, contradicție. Deci x poate lua doar valorile b și c.

Însă, din relația de asociativitate $(b \cdot a) \cdot a = b \cdot (a \cdot a)$ deducem $(a + x) \cdot a = a + x$ sau $x \cdot a = x$. Dacă am avea $x = b$, am deduce de aici că $a + b = b \cdot a = b$, contradicție. Rămîne deci ca singură posibilitate $x = c$. Însă atunci, din relația de asociativitate:

$$a \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a) \cdot b$$

deducem $a \cdot c = a \cdot b$ de unde $a \cdot (a + b) = a \cdot b$ sau $a = 0$, contradicție.

Deci acest caz nu este posibil.

3°). $a \cdot a = a$, $b \cdot b = b$, $c \cdot c = 0$. Să notăm $a \cdot b = x$. Atunci $b \cdot a = a + b + x$.

Din relația de asociativitate $a \cdot (b \cdot a) = (a \cdot b) \cdot a$ se deduce că $a + x + a \cdot x = x \cdot a$. Se exclude evident cazul $x = 0$.

Din relația de asociativitate $a \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a) \cdot b$ deducem că $a \cdot x = a \cdot b = x$; se exclude evident cazul $x = c$.

Rămîn deci cazurile $x = a$ și $x = b$.

Dacă $a \cdot b = a$, atunci obținem structura de inel necomutativ, pe care o vom nota cu C_4.

Dacă $a \cdot b = b$, atunci obținem o nouă structură de inel necomutativ, pe care o vom nota cu D_4. Dacă, prin absurd, $f : D_4 \to C_4$ ar fi un izomorfism, atunci ar rezulta că $f(a) = b$, $f(b) = a$. Am avea deci $b = f(a) = f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) = b \cdot a = a$, contradicție. Deci acest inel nu este izomorf cu C_4.

4°). $a \cdot a = a$, $b \cdot b = b$, $c \cdot c = c$. În acest caz deducem din:

$$c \cdot c = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$

că $c = a + a \cdot b + b \cdot a + b$ și deci $a \cdot b + b \cdot a = 0$ sau $a \cdot b = b \cdot a$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci inelul este comutativ.

Aşadar, există două structuri de inel necomutativ cu patru elemente:

C_4 care are adunarea şi înmulţirea definite astfel:

$+$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

;

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	a	0
b	0	b	b	0
c	0	c	c	0

şi D_4 care are adunarea şi înmulţirea definite astfel:

$+$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

,

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	a	b	c
c	0	0	0	0

.

II.P.22*. Fie A un inel unitar (avînd elementul unitate $1 \neq 0$) integru, cu un număr finit de elemente.

Pentru a dovedi că A este corp, va trebui să arătăm că orice element $a \in A$, $a \neq 0$, este inversabil.

Fie deci $a \in A$, $a \neq 0$; construim aplicaţia:

$$t : A \to A$$

dată de $t(x) = ax$ pentru orice $x \in A$.

Dacă $t(x) = t(y)$, atunci $ax = ay$, deci $a(x - y) = 0$ şi cum A este integru iar $a \neq 0$, rezultă $x = y$. Aşadar, t este injectivă. Deoarece A are un număr finit de elemente, t este bijectivă. Există atunci un element $b \in A$ astfel încît $t(b) = 1$. Deci $ab = 1$. Cum inelul A este comutativ, avem $ab = ba = 1$ şi deci a este inversabil.

Scanned with OKEN Scanner

ALGEBRA

III.1.0. Valoarea numerică a unei expresii care depinde de una sau mai multe mărimi ce pot fi înlocuite prin diferite numere se obține efectuînd toate operațiile indicate în expresie.

III.1.1. *Exemplu.* Expresia:

$$E(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 - 3$$

are, pentru $x = -1$, $y = 2$ valoarea:

$$E(-1, 2) = (-1)^2 - 3(-1) \cdot 2 - 4 - 3 = 0,$$

fapt scris și:

$$(x^2 - 3xy - y^2 - 3)_{x=-1,\, y=2} = 0.$$

III.2.0. Calcul prescurtat. Amintim:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$$

Dacă în locul lui a și b apar expresiile E și F se procedează analog.

III.2.1. *Exemplu.* Pentru expresiile:

$$E(x, y) = x^2 - xy, \quad F(x, y) = y^2 + xy$$

Scanned with OKEN Scanner

se arată că:

$$E^2 - F^2 = (E - F)(E + F) = (x^2 - xy - y^2 - \\ - xy)(x^2 - xy + y^2 + xy) = (x^2 - y^2 - \\ - 2xy)(x^2 + y^2).$$

Folosind calculul prescurtat se poate trece la *restrîngerea* unor expresii.

III.2.2. *Exemplu.* Expresia:

$$E = (a + b)^3 - 3(a + b)^2 b + 3(a + b)b^2 - b^3$$

se mai poate scrie:

$$E = [(a + b) - b]^3 = a^3.$$

III.3.0. Noțiunea de aplicație. În capitolul II am făcut o discuție despre relații funcționale. Reluăm acele noțiuni dîndu-le o formă concretă.

Mulțimile nevide E și F pot fi puse în corespondență într-un anumit mod dacă fiecărui element al mulțimii E îi corespunde unul sau mai multe elemente din mulțimea F. Scriem:

$$E \longrightarrow F.$$

III.3.1. *Exemplu.* Într-un garaj sînt mai multe tipuri de mașini în mai multe exemplare. Fiecare tip de mașină are fotografia sa trecută într-un catalog de mașini. Însemnînd prin C mulțimea fotografiilor din catalog și cu G mulțimea mașinilor din garaj atunci:

$$C \longrightarrow G.$$

Reluăm în cele ce urmează cîteva considerații despre:

III.4.0. Funcții. Funcție este, prin definiție, orice triplet (f, E, F) format dintr-o mulțime E numită *domeniul de definiție* sau *domeniul de existență*, o mulțime F numită *domeniu de valori (codomeniu)* și o *corespondență (relație)*, f, care asociază fiecărui element din E un element și numai unul din F.

Dacă x reprezintă un element oarecare din E, f reprezintă corespondența (relația) iar $f(x)$ elemen-

Scanned with OKEN Scanner

tul din F corespunzător lui x atunci se poate scrie:

$$x \longrightarrow f(x)$$

unde $x \in E$ și $f(x) \in F$.

$f(x)$ se numește *imaginea* lui x prin f sau *transformatul* lui x prin f sau încă *valoarea* funcției f în x.

Se mai notează:

$$f : E \longrightarrow F$$

sau încă:

$$E \xrightarrow{f} F,$$

lucruri de altfel cunoscute din capitolul II.

Dacă:

1°). $E \subseteq R$, funcția este de *variabilă (argument)* reală;

2°). $F \subseteq R$, funcția este cu valori reale.

Vom lucra în cele ce urmează, în afară de cazurile cînd se specifică expres altfel, cu funcții de variabilă reală și cu valori reale pe care le vom numi, pe scurt, *funcții reale*.

$f(E)$ reprezintă mulțimea valorilor funcției f și este clar că $f(E) \subseteq F$.

Dacă $f(E) = F$, funcția f se numește *surjectivă*.

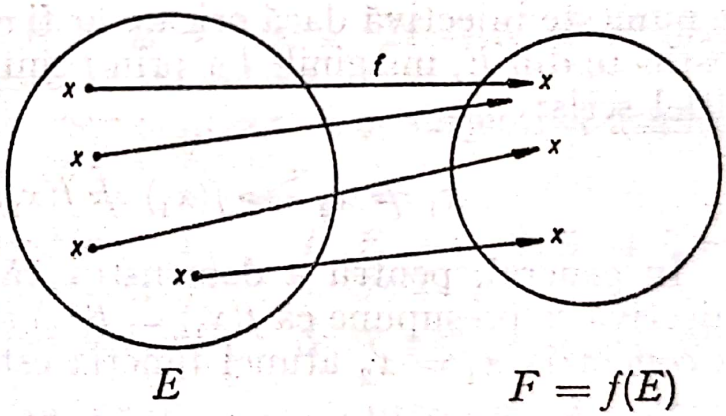


Fig. 4.0.1
Funcție surjectivă

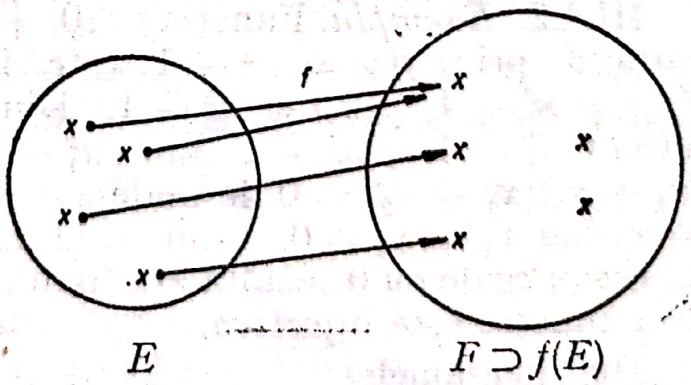


Fig. 4.0.2
Funcție nesurjectivă

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a demonstra că o funcție este surjectivă se notează cu y un element oarecare din F și se arată că oricare ar fi elementul y din F există cel puțin un element x din E astfel încît $f(x) = y$.

III.4.1. *Exemplu.* $x \mapsto 3x^2 - 1$ reprezintă o funcție definită pe $E = R$ cu valori în $F = R$.

Observăm că dacă $y = 3x^2 - 1$ atunci $x^2 = \dfrac{y+1}{3}$ și pentru ca să existe x real, trebuie ca $y + 1 \geqslant 0$ și deci $y \geqslant -1$. Ca atare, funcția $f : R \to R$ definită prin $f(x) = 3x^2 - 1$ nu este surjectivă.

Funcția $g : R \to [-1, +\infty)$ definită prin $g(x) = 3x^2 - 1$ este însă surjectivă.

Facem observația că f nu este identică respectiv cu funcția g, chiar dacă legea este aceeași: diferă codomeniile. Se poate vorbi despre egalitatea funcțiilor numai cînd și codomeniul lui f este $[-1, +\infty)$.

Unele funcții pot fi și *injective*; funcția:

$$f : E \longrightarrow F$$

se numește injectivă dacă oricare ar fi elementele x_1, x_2 distincte din E, imaginile lor prin f sînt distincte adică, altfel scris:

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

În general, pentru a demonstra că o funcție este injectivă se presupune că $f(x_1) = f(x_2)$ și dacă se ajunge la concluzia $x_1 = x_2$ atunci funcția este injectivă.

III.4.2. *Exemplu.* Funcția $f : [0, +\infty) \to [-1, +\infty)$ definită prin $f(x) = x^2 - 1$ este injectivă căci fie $f(x_1) = x_1^2 - 1$, $f(x_2) = x_2^2 - 1$. Din $f(x_1) = f(x_2)$ deducem $x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1$ sau $x_1^2 - x_2^2 = 0$ sau încă $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$ de unde $x_1 - x_2 = 0$ deci $x_1 = x_2$ sau $x_1 + x_2 = 0$. Cum x_1 și x_2 sînt numere mai mari sau egale cu 0 rezultă că, în ultimul caz, $x_1 = x_2$ deci funcția este injectivă.

Din diagramele:

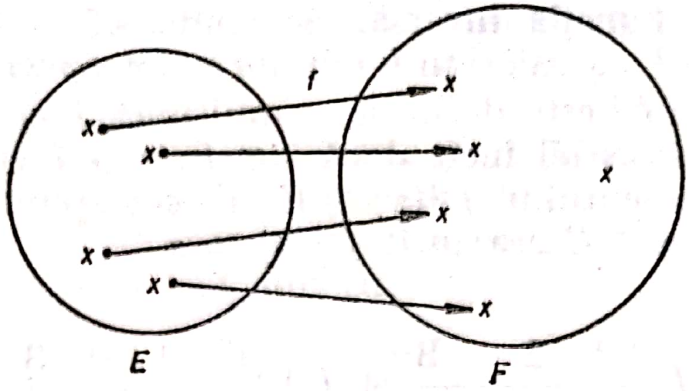


Fig. 4.2.1

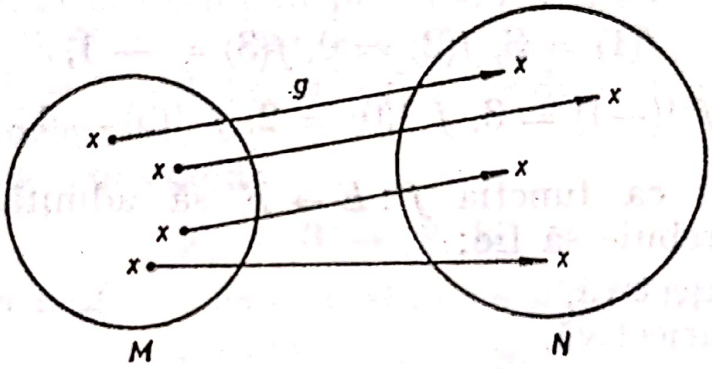


Fig. 4.2.2

rezultă că funcțiile $f : E \to F$ și $g : M - N$ sînt injective; funcția g este și surjectivă.

Dacă o funcție este și injectivă și surjectivă atunci, prin definiție, ea este *bijectivă*.

III.4.3. *Exemplu.* Fie $f : E = [-3, 5] \to F = [-10, 14]$ definită prin $f(x) = 3x - 1$.

a°). Funcția este surjectivă: dacă $y \in [-10, 14]$, din $y = 3x - 1$ rezultă $x = \dfrac{y+1}{3}$ și urmează să arătăm că există $x \in E$ astfel încît $f(x) = y$ adică $x \in [-3, 5]$.

Din $y \in [-10, 14]$ rezultă că $-10 \leqslant y \leqslant 14$ deci $-9 \leqslant y + 1 \leqslant 15$ adică $-3 \leqslant \dfrac{y+1}{3} \leqslant 5$.

b°). Funcția este injectivă: oricare ar fi $-3 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 5$, din egalitatea $f(x_1) = f(x_2)$, $3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$ rezultă $x_1 = x_2$ deci f este injectivă.

Scanned with OKEN Scanner

III.5.0. Funcția inversă. Se spune că o funcție f definită pe E cu valori în F admite drept *funcție inversă* pe f^{-1}, dacă f^{-1} este definită pe mulțimea F cu valori în mulțimea E astfel încît dacă $x \in E$, $x \mapsto f(x) = y \in F$ atunci elementului $f^{-1}(y) \in E$ îi corespunde numai elementul $x \in E$ așa încît $f^{-1}(y) = x$.

Fie:

$$f : \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{matrix}\right. \text{ și } f^{-1} : \left|\begin{matrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}\right.$$

tabelele funcțiilor f și f^{-1}. Este clar că:

$$f(1) = 3,\ f(2) = 0,\ f(3) = -1,$$

$$f^{-1}(-1) = 3,\ f^{-1}(0) = 2,\ f^{-1}(3) = 1.$$

Pentru ca funcția $f : E \to F$ să admită funcție inversă trebuie să fie:

a°). injectivă,

b°). surjectivă,

deci dacă $f : E \to F$ satisface condițiile:

a°'). $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$,

b°'). $(\forall) y \in F$, $(\exists !) x \in E$ astfel că $y = f(x)$.

În condiția b°'), x este unic în virtutea injectivității.

De reținut că au loc egalitățile:

$$f^{-1}[f(x)] = x;\ f[f^{-1}(x)] = x, \quad (\forall) x \in E.$$

III.5.1. *Observație.* Funcțiile:

$f : [-3, 5] \to [-10, 14]$ definită prin $f(x) = 3x - 1$,

$g : [2, 8] \to [1, 3]$ definită prin $g(x) = \dfrac{x+1}{3}$

nu sînt inverse una celeilalte deși, formal:

$$f[g(x)] = 3 \cdot \frac{x+1}{3} - 1 = x,\ g[f(x)] =$$

$$= \frac{(3x-1)+1}{3} = x$$

deoarece intervalele $[-3, 5]$, $[1, 3]$ nu coincid; de asemenea, aceeași observație cu privire la intervalele $[2, 8]$, $[-10, 14]$.

Dacă $f : E \to F$ este o funcție și $A \subseteq E$, atunci același mijloc de asigurare al corespondenței de la E la F fiind folosit numai pentru elementele mulțimii A duce la definirea unei noi funcții:

$$f_{|A} : A \longrightarrow F$$

numită *restricția* funcției f la mulțimea A pentru care $f(x) = f_{|A}(x)$ pentru orice $x \in A$.

Revenind la exemplul precedent, dacă se consideră $[1, 3] \subset [-3, 5]$ atunci putem vorbi de restricția funcției f, $f_r : [1, 3] \to [-10, 14]$ prin $f_r(x) = 3x - 1$. Restricția nu este surjectivă.

Dacă se consideră:

$$\varphi : [1, 3] \to [2, 8]$$

definită prin $\varphi(x) = 3x - 1$, atunci φ admite inversa φ^{-1}:

$$\varphi^{-1} : [2, 8] \to [1, 3]$$

definită prin $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{x + 1}{3}$.

III.6.0. Funcții monotone. Fie $f : E \to F$ o funcție și $x_1, x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2$.

Dacă pentru orice $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$:

a°). $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,

atunci f se numește *crescătoare*.

Dacă:

a°'). $f(x_1) < f(x_2)$,

atunci f se numește *strict crescătoare*.

Dacă pentru orice $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$:

b°). $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,

atunci f se numește *descrescătoare*.

Dacă:

b°'). $f(x_1) > f(x_2)$,

atunci f se numește *strict descrescătoare*.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă este îndeplinită una din aceste condiții, f se mai numește *monotonă* (a°), b°)) respectiv strict monotonă (a°′), b°′)).

Orice funcție monotonă este injectivă. Reciproca nu este întotdeauna adevărată. De pildă, funcția f definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ pentru } x \in [0, 3) \\ 10 - x \text{ pentru } x \in [3, 6] \end{cases}$$

este injectivă dar nu este monotonă ($f(1) < f(2)$ dar $f(4) > f(5)$).

III.7.0. Graficul unei funcții *(raportat la sistemul rectangular)*.

Se numește *graficul* funcției $f:E \to F$, mulțimea $G_f = \{(x, y) \mid x \in E, \ y \in F \text{ și } y = f(x)\}$. În cazul în care mulțimea E este finită, graficul are atîtea puncte cîte elemente are mulțimea E.

Cunoscînd graficul unei funcții se pot trage concluzii cu privire la monotonia funcției.

Graficele a două funcții, una inversă celeilalte, sînt simetrice în raport cu graficul funcției identitate $I:R \to R$ definită prin $I(x) = x$.

III.8.0. Funcție pară. Funcție impară. O funcție $f:R \to R$ se numește *pară* dacă $f(x) = f(-x)$, $(\forall)x \in R$. Mai general, dacă $f:E \to F$, $E \subseteq R$, este o funcție și dacă odată cu x mulțimea E conține și pe $-x$ (pentru orice x din E) și, în fine, $f(x) = f(-x)$ atunci funcția se numește pară.

O funcție $f:R \to R$ se numește *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in R$. Putem formula o definiție analoagă cînd f este definită pe o mulțime oarecare E cu valori într-o mulțime oarecare F.

III.9.0. Funcție periodică. O funcție $f:R \to R$ se numește *periodică* dacă există $t \in R - \{0\}$ astfel încît $f(x + t) = f(x)$ pentru orice $x \in R$. Cel mai mic număr t strict pozitiv cu proprietatea de mai sus (dacă există) se numește, în acest caz, *perioada principală* a funcției f.

Scanned with OKEN Scanner

III.9.1. *Exemplu.* Funcția $f:R \to R$ definită prin $f(x) = 1$ este periodică, orice număr real t putînd fi perioadă. Această funcție nu are însă perioadă principală cu toate că este periodică.

III.10.0. Funcție aditivă. O funcție $f:R \to F$ se numește *aditivă* dacă:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad (\forall)x, y \in R.$$

III.10.1. *Exemplu.* Funcția $f:R \to R$ definită prin $f(x) = x$ este aditivă dar funcția $f:R \to R$ definită prin $f(x) = x^2$ nu este aditivă.

III.11.0. Clasificarea funcțiilor reale.

a°). *Funcția polinom.* Numim *polinom* orice funcție $P : R \to R$ definită prin:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

care se mai poate scrie, folosind simbolul $\sum$:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$$

unde $a_i \in R$, $i \in \overline{0, n}$ și $n \in N$.

Cazuri particulare:

$n = 0$ și obținem *funcția constantă* (vezi fig. III.11.0.1),

$n = 1$ și obținem *funcția liniară* (vezi fig. III.11.0.2),

$n = 2$ și obținem *funcția parabolă* (vezi fig. III.11.0.3).

Definim *gradul unui polinom* $P:R \to R$, $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, numărul grad $P = n$ (în ipoteza că $a_0 \neq 0$). Este clar că dacă P, Q sînt polinoame astfel încît grad $P = n$, grad $Q = m$ atunci grad $(PQ) = m + n$ și grad$(P + Q) \leqslant \max\{\text{grad } P, \text{grad } Q\}$. Cînd $n = m$, este posibil ca grad $(P + Q) < n$.

Parabola:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

are vîrful $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, $\Delta = b^2 - 4ac$, și axa de simetrie $x = -\frac{b}{2a}$.

Scanned with OKEN Scanner

Funcția $f:R \to R$ definită prin $f(x) = ax^2 + bx + c$ nu este surjectivă.

Dacă $f:R \to \left[-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$ este definită prin $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu $a > 0$, atunci f este surjectivă.

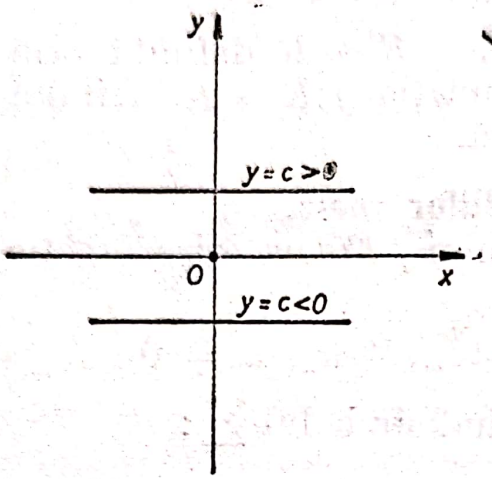


Fig. III.11.0.1

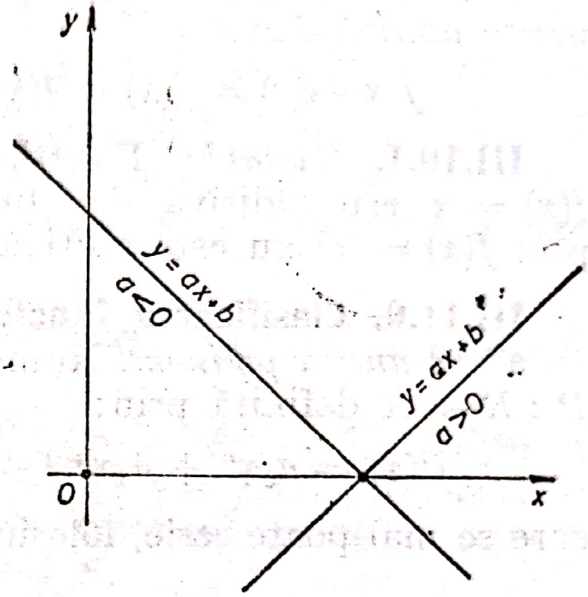


Fig. III. 11.0.2

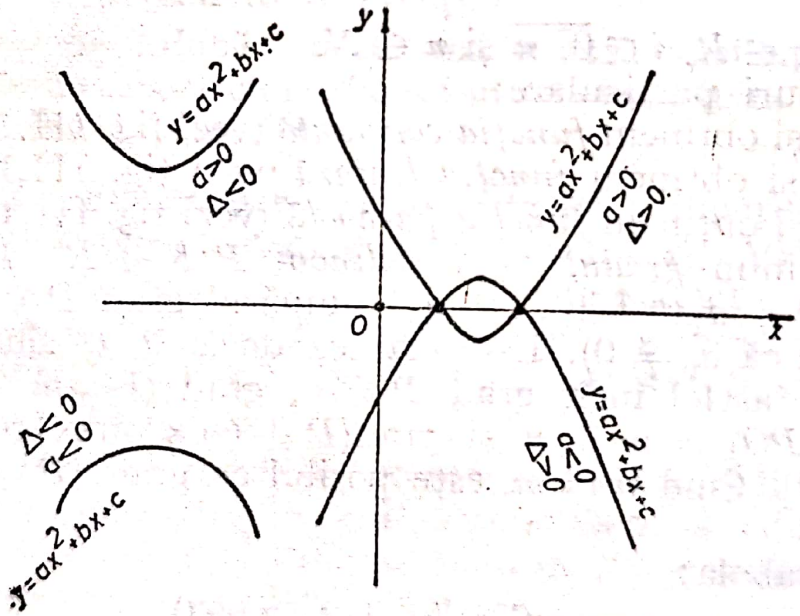


Fig. III.11.0.3

Dacă $f:R \to \left[-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$ este definită prin $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu $a < 0$, atunci f este surjectivă.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $f:\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right] \to \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ este definită prin $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu $a > 0$, atunci f este bijectivă monoton descrescătoare.

Dacă $f:\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right) \to \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ este definită prin $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu $a > 0$, atunci f este bijectivă monoton crescătoare.

Dacă $f:\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right] \to \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$ este definită prin $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu $a < 0$, atunci f este bijectivă monoton descrescătoare.

Curba de ecuație $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se poate prezenta în unul din cazurile (cînd ecuația $y = 0$ are rădăcini reale):

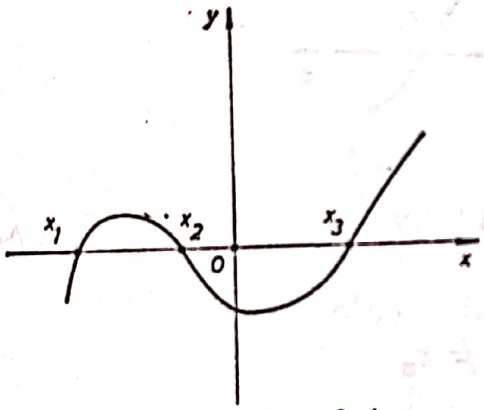


Fig. III.11.0.4

$a > 0$ și $y = 0$ are trei rădăcini reale distincte

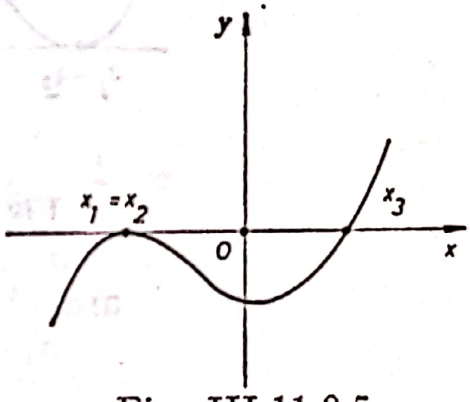


Fig. III.11.0.5

$a > 0$ și $y = 0$ are trei rădăcini reale din care două confundate

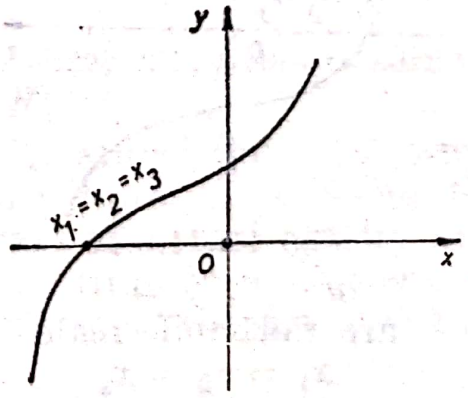


Fig. III.11.0.6

$a > 0$ și $y = 0$ are rădăcinile reale $x_1 = x_2 = x_3$ *(parabola cubică)*

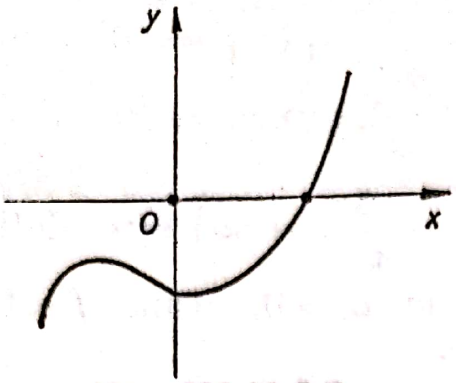


Fig. III.11.0.7
$a > 0$, $y = 0$ are o singură rădăcină reală

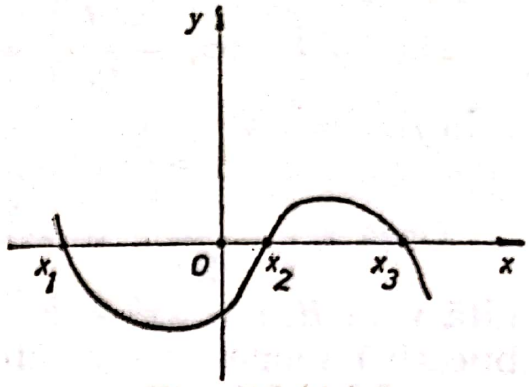


Fig. III.11.0.8
$a < 0$, $y = 0$ are trei rădăcini reale distincte

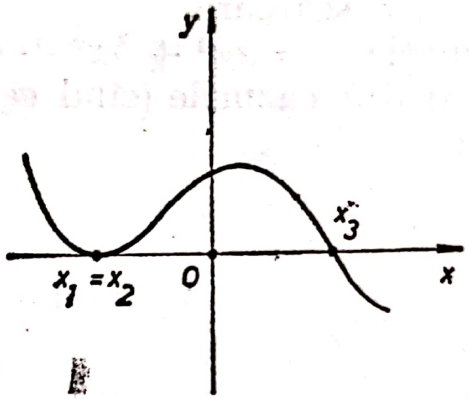


Fig. III.11.0.9
$a < 0$, $y = 0$
are rădăcinile reale
$x_1 = x_2 \neq x_3$

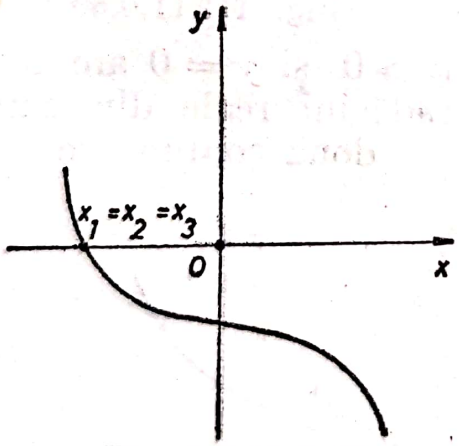


Fig. III.11.0.10
$a < 0$, $y = 0$
are rădăcinile reale
$x_1 = x_2 = x_3$

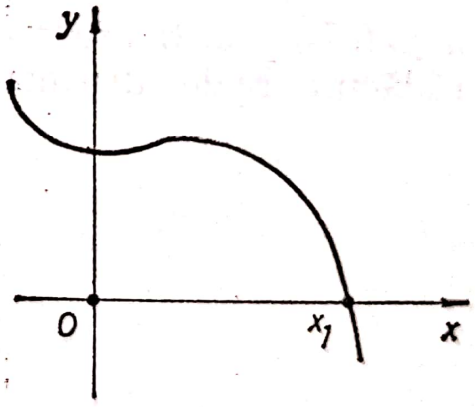


Fig. III.11.0.11
$a < 0$, $y = 0$
are numai rădăcina x_1 reală

Curba de ecuație $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ poate arăta:

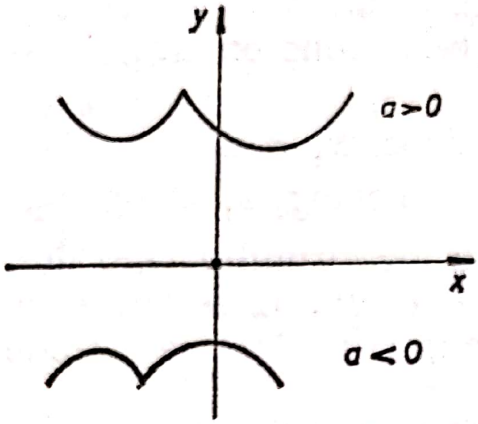


Fig. III.11.0.12
$y = 0$, nu are rădăcini reale

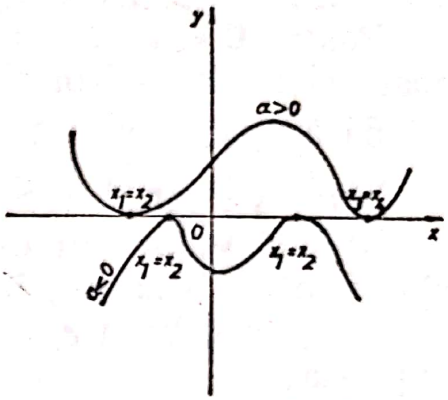


Fig. III.11.0.13
$y = 0$, are patru rădăcini reale, două cîte două egale

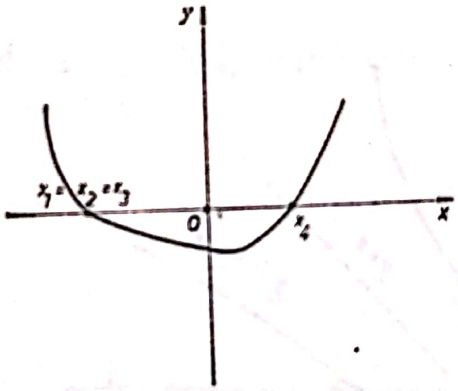


Fig. III.11.0.14
$y = 0$, are rădăcinile reale $x_1 = x_2 = x_3 \neq x_4$

etc.

b°). Funcția $f : x \mapsto \dfrac{A(x)}{B(x)}$ cu A și B polinoame se numește *funcție rațională*. În acest caz, f este definită pe $R - \{x \mid B(x) = 0 \text{ și } x \in R\}$.

Dacă B nu se anulează pe R atunci funcția f este definită pe R (desigur poate fi definită și pe submulțimi ale lui R dar ne interesează domeniul maxim de definiție în raport cu relația de incluziune, domeniu, desigur, potrivit convenției, format numai din numere reale).

Scanned with OKEN Scanner

c°). *Funcția logaritmică* este funcția $f : R_0^+ \to R$ definită prin $f(x) = \log_a x$ cu $a > 0$ și $a \neq 1$.

Pentru $a > 1$, funcția este monoton crescătoare.

Pentru $0 < a < 1$, funcția este monoton descrescătoare și au loc afirmațiile:

dacă $x_1 < x_2$ și $a > 1$ atunci $\log_a x_1 < \log_a x_2$,

dacă $x_1 > x_2$ și $0 < a < 1$ atunci $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

Numărul a se numește baza logaritmului. Mai des, sînt folosite baza 10, în care caz funcția se transcrie $f(x) = \lg x$ și baza e, e fiind numărul către care tinde expresia:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

cînd n tinde către infinit, caz în care funcția se transcrie $f(x) = \ln x$.

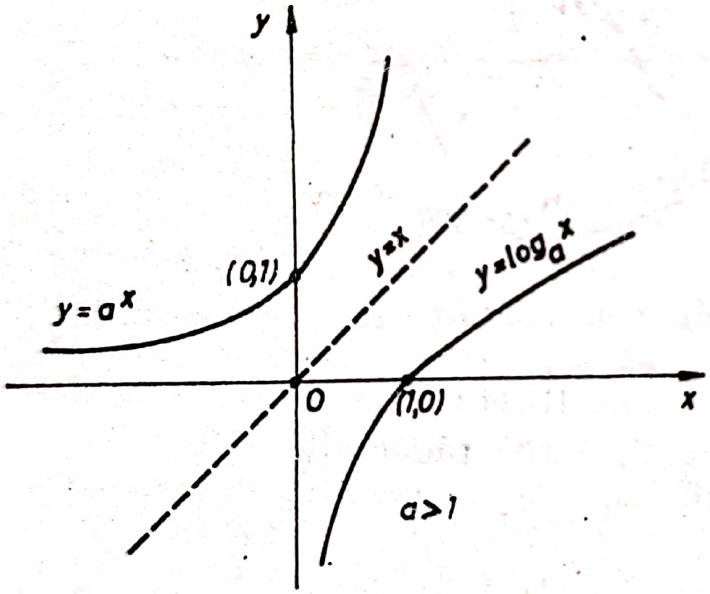


Fig. III.11.0.15

d°). *Funcția exponențială*. Este funcția $f : R \to R^+$ definită prin $f(x) = a^x$ unde $a \in R_0^+ - \{1\}$. Sînt însă cazuri în care se consideră că a ia valorile 0 respectiv 1.

Dacă $a > 1$ atunci funcția este monoton crescătoare.

Dacă $0 < a < 1$ atunci funcția este monoton descrescătoare.

Cu alte cuvinte:

dacă $x_1 < x_2$ și $a > 1$ atunci $a^{x_1} < a^{x_2}$,

dacă $x_1 > x_2$ și $0 < a < 1$ atunci $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Funcțiile logaritmică și exponențială sînt inverse una alteia și au, potrivit unei observații anterioare, graficele simetrice față de prima bisectoare.

Deci dacă $f : R_0^+ \to R$ este definită prin $f(x) = \log_a x$ și $\varphi : R \to R_0^+$ este definită prin $\varphi(x) = a^x$ atunci:

$$f(\varphi(x)) = x;\ \varphi(f(x)) = x.$$

Să observăm că orice număr real strict pozitiv A poate fi scris ca o putere a numărului a strict pozitiv:

$$A = a^{\log_a A}.$$

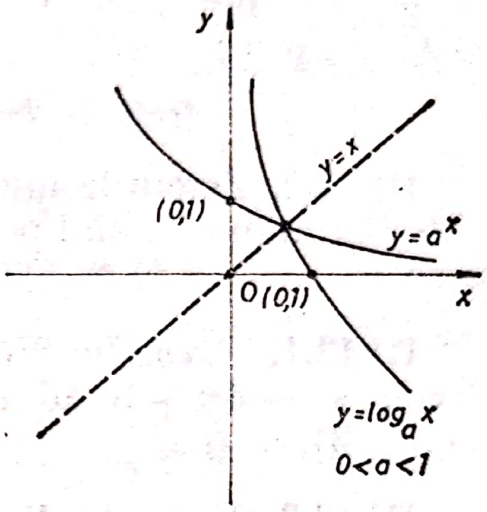


Fig. III.11.0.16

Reținem, de asemenea, următoarele formule (pentru logaritmi, $x_1,\ x_2 > 0$):

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2};\ \log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2;$$

$$a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1-x_2};\ \log_a (x_1 : x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2,$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2};\ \log_a x_1^{x_2} = x_2 \log_a x_1;\ a > 0\ a \neq 1.$$

e°). Reținem, de asemenea, *funcția semn*, „*sgn*", definită prin:

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} +1 \text{ dacă } a > 0, \\ 0 \text{ dacă } a = 0, \\ -1 \text{ dacă } a < 0. \end{cases}$$

f°). *Funcția parte întreagă*, „*înt*", notată și $[\ ]_*$, se definește ca fiind egală, într-un punct x, cu cel mai mare întreg, mai mic decît x:

$$\text{înt } x = [x]_* = \begin{cases} n \text{ dacă } x \in [n,\ n+1), \\ -n-1 \text{ dacă } x \in [-n-1,\ -n). \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă imediat că:

$$x - 1 < [x]_* < x.$$

g°). Definim *funcția parte fracționară*, *„frc"*, notată și $\{\ \}_*$, prin:

$$\text{frc } x = \{x\}_* = x - [x]_*.$$

III.12.0. Zerourile unei funcții reprezintă mulțimea valorilor argumentului pentru care funcția are valoarea zero.

III.12.1. *Exemplu.* Funcția $f:R \to R$ definită prin $f(x) = x^2 - 4x + 3$ admite ca mulțime a zerourilor pe $\{1, 3\}$.

III.12.2. *Exemplu.* Funcția $f:[2, +\infty) \to R$ definită prin $f(x) = x^2 - 5x + 4$ admite ca mulțime a zerourilor, mulțimea $\{4\}$ iar funcția $g:[5, +\infty] \to R$ definită prin $g(x) = x^2 - 5x + 4$ admite drept mulțime a zerourilor, mulțimea vidă.

Pentru a determina mulțimea zerourilor unei funcții f, se rezolvă ecuația atașată $f(x) = 0$ și se rețin valorile care aparțin domeniului de definiție.

III.12.3. *Exemplu.* Funcția $f:R \to R$ definită prin $f(x) = x^2 - 2x + 2$ nu are zerouri (pe R).

Funcția $f:R \to R$ definită prin $f(x) = 0$ are o infinitate de zerouri.

Dacă o funcție $f:E \subseteq R \to R$ nu are zerouri atunci ea se mai numește *nenulă*. Dacă există un $x \in E$ astfel încît $f(x) \neq 0$ atunci funcția se mai numește și *neidentic nulă*.

Funcțiile polinom de grad impar definite pe R admit cel puțin un zero.

III.13.0. Operații cu funcții. Fie $f:E \to R$ și $g:H \to R$ două funcții ; atunci definim:

a°). *Suma funcțiilor* f și g ca fiind funcția $h:E \cap H \to R$ definită prin:

$$h(x) = f(x) + g(x), \qquad (\forall)x \in E \cap H;$$

Scanned with OKEN Scanner

b°). *Produsul funcțiilor* f și g ca fiind funcția $t:E\cap H\to R$ definită prin:

$$t(x)=f(x)g(x),\quad (\forall)x\in E\cap H.$$

c°). Fie $u:E\to F$ și $v:F\to T$. Definim atunci funcția $j:E\to T$, notată și $v\circ u$, prin:

$$j(x)\overset{\text{def.}}{=}(v\circ u)(x)=v(u(x)),\quad (\forall)x\in E$$

numită și *compunerea* funcțiilor u și v.

III.14.0. Ecuațiile cu care lucrăm pot fi *polinominale*:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_0=0,\quad a_0\neq 0,\quad n\in N^*,$$

logaritmice:

$$\log_a f(x)=b,\quad a>0;$$

exponențiale:

$$a^{t(x)}=b,\quad a>0.$$

III.15.0. Sistemele de ecuații pot fi *liniare*:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m&=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m&=b_2\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m&=b_n
\end{aligned}$$

și *neliniare* (dacă nu sînt liniare).

Reținem, de asemenea, că un sistem de tipul de mai sus se numește *omogen* dacă $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$.

Dacă un sistem de tipul celui de mai sus are soluție unică atunci el se mai numește *compatibil determinat*; dacă el are cel puțin două soluții atunci el se numește *compatibil nedeterminat* iar dacă nu are nici o soluție, se mai numește *incompatibil (imposibil)*.

Procedeele clasice prin care se rezolvă un sistem sînt *substituția* și *reducerea* dar, într-o formă aleasă, aceste sisteme se pot rezolva folosind, de exemplu, *determinanții*, după cum vom vedea în a doua parte a lucrării.

Scanned with OKEN Scanner

III.16.0. Inecuații. Inegalități. Inecuațiile pot fi *liniare*:

$$ax \geqslant b,\ ax \leqslant b,\ a,\ b \in R,\ a \neq 0$$

și încă:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant b,$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b.$$

Există și inecuații *neliniare*, anume inecuațiile care nu sînt liniare.

Interpretarea simultană a două sau mai multe inecuații dă naștere la *sisteme de inecuații*.

Rezolvarea inecuațiilor fiind simplă, vom studia numai sistemele de inecuații. Pentru aceasta vom studia următorul:

III.16.1. *Exemplu.* Să se afle $(x, y) \in R^2$ așa încît:

$$2x - 3y + 1 \geqslant 0,$$
$$3x + 2y - 3 \geqslant 0.$$

Vom soluționa această problemă grafic. Pentru aceasta reprezentăm dreapta $2x - 3y + 1 = 0$ într-un sistem xOy, rectangular. Fie reprezentarea:

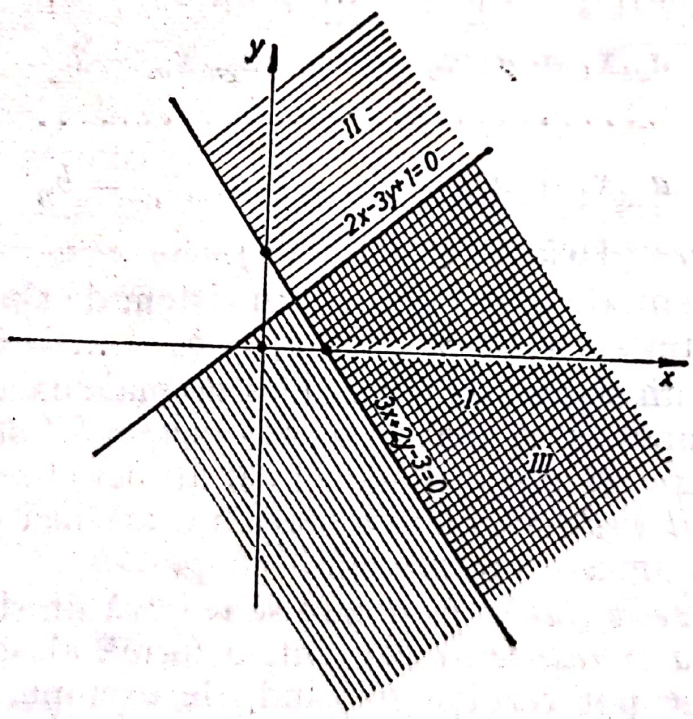


Fig. III.16.1

Punctul (0, 0) satisface inegalitatea $2x - 3y + 1 \geqslant 0$ și deci și toate punctele care aparțin regiunii din plan (din cele două determinate de dreapta $2x - 3y + 1 = 0$) căreia îi aparține punctul (0, 0). Notăm această regiune cu I. Analog, dreapta $3x + 2y - 3 = 0$ determină regiunea a II-a. Mulțimea soluțiilor sistemului de inecuații o constituie regiunea a III-a acoperită cu pătrățele (intersecția regiunii I cu II).

Sistemele de inecuații cu o singură necunoscută se rezolvă soluționînd fiecare inecuație componentă și apoi intersectînd soluțiile obținute.

Dintre inegalitățile mai importante amintim:

1°). *Inegalitatea lui Cauchy* sau a mediilor:

$$(\forall) x_i > 0,\ i \in \{1, \ldots, n\},$$

are loc:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

2°). *Inegalitatea lui Mac Laurin*:

$$(\forall) x_i > 0,\ i \in \{1, \ldots, n\},\ (\forall) k \in \{1, \ldots, n\},$$

are loc:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \left(\frac{\Sigma x_1 \ldots x_k}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

3°). *Inegalitatea generalizată a mediilor*:

$$\frac{1}{n}\sum x_1 \geqslant \left(\frac{\Sigma x_1 x_2}{C_n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \ldots \geqslant \left(\frac{\Sigma x_1 \ldots x_k}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}} \geqslant$$

$$\geqslant \ldots \geqslant (x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

în aceleași condiții ca la 2°).

4°). *Inegalitatea Cauchy — Buneakovski — Schwarz:*

$$(\forall) a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots, b_n \in R,$$

Scanned with OKEN Scanner

are loc:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

5°). *Inegalitatea lui Minkowski*:

$$(\forall) a_1, \ldots, a_n, b_1. \ldots, b_n \in R,$$

are loc:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2},$$

care sînt de altfel propuse și ca probleme spre rezolvare.

III.17.0. Combinatorică. Combinări. Aranjări. Permutări. Dezvoltarea binomului după Newton.

Definim simbolul C_n^k sau, cîteodată, $\binom{n}{k}$, ca fiind numărul submulțimilor mulțimii $\{1, \ldots, n\}$ care conțin exact k elemente.

Definim simbolul A_n^k ca fiind numărul submulțimilor ordonate (într-o ordine arbitrară) ale mulțimii $\{1, \ldots, n\}$ care conțin exact k elemente.

Numim *permutare* orice funcție bijectivă $f: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

De obicei, o permutare se mai notează și prin:

$$\begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ a_1 \ldots a_n \end{pmatrix}$$

în care a_1 reprezintă valoarea funcției f în punctul 1, ..., a_n reprezintă valoarea funcției f în punctul n.

Definim simbolul $n!$ ca fiind numărul tuturor permutărilor ce pot fi definite pe o mulțime cu n elemente.

Dezvoltarea binomului după Newton reprezintă dezvoltarea binomului $(a + b)^n$ în funcție de n și de puterile lui a și b:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \\ + \ldots C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Reținem, de asemenea, *triunghiul lui Pascal*:

1		1
1 1		1 1
1 2 1		1 2 1
1 3 3 1	sau[1]:	1 3 3 1
1 4 6 4 1		1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1		1 5 10 10 5 1
.....		.....

obținut, după cum se vede, scriind în vîrf pe 1, apoi, în următorul rînd doi de 1 care să-l încadreze pe cel scris înainte apoi, în al treilea rînd, la extreme, doi de 1 iar între cei doi de 1 din rîndul de deasupra pe 2, suma celor două numere între care cade (numerele de care sînt afectate sumele sînt în rîndul superior) etc., triunghi care dă coeficienții dezvoltării binomului după *Newton*. Așa, de pildă, $(a + b)^4$ se dezvoltă, după cum se vede (considerăm rîndul 5):

$$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4.$$

Pornind de la definiție, se constată că:

$$n! = 1 \cdot 2 \dots n,$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1).$$

III.18.0. Principiul inducției matematice. Alături de principiul reducerii la absurd, ne vom opri asupra

---

[1] I. Suma a două elemente vecine, situate pe aceeași linie, este egală cu elementul din linia imediat următoare, situat sub al doilea element din sumă: $6 + 4 = 10$. Este particularizarea relației:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

II. Suma tuturor elementelor situate într-o coloană este egală cu elementul situat în linia imediat următoare și coloana imediat următoare:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Este particularizarea relației:

$$C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \dots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}.$$

principiului inducției matematice, principiu de o excepțională însemnătate în matematică.

Fie P o propoziție matematică (care poate fi o inegalitate, o egalitate etc.) care depinde de un număr natural.

Dacă propoziția $n \mapsto P(n)$ se verifică pentru o valoare a a lui n și din presupunerea că ea se verifică pentru un $k \geqslant a$, $k \in N^*$, rezultă că ea se verifică și pentru $k+1$, atunci propoziția $n \mapsto P(n)$ se verifică pentru orice $n \geqslant a$.

III.18.1. *Exemplu.* Să demonstrăm prin inducție matematică egalitatea:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (\forall) n \in N^*.$$

Notăm cu $p(n)$ această egalitate. Pentru $n \geqslant 1$ propoziția se verifică:

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Presupunem că propoziția $p(n)$ se verifică pentru un $k \geqslant 1$ oarecare;

$$1 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Propoziția de rang $k+1$ arată:

$$1 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Adunînd la egalitatea ce exprimă propoziția $p(n)$ pentru $n = k$ termenul $k+1$ obținem:

$$1 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci propoziția este adevărată și pentru $k + 1$. În virtutea principiului inducției matematice, propoziția $p(n)$ este valabilă pentru orice $n \in N^*$.

O demonstrație mai aleasă a formulei propuse o putem obține scriind suma:

$$S = 1 + \ldots + n$$

și sub forma:

$$S = n + \ldots + 1$$

și adunăm cele două egalități; avînd în vedere că 1 face pereche, pe coloană, cu n, 2 cu $n - 1$, ..., n cu 1, obținem ținînd seama că în S sînt n termeni:

$$2S = n(n + 1)$$

de unde formula propusă.

PROBLEME REZOLVATE

III.R.1. Care aplicație poate fi considerată funcție?

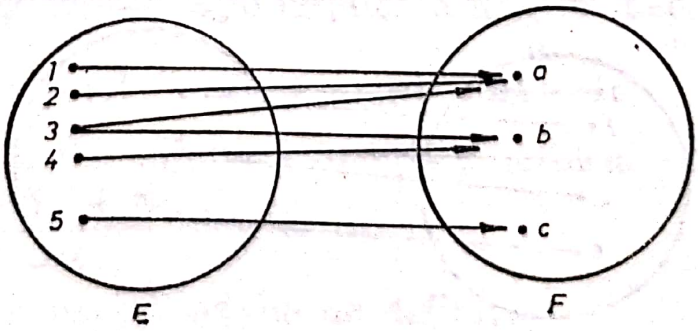


Fig. III.R.1.1

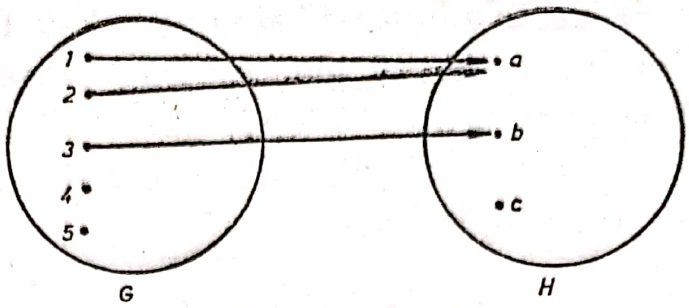


Fig. III.R.1.2

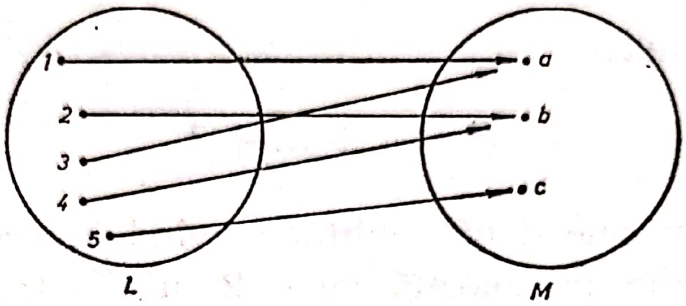


Fig. III.R.1.3

Soluție. Diagrama III.R.1.1 nu poate să reprezinte o funcție întrucît 3 are ca imagine pe a și tot 3 are ca imagine pe b și $a \neq b$.

Diagrama III.R.1.2 nu poate reprezenta o funcție întrucît există elementele 4 și 5 cărora nu li s-a precizat imaginea.

Diagrama III.R.1.3 reprezintă o funcție definită pe L cu valori pe M (este o surjecție).

III.R.2. Se consideră mulțimile $E = \{-1, 2, 3, 4, 5\}$ și $F = \{-3, 0, 1\}$.

Este posibil să se construiască o injecție $I : E \to F$? De ce?

Să se dea un exemplu de o surjecție $f : E \to F$.

Soluție. Întrucît mulțimea E are 5 elemente iar F numai 3 elemente, nu este posibilă o asemenea injecție

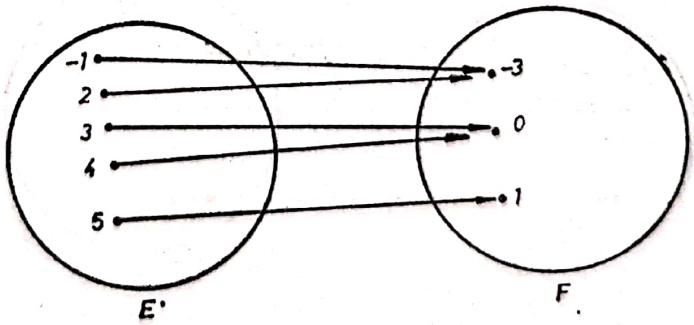


Fig. III.R.2

deoarece dacă ar exista o astfel de funcție ar trebui ca, potrivit definiției, F să aibă cel puțin 5 elemente ori F nu are atîtea.

Surjecții se pot construi. Iată un exemplu:

$$f(-1) = f(2) = -3,\ f(3) = f(4) = 0,\ f(5) = 1.$$

III.R.3. Se consideră aplicația $x \mapsto 2x - 1$.

a°). Dacă $x \in N$, mulțimea valorilor este o submulțime a lui N?

b°). Cum arată graficul de ecuație $y = 2x - 1$ cînd x parcurge mulțimea N?

Soluție. a°). Pentru $x = 0$, corespunde -1 care nu aparține lui N deci răspunsul este negativ.

Dacă se consideră restricția funcției la N^*, atunci mulțimea valorilor restricției este o submulțime a lui N^*.

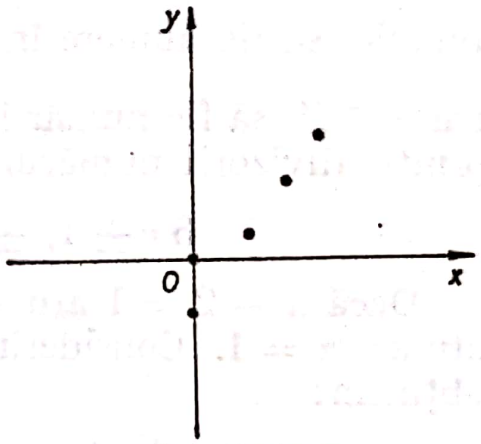


Fig. III.R.3

b°). Graficul este alcătuit dintr-o infinitate de puncte așezate coliniar (vezi fig. III.R.3).

Graficul nu poate fi confundat cu o dreaptă (nici măcar cu o semidreaptă) chiar dacă punctele graficului sînt situate pe o dreaptă, și anume dreapta de ecuație $y = 2x - 1$.

III.R.4. Se consideră $f: Z \to Z$ definită prin $f(x) = 2x - 1$. Care este restricția funcției astfel încît valorile sale să fie numere întregi negative?

Soluție. $2x - 1 \leqslant 0$ implică $x \leqslant \frac{1}{2}$ și deci restricția este $f_{|Z^-} : Z^- \to Z^-$, $f_{|Z^-}(x) = 2x - 1$.

III.R.5. Se consideră funcția f definită prin $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 8}{x - 2}$ și se cere:

a°). Domeniul maxim de definiție;

b°). Mulțimea numerelor $x \in Z$ astfel încît $f(x) \in Z$;

Scanned with OKEN Scanner

c°). Mulțimea numerelor $x \in N$ astfel încît $f(x) \in N$;
d°). Mulțimea numerelor $x \in N$ astfel încît $f(x) \in Z$;
e°). Mulțimea numerelor $x \in N^*$ astfel încît $f(x) \in N$.

Soluție. a°). Domeniul maxim de definiție este $R - \{2\}$ deoarece pentru $x = 2$ funcția f nu are sens.

b°). Expresia prin care se definește f se mai poate scrie:

$$\frac{2x^2 - 5x + 8}{x - 2} = 2x - 1 + \frac{6}{x - 2}.$$

Dacă $x \in Z$ atunci $2x - 1 \in Z$ (înmulțirea și adunarea în Z sînt operații interne). Pentru ca valorile funcției să fie numere întregi trebuie ca $\frac{6}{x-2}$, pentru $x \in Z$, să fie număr întreg adică $x - 2$ să se afle printre divizorii numărului 6. Dar:

$$6 \vdots \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6.$$

Dacă $x - 2 = 1$ atunci $x = 3$; dacă $x - 2 = -1$ atunci $x = 1$. Considerînd toate variantele posibile, obținem:

$$x \in \{-4, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 8\}.$$

c°). Pentru $x = 0$, $f(0) \notin N$.
Pentru $x = 1$, $f(1) \notin N$.
Pentru $x = 3$, $2x - 1 = 5 \in N$ și $\frac{6}{x-2} = 6 \in N$ deci $f(3) \in N$. Ținînd seama de punctul b°) se obține mulțimea $\{3, 4, 5, 8\}$.
d°). Pentru $x \in \{0, 1, 3, 4, 5, 8\}$ rezultă $f(x) \in Z$.
e°). Pentru $x \in \{3, 4, 5, 8\}$ rezultă $f(x) \in N$.

III.R.6. Se consideră funcția $f: R - \{2\} \to R$ definită prin $f(x) = 2x - 1 + \frac{6}{x-2}$. Este posibil ca f să fie surjectivă?

Soluție. Pentru a fi o surjecție trebuie ca pentru orice $y \in R$ să existe cel puțin un $x \in R - \{2\}$ astfel

Scanned with OKEN Scanner

încît $f(x) = y$. Pentru $y = 0$ ecuația se scrie $2x^2 - 5x + 8 = 0$ care nu are rădăcini reale deci f nu constituie o surjecție.

III.R.7. Să se traseze graficul aplicției f definită prin tabelul:

$$f: \begin{array}{c|cccccc} x & -1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline f(x) & 1 & 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array}.$$

Există puncte ale graficului care să aibă aceeași ordonată dar abscise diferite? Aplicția este injectivă?

Soluție. Graficul este alcătuit din punctele: $A(-1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, 5)$, $D(4, 1)$, $E(5, 3)$ și $F(6, 5)$.

Punctele A și D, B și E, C și F au aceeași ordonată dar abscise diferite. Funcția nu este injectivă.

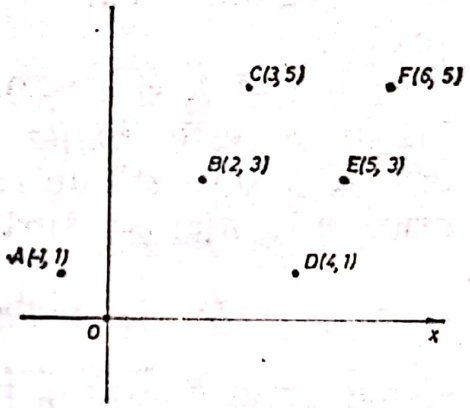


Fig. III.R.7

III.R.8. Se consideră funcția $f: [-1, 3] \to R$ definită prin $f(x) = 2x - 3$.

Să se determine mulțimea valorilor funcției (codomeniul).

Soluție. Pe intervalul de definiție, funcția f este monotonă și anume strict crescătoare. Cum $f(-1) = -5$, $f(3) = 3$ rezultă codomeniul $[-5, 3]$ (faptul că pentru orice $y \in [-5, 3]$ există $x \in [-1, 3]$ astfel încît $y = f(x)$ este evident).

Concluzia trasă, fără argumentarea din paranteze, se bazează pe *continuitatea* funcției f.

Facem, în legătură cu noțiunea de continuitate, cîteva observații.

Numim *șir* orice funcție definită pe N (sau pe N^*) cu valori în mulțimea numerelor reale. Fie $f: N \to R$ un astfel de șir. Pentru simplificarea limbajului notăm, cum se face de obicei, $a_n = f(n)$ astfel că putem sugera existența șirului prin notația $\{a_n\}_{n \in N}$ sau încă $\{a_n\}_{n \geq 0}$.

Ca exemple de șiruri putem da:

0, 1, ..., n, ... — șirul numerelor naturale,

1, 3, ..., $2n + 1$, ... — șirul numerelor naturale impare etc.

Fie $a \in R$. Numim interval real oricare din mulțimile (a, b), $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$, $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, a și b fiind numere reale, $a < b$. Numim *vecinătate* a punctului $x \in R$ orice interval de unul din tipurile de mai sus ce conțin pe x.

Fie $\{a_n\}_{n \in N}$ un șir de numere reale. Putem reprezenta termenii acestui șir pe axa reală (teoretic deoarece practic, în general, acest lucru nu este posibil dat fiind că avem de-a face, în frecvente cazuri, cu o infinitate de numere). Sînt cazuri cînd termenii unui șir se „aglomerează" în jurul unui număr, numit *limita* șirului.

Fie $a \in R$ și $\varepsilon > 0$ arbitrar, real. Spunem că numărul a este *limita* șirului $\{a_n\}_{n \in N}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un *rang* $n(\varepsilon) \in N$ astfel încît pentru orice $n \geqslant n(\varepsilon)$ să aibă loc inegalitatea:

$$| a_n - a | < \varepsilon.$$

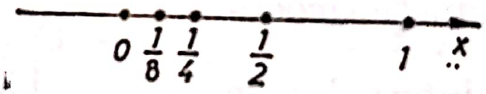


Fig. III.R.8

Pe figură (fig. III.R.8), lucrul acesta poate fi mai bine înțeles, considerînd șirul $\{a'_n\}_{n \in N^*}$ definit prin $a'_n = \dfrac{1}{n}$ și reprezentînd primii 4 termeni.

Se observă că numerele ce reprezintă termenii șirului se apropie tot mai mult de 0, că șirul *tinde* către 0.

Este aici cazul de a discuta puțin despre $+\infty$ și $-\infty$. La studiul funcțiilor am spus adesea: pentru $x = 2$ (de exemplu) funcția $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ nu are sens. Încercăm să dăm un sens funcției și în punctul $x = 2$.

Pentru $x = 2{,}1$ valoarea funcției este 10. Pentru $x = 2{,}01$ valoarea funcției este 100 etc. Cu cît valoarea lui x se apropie deci de 2, valoarea funcției crește, tinde către infinit.

Convenim să scriem:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x - 2} = +\infty,$$

sau:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x - 2} = -\infty.$$

Revenind la continuitate, o funcție $f: R \to R$ este *continuă* în punctul $x \in R$ dacă pentru orice șir x_n care tinde către x, șirul valorilor prin f ale șirului x_n tinde către $f(x)$. Ca exemplu, să considerăm funcția $f: R \to R$ definită prin $f(x) = x^2$ și $x_0 \in R$. Să arătăm că funcția f este continuă în x_0. Fie pentru aceasta un șir arbitrar care tinde către x_0, $x_n \to x_0$ (un astfel de șir există, anume șirul $\{x_n\}_{n \in N^*}$ definit prin $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$, $(\forall)$ $n \in N^*$). Atunci și $x_n^2 \to x_0^2$ deci $f(x_n) \to f(x_0)$ deci funcția f este continuă în x_0, potrivit definiției.

O funcție care este continuă în orice punct al domeniului de definiție (nu neapărat R), se numește, pe scurt, *continuă*.

Ca să ajungem la exercițiul nostru, orice funcție $f: E \to F$, continuă are *proprietatea lui Darboux* (cînd E este un interval).

Fie $m = \min_{x \in E} f(x)$, $M = \max_{x \in E} f(x)$. Atunci pentru orice $y \in [m, M]$ există un $x \in E$ astfel încît $y = f(x)$, (o altă formă a proprietății menționate).

De aceste chestiuni se ocupă însă *Analiza matematică*, disciplină ce face, alături de *Algebră*, obiectul capitolelor VIII și IX.

III.R.9. Se consideră $f: \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to R$ definită prin $f(x) = 2x - 3$. Se cere mulțimea valorilor funcției f.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Codomeniul minim este $\{-5, -3, -1, 1, 3\}$.

III.R.10. Se consideră funcțiile:

$f: [-1, 3] \to [-5, 3]$, $f(x) = 2x - 3$,

$g: \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \{-5, -3, -1, 1, 3\}$,
$g(x) = 2x - 3$.

Să se traseze graficele celor două funcții folosind același sistem rectangular.

Se poate stabili vreo legătură între:
a°). mulțimile lor de definiție?
b°). mulțimile lor de valori?

Soluție. Dacă însemnăm prin D_f, D_g domeniile de definiție și cu V_f și V_g mulțimile de valori (codomeniul) ale funcțiilor f și g se observă că:

a°). $D_g \subset D_f$;

b°). $V_g \subset V_f$.

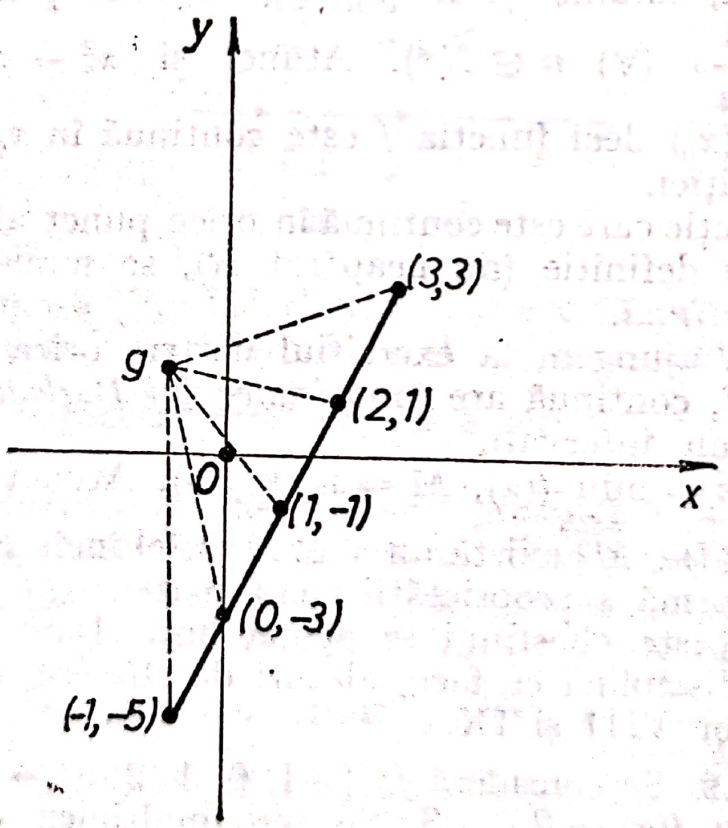


Fig. III.R.10

III.R.11. Se consideră funcția $f\colon D \to R$, unde $D = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, definită prin $f(x) = 2x - 3$.

Care este legătura între graficul funcției f și al funcției g, definită tot pe D prin $g(x) = 2x + 1$.

Soluție. Cum $2x + 1 = (2x - 3) + 4$, punctele celor două grafice au abscisele egale două cîte două iar ordonatele diferă prin 4 unități. Graficul funcției g se obține din graficul funcției f, deplasîndu-l pe acesta, paralel cu axa absciselor, cu 4 unități.

III.R.12. Fie $f\colon [-1, 3] \to R$ definită prin $f(x) = 2x - 3$ și $g\colon [-1, 3] \to R$ definită prin $g(x) = 2x+1$. Ce legătură se poate stabili între graficele acestor funcții?

Soluție. Cum $g(x) = f(x) + 4$, iar domeniul de definiție este același, graficul funcției g se poate obține deplasînd graficul funcției f cu 4 unități de-a lungul axei ordonatelor, în sensul pozitiv.

III.R.13. Fie funcția $f\colon \{-1, 2, 3, 4\} \to R$ definită prin $f(x) = x - 1$ și $g\colon \{-2, 1, 2, 3\} \to R$ definită prin $g(x) = x + 1$. Ce legătură se poate stabili între graficele acestor funcții?

Soluție. Pentru a observa mai ușor legătura între graficele celor două funcții să prezentăm funcțiile prin intermediul unor tabele:

$$f:\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(x) & -2 & 1 & 2 & 3 \end{array} \qquad g:\begin{array}{c|cccc} x & -2 & 1 & 2 & 3 \\ \hline g(x) & -1 & 2 & 3 & 4 \end{array}.$$

Graficul funcției f este alcătuit din punctele:

$$A(-1, -2),\ B(2, 1),\ C(3, 2) \text{ și } D(4, 3).$$

Graficul funcției g este alcătuit din punctele:

$$A'(-2, -1),\ B'(1, 2),\ C'(2, 3),\ D'(3, 4).$$

Punctele A și A', B și B', C și C', D și D' sînt simetrice față de dreapta $y = x$.

Funcțiile f și g sînt inverse una alteia dacă se definesc astfel:

$f\colon \{-1, 2, 3, 4\} \to \{-2, 1, 2, 3\}$ și $g\colon \{-2, 1, 3, 2\} \to \{-1, 2, 3, 4\}$. $f(x) = x - 1$, $g(x) = x + 1$.

Scanned with OKEN Scanner

III.R.14. Se consideră $f:R \to R$ definită prin $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

Să se arate că nu poate exista decît un singur punct x_1, $x_1 \neq -1$, astfel încît $f(-1) = f(x_1)$.

Soluție. Avem $f(-1) = f(x_1) = 10$ deci $2x_1^2 - 3x_1 - 5 = 0$ care are rădăcinile $x_1' = -1$ și $x_1'' = \frac{5}{2}$.

Observație. Ecuația $y = f(x)$ reprezintă parabola cu axa de simetrie $x = \frac{3}{4}$. Cum $x_1 = -1$ este la stînga lui $x = \frac{3}{4}$; $x_1 + x_2 = 2 \cdot \frac{3}{4}$ avem $x_2 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$.

III.R.15. Fie funcția $f : \left(-\infty, \frac{3}{4}\right] \to R$ definită prin $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ și punctul $x_1 = -1$.

Este posibil să existe $x_2 \neq x_1$ astfel încît $f(x_2) = f(x_1)$?

Soluție. Nu. Funcția f este monotonă pe domeniul de definiție și deci, oricare ar fi $x \neq x_1$, $f(x) \neq f(x_1)$ (fiind monotonă este și injectivă).

III.R.16. Fie f: $[0, +\infty) \to R$ definită prin $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ și $x_1 = 2$.

Este posibil să existe punctul $x_2 \neq x_1$ astfel încît $f(x_1) = f(x_2)$?

Soluție. Nu. Funcția f are ca grafic un arc de parabolă care face parte din parabola de ecuație $y = 2x^2 - 3x + 5$, axa sa de simetrie avînd ecuația $x = \frac{3}{4}$. Cum punctul x_1 este la distanța $2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ de $x = \frac{3}{4}$, punctul x_2 ar trebui să fie la distanță tot de $\frac{5}{4}$ dar

Scanned with OKEN Scanner

la stînga sa; $\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{1}{2}$ care nu face parte din intervalul $[0, +\infty)$.

Funcția f nu este monotonă pe intervalul său de definiție. Ea admite ca intervale de monotonie, intervalele $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ și $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

III.R.17. Se consideră funcțiile $f: R \to R$ definită prin $f(x) = 2x - 1$ și $g: R \to R$ definită prin $g(x) = 1-2x$.

Să se traseze graficele celor două funcții folosind același sistem cartezian rectangular. Cîte puncte sînt comune celor două grafice?

Soluție. Graficul fiecărei funcții reprezintă o dreaptă. Cele două drepte se intersectează în punctul $I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ situat pe axa absciselor.

III.R.18. Să se rezolve ecuația:

$$3^{x-1} = 9^{1-x}.$$

Soluție. Cum $9 = 3^2$, ecuația se mai poate scrie:

$$3^{x-1} = 3^{2-2x},$$

$$x - 1 = 2 - 2x,$$

și de aici $x = 1$.

Observație. În prima formă a ecuației, exponenții se anulează pentru $x = 1$ iar $3 \neq 9$. În general, dacă $a>0, b>0$, $a^{E(x)} = b^{F(x)}$, $a \neq b$ și $E(x_0) = F(x_0) = 0$, x_0 figurează printre rădăcinile ecuației $a^{E(x)} = b^{F(x)}$.

III.R.19. Să se rezolve ecuația:

$$4^{x+1} + 4^x = 320.$$

Soluție. Ecuația se scrie, succesiv:

$$4^x \cdot 4 + 4^x = 320,$$

$$5 \cdot 4^x = 320,$$

$$4^x = 64,$$

și de aici $x = 3$.

Scanned with OKEN Scanner

III.R.20. Să se rezolve ecuația:

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=8.$$

Soluție. Se observă că $\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=1.$ Notînd $\sqrt{4+\sqrt{15}}=a$ atunci $\sqrt{4-\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}=\frac{1}{a}$ și ecuația devine:

$$a^x+\frac{1}{a^x}=8$$

și dacă $a^x=y$ obținem:

$$y^2-8y+1=0$$

de unde $y_1=4-\sqrt{15}$, $y_2=4+\sqrt{15}$ deci $x_1=2$, $x_2=-2$.

III.R.21. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{\lg(x-y)-2\lg 2}{1-\lg(x+y)}=1;\quad \frac{\lg x-\lg 3}{\lg y-\lg 7}=-1.$$

Soluție. Condițiile de existență a logaritmilor sînt:

$$x-y>0,\quad x>0,\quad y>0,\quad y\neq 7,\quad x+y>0,$$

$$x+y\neq 10.$$

Sistemul se scrie:

$$\lg(x-y)+\lg(x+y)=2\lg 2+1$$

$$\lg x+\lg y=\lg 7+\lg 3$$

și se ajunge la sistemul:

$$\begin{cases} x^2-y^2=40 \\ xy=21, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

sistem care are soluțiile $x = 7, y = 3$ respectiv $x = -7$, $y = -3$.

Cum însă pentru prima soluție $x + y = 10$ iar $x + y < 0$ pentru a doua soluție rezultă că sistemul propus nu are soluție, condițiile de existență ale logaritmilor nefiind îndeplinite.

III.R.22. Să se demonstreze prin inducție matematică egalitatea:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$(\forall)\ n \in N^*.$$

Soluție. Pentru $n = 1$:

$$1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

și formula se verifică.

Presupunem că formula se verifică pentru un $k > 1$ oarecare:

$$1^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Trebuie să arătăm, în această ipoteză, că se verifică și pentru $n = k + 1$:

$$1^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Adunînd la egalitatea de ordin k numărul $(k+1)^2$ obținem, după calcule, tocmai formula de mai sus deci egalitatea propusă este valabilă pentru orice $n \geqslant 1$.

III.R.23. 1°). Pentru oricare $x \in R$ și orice $m \in Z$ să se arate că:

$$[x + m]_* = [x]_* + m.$$

Scanned with OKEN Scanner

2°). În R se definește o lege de compunere astfel:

$$a \oplus b = a + [b]_*.$$

a°). Este legea de compunere asociativă?

b°). Este legea de compunere comutativă?

Soluție. 1°). Vom considera partea fracționară a lui x, $[x]_*$. Are loc egalitatea:

$$x = [x]_* + \{x\}_*$$

sau încă:

$$[x + m]_* = [[x]_* + \{x\}_* + m]_*$$

Dar $[x]_* + m$ este un număr întreg și $\{x\}_* \in [0, 1)$ deci:

$$[[x]_* + \{x\}_* + m]_* = [x]_* + m.$$

2°). a°). Să vedem dacă:

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$$

Prima parte a egalității se mai scrie:

$$(a \oplus b) \oplus c = (a + [b]_*) \oplus c = (a + [b]_*) + [c]_* =$$

$$= a + [b]_* + [c]_*.$$

A doua parte a egalității se scrie:

$$a \oplus (b \oplus c) = a + [b \oplus c]_* = a + [b +$$

$$+ [c]]_* = a + [b]_* + [c]_*$$

deci legea este asociativă.

b°). Legea nu este comutativă deoarece, de exemplu:

$$2{,}3 \oplus 3{,}7 = 2{,}3 + [3{,}7]_* = 2{,}3 + 3 = 5{,}3,$$

$$3{,}7 \oplus 2{,}3 = 3{,}7 + [2{,}3]_* = 3{,}7 + 2 = 5{,}7.$$

Scanned with OKEN Scanner

III.T.1. Dacă $A = \{-1, 2, 3\}$ și $B = \{0, 1, 4\}$ se poate construi aplicația $A \xrightarrow{f} B$ astfel încît $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$ și 1 să fie imaginea elementului -1?

a°). Da; b°). Nu.

III.T.2. Numărul funcțiilor bijective f: $\{1, .., m\} \to \{1, ..., n\}$, $n > m$, este:

a°). m; b°). n^n; c°). 0; d°). n^m; e°). $m + n$; f°). $(n + m)^{n+m}$.

III.T.3. Fie Z_1 mulțimea numerelor întregi impare și Z mulțimea numerelor întregi.

Se poate stabili aplicația $Z \times Z_1 \to Z_1$ așa încît $(a, b) \to a + b$?

a°). Da; b°). Nu; c°). Nu este posibil un răspuns.

III.T.4. Care din aplicațiile următoare reprezintă funcții:

a°). $f : R \to R$ definită prin $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$;
b°). $g : Q \to Z$ definită prin $g(x) = x^2 - 1$;
c°). $h : Q \to Q$ definită prin $h(x) = 2u$;
d°). $p : R - Q \to R$ definită prin $p(y) = 2y^2 - y - \sqrt{|y|}$?

III.T.5. Cîte funcții f: $R \to R$ există?

a°). 10^{10}; b°). un număr infinit de funcții; c°). 100^{10}.

III.T.6. Se dau ecuațiile:

1°). $x^2 + 2x - 3 = 0$, 2°). $[x]_* - \sqrt{2} = 0$,
3°). $3^x + 1 = 10^{100}$, 4°). $5^x + 2 = 0$, 5°). $x^x + x^{-x} = 0$.

Dintre aceste ecuații au rădăcini reale:

a°). Primele trei; b°). Ecuațiile 1°), 2°), 3°); c°). Ecuațiile 1°), 2°), 3°), 5°); d°). Ecuația 1°).

Scanned with OKEN Scanner

III.T.7. Fie:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Atunci:

a°). $S_{100} = 2730100$; b°). $S_{10} = 45$; c°). $S_{11} = 506$.

III.T.8. O funcție f: $R \to R$ este bijectivă dacă și numai dacă:

a°). Este injectivă sau surjectivă; b°). Este mărginită; c°). Este monotonă; d°). Pentru orice y real există cel puțin un x real astfel încît $f(x) = y$; e°). Este periodică; f°). Ecuația $f(x) = y$ cu x, y reali are soluție unică.

III.T.9. Să se precizeze care din numerele:

$$\text{a°). } (-2)^{-\frac{1}{2}}; \quad \text{b°). } \sqrt{\pi};$$

$$\text{c°). } 0^{+2,3}; \quad \text{d°). } (\pi - 3{,}1400001)^{\sqrt{2}}$$

sînt reale.

III.T.10. Care din următoarele afirmații sînt false?

a°). Produsul a două numere impare nu este întotdeauna un număr impar;

b°). Nu este adevărat că este adevărat că o funcție care nu este periodică nu întotdeauna este pară.

RĂSPUNSURI

III.T.1. b°). **III.T.2.** c°). **III.T.3.** b°). **III.T.4.** a°). d°). În privința punctului c°) nu se poate da un răspuns precis întrucît nu se specifică semnificația lui u(u poate să fie real fără a fi rațional.) **III.T.5.** b°). **III.T.6.** d°). **III.T.7.** c°). **III.T.8.** f°). **III.T.9.** b°), c°), d°). **III.T.10.** a°), b°).

Scanned with OKEN Scanner

III.P.1. Se consideră funcția $f : R \to R$ definită prin $f(x) = |2x - 1|$.

Se cere:

a°). Mulțimea valorilor funcției;

b°). Graficul funcției.

III.P.2. Se consideră funcția $f : R \to R$ definită prin $f(x) = |2x - 1|$ și $g : R \to R$ definită prin $g(x) = |1 - 2x|$. Să se determine mulțimea valorilor celor două funcții și să se traseze graficele lor.

III.P.3. Să se traseze graficul funcției $f: R \to R$ definită prin $f(x) = -|2x - 1|$.

III.P.4. Să se traseze dreptele de ecuații $y = 2x - 3$ și $y = 3 - 2x$ și să se elimine, din fiecare, punctele care au ordonata negativă.

Ceea ce rămîne din cele două drepte reprezintă graficul funcției $f : R \to R$ definită prin $f(x) = |2x - 3|$ sau $g: R \to R$ definită prin $g(x) = |3 - 2x|$?

III.P.5. Să se determine mulțimea punctelor (x, y) din plan pentru care:

a°). $y > 2x - 3$,

b°). $y < 2x - 3$,

c°). $y \leqslant 2x - 3$,

d°). $y + 3 \geqslant 2x$.

III.P.6. Să se determine mulțimea punctelor din plan ale căror coordonate satisfac simultan inegalitățile:

$$2x - y - 3 < 0,$$

$$2x + y - 3 > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.7. Se consideră funcțiile $f\colon R \to R$ definită prin egalitatea $f(x) = 6x - 6m - 1$ și $g\colon R \to R$ definită prin $g(x) = x^2 - 2x - m$.

Să se determine parametrul m astfel ca graficele celor două funcții să aibă un singur punct comun.

III.P.8. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x^2 - y = 20$$

$$\log_y x + \log_x y = 2.$$

III.P.9. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x^{\sqrt{y}} = y$$

$$y^{\sqrt{y}} = x^4.$$

III.P.10. Să se rezolve sistemul de inecuații:

$$\sqrt{4x - 7} < x$$

$$\sqrt{x + 5} + \sqrt{5 - x} > 4.$$

III.P.11. Se consideră funcția $f\colon R \to R$ definită prin $f(x) = (m - 1)x + 2m - 2$ cu $m \in R$.

Să se arate că pentru orice $m \neq 1$, graficul lui f trece printr-un punct fix. Ce se poate spune despre graficul lui f cînd $m = 1$?

III.P.12. Ecuația $(m - 1)\,x + (m - 2)\,y + 2m - 3 = 0$ reprezintă un *fascicul de drepte* (drepte care trec prin același punct). Să se determine punctul prin care trec toate dreptele fasciculului (numit *vîrful fasciculului*).

III.P.13. Verificați dacă dreptele reprezentate prin ecuația:

$$(m + 1)x + (m + 2)y + 2m + 3 = 0$$

trec printr-un punct fix.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.14. Să se determine punctele din planul sistemului de referință ale căror coordonate satisfac următoarele condiții (nu simultan):

a°). $(2x - 3)(1 - 2x) < 0$;

b°). $\frac{2x - 3}{2x - 1} > 0$;

c°). $\frac{3 - 2x}{2x - 1} \geqslant 0$.

III.P.15. Să se determine valorile parametrului m astfel încît graficul funcției f care poate fi definită prin $f(x) = \frac{x^2 + mx - 2}{x + 2}$ să se găsească situat pe o dreaptă.

III.P.16. Se consideră $f : R \to R$ definită prin $f(x) = 2x - 1$ și $g: R - \{2\} \to F$ definită prin $g(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$ și se cere:

a°). Valorile funcțiilor pentru $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

b°). Ce restricție trebuie făcută funcției f pentru ca restricția lui f să fie egală cu g?

III.P.17. Se consideră funcția $f: E \to F$ definită prin $f(x) = 1 - x$ și $g: E' \to F$ definită prin $g(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{1 - x^2}$.

Se poate trasa graficul funcției g cunoscînd graficul lui f în cazul în care E și E' reprezintă domeniile maxime de definiție?

III.P.18. Se consideră ecuația:

$$(m^2 + 3m + 1)x - (m^2 + m - 1)y + 3m^2 + m - 5 = 0.$$

unde $m \in R$. Să se arate că printre dreptele reprezentate de această ecuație se găsesc și dreptele date prin ecuațiile:

$$x - y + 3 = 0,$$
$$x + y - 5 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.19. Să se determine valoarea lui m pentru care ecuația:

$$(m-2)x+(2m-1)y+3-m=0$$

reprezintă dreapta de ecuație $x-y-2=0$.

III.P.20. Se consideră funcția f definită prin $f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$ și se cere:

a°). Domeniul maxim de definiție;

b°). Să se traseze graficul pentru $x \in R-\{-1, 1\}$.

III.P.21. Ce legătură se poate stabili între funcțiile f și g definite prin:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

și:

$$g(x)=\begin{cases} 1-x & \text{pentru } x \leqslant 0 \\ x+1 & \text{pentru } x>0 \end{cases} ?$$

III.P.22[1]. Să se determine cardinalul mulțimii finite A astfel încît să existe bijecții $f: A \times A \to \mathcal{P}(A)$. Cîte astfel de bijecții există?

III.P.23[1]. Să se arate că dacă o funcție admite două axe de simetrie (mai exact, graficul său) verticale atunci ea este periodică.

III.P.24[1]. Dacă a, b, c sînt numere naturale consecutive atunci fracția:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}$$

este sau ireductibilă sau se poate simplifica cu 2.

III.P.25[2]. O funcție $f: M \to T$ este injectivă $\Leftrightarrow$ oricare ar fi mulțimea M' și funcțiile $g, g': M' \to M$, astfel încît $f \circ g = f \circ g'$ rezultă $g=g'$.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.26[2]. Dacă $M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} P$ sînt două funcții astfel încît $g \circ f$ este injectivă atunci f este injectivă.

III.P.27[1]. Dovediți că, respectiv, compunerea a două funcții surjective este o funcție surjectivă.

III.P.28[1]. Dovediți că, respectiv, compunerea a două funcții injective este o funcție injectivă.

III.P.29[2]. O funcție $f: M \to T$ este surjectivă $\Leftrightarrow$ pentru orice mulțime P și orice două funcții $g, g': T \to P$, cu proprietatea $g \circ f = g' \circ f$, rezultă $g = g'$.

III.P.30[3]. Se dă ecuația:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = 0, \quad a_0 a_n \neq 0,$$

cu toate rădăcinile reale și strict pozitive.

Să se demonstreze că are loc relația:

$$\frac{1}{a_0 a_n} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \geqslant C_{2n}^{n}.$$

III.P.31[1]. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1}{x} + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = -\frac{7}{3},$$

știind că $|x| < 1$.

III.P.32[1]. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[3]{2x-3} + \sqrt[3]{1-3x} + \sqrt[3]{x+2} = 0.$$

III.P.33*. Fie E_n o mulțime care conține n elemente. Să se arate că ecuația:

$$X \cup Y = E_n$$

unde $X, Y \in \mathcal{P}(E_n)$, admite 3^n soluții (X, Y).

(Journal de mathématiques élementaires, 1969)

Scanned with OKEN Scanner

III.P.34². Se dă ecuația:

$$(2k+1)x^4+(2p+1)x^3+2(m-k)x^2-(2p+$$
$$+1)x-2m-1=0$$

unde $k, p, m \in Z$.

a°). Să se arate că ecuația dată admite numai două rădăcini raționale.

b°). Notînd cu x_1, x_2 rădăcinile raționale și cu x_3, x_4 celelalte două rădăcini să se arate că $x_1+x_2+x_3-x_4 \neq 0$ oricare ar fi $m, p, k \in Z$.

III.P.35². Să se determine produsul primilor n termeni ai șirului $\{u_n\}_{n\in N^*}$ definit prin relația de recurență:

$$u_n = u_{n-1}^2 - 2,$$

cunoscînd primul termen $u_1 = a > 2$.

III.P.36². Să se găsească toate polinoamele p cu coeficienți reali care satisfac egalitatea:

$$xp(x) = (x-3)p(x+1).$$

III.P.37¹. Se consideră funcția $f: R \to R$ definită prin:

$$f(x) = (m+1)x^2+2(m-1)x+m, m \in R.$$

a°). Să se afle valorile lui m pentru care vîrfurile parabolelor definite de funcția dată se află în interiorul triunghiului OAB (exclusiv laturile) unde O, A, B au coordonatele: O (0,0), $A(1, 0)$, $B(1, 1)$.

b°). Să se deseneze graficul parabolei definită de funcția dată, în cazul cînd vîrful parabolei se află pe prima bisectoare a axelor de coordonate.

c°). Să se determine valorile lui m astfel încît ambele rădăcini ale ecuației $f(x)=0$ să fie mai mari decît $-\frac{1}{2}$.

III.P.38*. Fie p un polinom cu coeficienți reali astfel încît:

$$p(ax^2+bx+c)$$

este polinomul identic nul ($a, b, c \in R$), $x \neq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

a°). Rezultă de aici că p este polinomul identic nul?

b°). Fie $p(x) = x^5 - 1$. Să se arate că singura descompunere în factori cu coeficienți raționali a polinomului p este:

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

III.P.39[3]. Să se determine toți $y \in Z$ pentru care:

$$y^3 + 44966103616$$

este pătratul unui număr întreg.

III.P.40[2]. Demonstrați că:

$$x^{ka_1} + x^{ka_2+1} + \ldots + x^{ka_k+k-1}, \quad a_1, \ldots, a_k \in N^*, \; k \in N^*$$

este divizibil cu:

$$x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + 1.$$

III.P.41[2]. Fie $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to A$ trei funcții. Dacă două dintre funcțiile $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$ sînt surjecții și a treia injecție atunci f, g, h sînt bijecții.

III.P.42. Se consideră funcția $f: R \to R$ definită prin $f(x) = 1 + x + |x|$.

a°). Să se determine toate valorile lui x pentru care:

1°). $f(x) = 1$,

2°). $f(x) = 3$.

b°). Să se traseze graficul funcției f.

III.P.43. Să se rezolve în numere reale ecuația:

$$5^x - 5^{3-x} = 20.$$

III.P.44. Să se găsească toate soluțiile reale ale ecuației:

$$5^{2x} - 7^{2x} - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^{2x} = 0.$$

III.P.45. Cîte soluții reale are ecuația:

$$(0{,}5)^{x^2-20x+61{,}5} = \frac{16}{\sqrt{8}}?$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se găsească efectiv soluțiile reale, dacă există.

III.P.46. Să se rezolve ecuația:

$$0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{-x}.$$

III.P.47. Să se determine $x \in N$ pentru ca să aibă loc egalitatea:

$$2^{2+4+\ldots+2x} = (0{,}5)^{-30}.$$

III.P.48*. Se face următoarea ipoteză:

(1) Dacă a, b, c sînt numere întregi care satisfac relația:

$$a^4 + b^4 = c^4$$

atunci $a = 0$ sau $b = 0$.

a°). Fie $Z[x]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți întregi iar $p, q, r \in Z[x]$ trei polinoame care satisfac relația:

$$[p(x)]^4 + [q(x)]^4 = [r(x)]^4.$$

Folosind ipoteza (1) ce se poate spune despre polinoamele p, q, r?

b°). Fie $R'[x]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali care admit numai rădăcini reale iar $p, q, r \in R'[x]$ trei polinoame care satisfac relația de la punctul a°). Ce se poate spune despre polinoamele p, q, r în acest caz?

III.P.49[1]**.** Să se rezolve sistemul:

$$\begin{aligned} a^{x-y} + a^{\frac{x-y}{2}} &= a^2 + a \\ b^{x+y} + b^{\frac{x+y}{2}} &= b^4 + b^2, \end{aligned} \qquad a, b \geqslant 0.$$

III.P.50. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{aligned} 2^{2x-2y} + 2^{x-y} &= 2 \\ 2^{2x+1} + 2^{1-2y} &= 5. \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.51. Găsiți toate soluțiile reale ale sistemului:

$$2^x = 4^y$$

$$x^2 + y^2 = 5.$$

III.P.52. Să se discute sistemul:

$$\log_a x - \log_{a^2} y = m$$

$$\log_{a^2} x - \log_{a^3} y = n,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

III.P.53. Să se rezolve ecuația:

$$\lg (4{,}5 - x) = \lg 4{,}5 - \lg x.$$

III.P.54. Chestiune analoagă pentru ecuația:

$$\sqrt{x^{\log_5 \sqrt{x}}} = 5.$$

Să se rezolve în R *sistemele (discuții):*

III.P.55.

$$3^x \cdot 2^y = 576$$

$$\log_{\sqrt{2}} (y - x) = 4.$$

III.P.56. $x^{x+y} = y^{12}$, $y^{x+y} = x^3$, $x, y > 0$.

III.P.57.

$$\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2$$

$$\log_3 y + \log_9 x + \log_9 z = 2$$

$$\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2$$

cu $x, y, z > 0$.

III.P.58.

$$\lg \sqrt{x+1} = \lg (\sqrt{3x+2} + \sqrt{2x+3})$$

$$\lg (\sqrt{y+1} - \sqrt{2y+3}) = \lg \sqrt{3y+2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.59.

$$y + \lg x = 1$$
$$x^y = \frac{1}{100}.$$

III.P.60.

$$x + \log_2 y = 5$$
$$y^x = 16.$$

III.P.61.

$$\frac{\lg x^2 + 5 \lg y}{2 \lg x - \lg y^5} = 3$$
$$\frac{2}{\lg x} + \frac{5}{\lg y^4} = \frac{33}{20}.$$

III.P.62.

$$\log_x 10 + \log_y 10 = 5$$
$$4(\lg x + \lg y) = 5.$$

III.P.63.

$$x^{\lg y} = 100$$
$$xy = 1\,000.$$

III.P.64.

$$2^{\lg x} \cdot 3^{\lg y} = 12$$
$$\lg x + \lg y = 3.$$

Să se rezolve și discute ecuațiile;

III.P.65.

$$\frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = 1$$

III.P.66. $\sqrt{4x+2} + \sqrt{4x-2} = 4.$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.67. $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \sqrt[8]{a^{15}}$, $a > 0$.

III.P.68.

$$\sqrt{4x^2 - 9x + 5} + \sqrt{2x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2 - 1} + 2.$$

III.P.69. $\lg\left(\frac{1}{2} + x\right) = \lg\frac{1}{2} - \lg x$.

III.P.70. $\lg(x - 9) - 2 + 2\lg\sqrt{2x - 1} = 0$.

III.P.71. $2\lg\sqrt{x - 9} - 2 + \lg(2x - 1) = 0$.

III.P.72. $\log_5(x^2 - 3x + 15) = 2$.

III.P.73. $3\sqrt{\lg x} + \lg x - 4 = 0$.

III.P.74. $\sqrt[x]{0{,}125} = 3^{2-\log_3 18}$, $x \geqslant 4$.

III.P.75. $\log_2[1 + \log_3(1 + \log_2 x)] = 1$.

III.P.76. $\log_2(x + 1) - \log_4(3x - 5) = 1$.

III.P.77.

$$\sqrt{1 - \lg(x - 1)} + \sqrt[3]{7 + \lg(2x - 22)} = 2.$$

III.P.78. $\lg(x - 1) - 1 = \lg 2 - \lg x$.

III.P.79. $\frac{1 - \lg(x - 1)}{1 + \lg(x + 1)} = 1$.

III.P.80. $\frac{1 - \lg(x - 1)}{1 + \lg(x + 1)} = \frac{1 - \lg(x + 1)}{1 + \lg(x - 1)}$.

III.P.81. $\frac{1 + \lg(x^2 - 1)}{1 - \lg(x^2 - 1)} = \frac{1 - \lg(x^2 - 1)}{1 + \lg(x^2 - 1)}$.

III.P.82. $\sqrt{1 + \sqrt{1 - \log_8(x^2 - 1)}} = 1$.

III.P.83.

$$\sqrt[n]{1 + \sqrt{1 - \log_8(x^2 - 1)}} = 1, \quad n \in N^* - \{1\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.84.

$$\log_{a_n}\log_{a_{n-1}}\dots\log_{a_2}\log_{a_1} x = b, \quad (b \geqslant 0),$$

$$a_1, \dots, a_n \in R_0^+ - \{1\}.$$

III.P.85.

$$\log_a x + \log_{a^2} x^2 + \dots + \log_{a^n} x^n - \frac{1}{2}\log_a x^{n+1} =$$

$$= \sqrt{\log_a x^n}, \quad n \in N^*, \quad n > 1, \quad a \in R_0^+ - \{1\}.$$

III.P.86. $a^{\sqrt{1-\log_2 x}} = a^{\sqrt{1+\log_{0,5} x}}$.

III.P.87. $a^{\log_a x} = x^{\log_x a}$, $x, a \in R_0^+ - \{1\}$.

III.P.88.

$$\log_a (x + x^2 + \dots + x^n) + \log_a (1 - x) =$$

$$= \log_a (x - x^{n+1}), \ a \in R_0^+ - \{1\}, \ x > 0.$$

III.P.89.

$$\lg (x^3 - 3x + 2) - \lg (x^2 + x - 2) = \lg (x - 1).$$

III.P.90*.

$$\lg (x^{n+1} - x) - \lg (x^2 + x - 2) = \lg (x - 1), \ n \in N.$$

III.P.91.

$$1 + \log_x \frac{4 \cdot x}{10} = (\lg \lg^2 n - 1) \log_x 10,$$

$$n \in N^* - \{1\}, \ n \neq 100.$$

III.P.92[1]. Care sînt valorile lui x pentru care:

$$\frac{\log_a x - 2\log_x a + 1}{\log_a x - 2\log_x a - 1} > 1,$$

în condițiile $x > 0$, $a > 0$, $x \neq 1$, $a \neq 1$?

Scanned with OKEN Scanner

III.P.93. Să se rezolve inecuația:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+1)} > 1.$$

III.P.94. Știind că $m \in R_0^+ - \{1\}$ să se găsească valorile lui x care satisfac inegalitatea:

$$\log_m x + \log_{mx} x + (\log_m x) \log_{\frac{m}{x}} x > 0.$$

Să se rezolve ecuațiile:

III.P.95. $\sqrt[\lg x]{x} = 10^{x^4}$.

III.P.96. $x^{\frac{\lg x+8}{3}} = 10^{\lg x+2}$.

III.P.97.

$$2\log_2 \sqrt{(x-2)\sqrt{8}} = \frac{5}{3}\log_2 27 + 1{,}5 - 15\log_2 27.$$

III.P.98. $\log_x 2 + \log_4 x^2 = 2{,}5$.

III.P.99.

$$\frac{1}{2}\lg x + \lg \sqrt{5} - 1 = \frac{\lg 0{,}001 + 1}{4}\lg (x-1).$$

III.P.100. $x^{\log_x \sqrt{x^2-4}} = \sqrt{5}$.

Să se afle cîte o soluție a următoarelor două ecuații:

III.P.101.

$$\log_3 (x+1) \cdot \log_9 (4x+1) \cdot \log_{27} (13x+1) = 1.$$

III.P.102.

$$[\log_3 (x+1)] \cdot [\log_4 (x+2)] \cdot [\log_5 (2x+1)] = 1.$$

Să se rezolve ecuațiile:

III.P.103. $\lg (\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2^{x^2-3x-1}}) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.104. $x^{\lg^3 x - 2\lg x + 1,5} = \sqrt{10}$.

Să se arate că ecuația admite soluția $x = 10$.

III.P.105. $\lg(2^{x-2} + 1) - \lg(4^{x-2} + 9) = \lg 0{,}2$.

III.P.106. $\lg 10^{\lg(x^2+21)} = 1 + \lg x$.

III.P.107. $\frac{1}{2}\log_x 5 + \log_{x^2} 5x = 2{,}25 + (\log_x \sqrt{5})^2$.

III.P.108.

$$\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^3} x - \log_{a^4} x = \frac{7}{12}; \quad a > 0, a \neq 1.$$

III.P.109.

$$\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x - \log_{a^8} x + \log_{a^{16}} x = \frac{11}{16}.$$

III.P.110. $5^{\lg x} + 5^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} + 3^{\lg x - 1}$.

III.P.111.

$$5^{\log_a x} - 3^{\log_a x + 1} = 3^{\log_a x - 1} - 5^{\log_a x - 1}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

III.P.112[1].

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a,$$

$$a, \quad x > 0, \quad a \neq 1; \quad x \neq 1.$$

III.P.113. $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x = \frac{25}{12}$.

III.P.114. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

III.P.115[1].

$$\lg\lg x = \sqrt{\frac{(a-b)^{\lg(a+b)}}{(a+b)^{\lg(a-b)}}}; \quad a, b \in R^+, \quad a > b.$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.116. Să se rezolve și să se discute după valorile parametrului real m ecuația:

$$2\log_a(x+1) = \log_a(mx), \qquad a \in R_0^+ - \{1\}.$$

III.P.117. Chestiune analoagă pentru ecuația:

$$\lg(x+1) + \lg(x+2) = \lg(mx+1).$$

III.P.118[1]. Se consideră funcția f definită prin $f(x) = \sqrt{\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4}$ și se cere:

a°). Mulțimea maximă de definiție;

b°). Codomeniul;

c°). Numărul punctelor de intersecție al curbei $y = f(x)$ cu dreapta $y = m$, $m \in R$.

III.P.119. Se consideră expresia:

$$E(t) = \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-2t}}$$

în care se înlocuiește t prin $\log_2 x$. Notăm expresia astfel obținută cu $E'(x)$. Se cere:

a°). Mulțimea valorilor lui x pentru care $E'(x) = 1$;

b°). Mulțimea valorilor lui x pentru care expresia obținută este reală.

III.P.120. Cîte soluții reale au ecuațiile:

a°). $\lg(x-1)^2 - \lg(2x-1)^2 = 0$;

b°). $2\lg(x-1) - \lg(2x-1)^2 = 0$;

c°). $\lg(x-1)^2 - 2\lg(2x-1) = 0$.

III.P.121. Dacă a, b, c sînt respectiv ipotenuza și catetele unui triunghi dreptunghic să se arate că:

$$\lg(a+b) + \lg(a-b) = 2\lg c.$$

III.P.122. Să se retranscrie relația:

$$\log_m c + \log_m b = 2$$

fără a folosi logaritmii.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.123. Este posibilă egalitatea:

$$\ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \sqrt{\ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \; ?$$

III.P.124. Să se rezolve ecuația:

$$\log_{16x} 4 - \log_x 4 \cdot \log_{4x} 4 = \frac{1}{12}.$$

III.P.125. Să se discute ecuația:

$$\frac{\lg x + \lg a}{\lg (m+x)} = 2$$

unde $a > 0$ și $m \in R$.

III.P.126. Să se rezolve ecuația:

$$\log_x 10 + 2\log_{10x} 10 - 3\log_{100x} 10 = 0.$$

III.P.127. Chestiune analogă pentru ecuația:

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2.$$

III.P.128[1]. Dovediți că dacă $x, y, z > 0$ atunci:

$$x + y + z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$$

Cînd are loc egalitatea?

III.P.129*. *Inegalitatea mediilor sau a lui Cauchy.* Dovediți că dacă $a_1, \ldots, a_n > 0$, $n \in N^* - \{1\}$, atunci:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.$$

Cînd are loc egalitatea?

III.P.130[1]. Dacă $x, y, z > 0$ atunci:

$$(x + x + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9.$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.131[2]. Dacă $x_1, \ldots, x_n > 0$ atunci:

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

Cînd are loc egalitatea?

(Olimpiadă, U.R.S.S., 1951)

III.P.132[3]. *Inegalitatea lui Buneakowski.* Dovediți că dacă $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in R$ atunci:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

În ce caz există egalitate?

III.P.133[1]. Dovediți că are loc egalitatea:

$$C_p^n = C_{p-1}^{n-1} + C_{p-2}^{n-1} + \ldots + C_{n-1}^{n-1}, \quad p \geqslant n.$$

III.P.134[1]. *Formulele lui Vieta.* Fie ecuația:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

în care $a_0 \neq 0$. Dovediți că dacă $x_1, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile ecuației atunci:

$$\Sigma x_1 = -\frac{a_1}{a_0};$$

$$\Sigma x_1 x_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma x_1 \ldots x_k = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

III.P.135. Dovediți egalitățile:

$$C_n^1 + C_n^3 + \ldots = C_n^0 + C_n^2 + \ldots = 2^{n-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.136. Dovediți egalitatea:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

III.P.137. Să se rezolve sistemul:

$$x + 2y + 3z = 1$$
$$x - 3y - z = 2$$
$$2x - y + 2z = 4.$$

III.P.138. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{2x}{3}\left(\frac{5x}{2} - \frac{7}{3}\right) < \frac{2x-5}{9}.$$

III.P.139. Să se rezolve sistemul:

$$\lg x - \lg y = 2$$
$$x + y = 13.$$

III.P.140*. *Inegalitatea generalizată a mediilor.* Dovediți că dacă $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$ atunci:

$$\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) \geqslant \left(\frac{\Sigma x_1 x_2}{C_n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \ldots \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{\Sigma x_1 \ldots x_k}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}} \geqslant \ldots \geqslant (x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

III.P.141. Să se rezolve sistemul:

$$x + 2y - z + t = 4$$
$$3x - y + z + 2t = 0$$
$$x + y + z - t = -1$$
$$x + 2y + 2z + 5t = 5.$$

Să se arate prin inducție matematică:

Scanned with OKEN Scanner

III.P.142.

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

$$(\forall)\ x \in R - \{1\},\ n \in N^*.$$

III.P.143.

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ (\forall)\ n \in N^*.$$

III.P.144.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}\quad (\forall)\ n \in N^*.$$

Dovediți egalitățile:

III.P.145[2]**.**

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2,\quad (\forall)\ n \in N^*.$$

III.P.146.

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0,\quad (\forall)\ n \in N^*.$$

III.P.147.

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 =$$

$$= n^2(2n^2 - 1),\ (\forall)\ n \in N^*.$$

III.P.148[3]**.**

$$C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}} \cos\frac{n\pi}{4},$$

$$(\forall)\ n \in N^*.$$

III.P.149.

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{n(n+3)} = \frac{n+2}{3(n+3)},$$

$$(\forall)\ n \in N^*.$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.150[2].

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+$$

$$+\frac{n}{(n-2)!+(n-1)!+n!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n!},$$

$$(\forall)\ n\in N^*,\ n\geqslant 3.$$

III.P.151[1].

$$\frac{16}{9\cdot 25}+\frac{24}{25\cdot 49}+\frac{32}{49\cdot 81}+\ldots+$$

$$\frac{8(n+1)}{[(2n+1)(2n+3)]^2}=\frac{4n(n+3)}{9(2n+3)^2},\quad (\forall)\ n\in N^*.$$

(Al. Lalescu, G.M.B., 9034)

III.P.152. $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1},\ (\forall)\ k,\ n\in N^*-\{1\}.$

III.P.153[1].

$$C_n^0C_m^p+C_n^1C_m^{p-1}+\ldots+C_n^pC_m^0=C_{m+n}^p,\quad (\forall)\ p,\ m\in N^*.$$

III.P.154[3].

$$C_n^1+C_n^5+C_n^9+C_n^{13}+\ldots=2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\sin\frac{n\pi}{4};$$

$$(\forall)\ n\in N^*.$$

III.P.155[3].

$$1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1},\quad (\forall)\ n\in N^*.$$

III.P.156[3].

$$C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right),\quad (\forall)\ n\in N^*.$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.157[3].

$$C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + C_n^{14} + \ldots = 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}, \quad (\forall)\ n \in N^*,\ n \geqslant 2.$$

III.P.158[3].

$$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right], \quad (\forall)\ n \in N^*,\ n \geqslant 2.$$

III.P.159[3].

$$C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + C_n^{15} + \ldots = 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}, \quad (\forall)\ n \in N,\ n \geqslant 3.$$

III.P.160[3].

$$C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{5}\right], \quad (\forall)\ n \in N,\ n \geqslant 4.$$

Să se arate inegalităţile:

III.P.161[3].

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - a_1 a_2 \ldots a_n < n - 1$ dacă $0 < a_i < 1$, $(\forall)\ i \in \overline{1,\ n}$.

III.P.162[2].

$$\frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{11}{4!} + \ldots + \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)!} < 2, \quad (\forall)\ n \in N^*.$$

III.P.163[1].

$(1 - x)^n + (1 + x)^n \leqslant 2^n$, $(\forall)\ |x| \leqslant 1$, $n \in N^*$.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.164. $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; $(\forall)\, n \in N^*$.

III.P.165[1].

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}} < \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2};\quad a \in R_0^+,$$

numărul radicalilor fiind arbitrar.

III.P.166[1].

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+k}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}+$$

$$+\frac{1}{n^2}>1,\ (\forall)\ n \in N,\ n \geqslant 2.$$

III.P.167[1].

$$(a_1+\ldots+a_k)^2 \leqslant k(a_1^2+\ldots a_k^2),$$

$$(\forall) a_i \in R,\ i \in \{1,\ldots,k\}.$$

III.P.168[3]. *Inegalitatea lui Hölder.* Dacă $p, q \in$ $\in Q^+ - \{0\}$ și:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

$$x_i,\ y_i \in R_0^+,\ i \in \{1,\ldots,n\},$$

atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

III.P.169. Dovediți *identitatea lui Lagrange*:

$$\sum_{i-1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 + \sum (a_i b_k - a_k b_i)^2$$

$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ fiind numere reale.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.170*. *Inegalitatea lui Jensen.* Fie $f : I \to R$ o funcție definită pe intervalul I și cu valori reale.

a°). Să se arate că pentru orice $n \in N^*$, orice $x_i \in I$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ și orice $\lambda_i \in [0, 1]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încît $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ atunci $\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \in I$.

b°). Să presupunem că f este convexă pe I adică pentru orice $x_1, x_2 \in I$ și orice $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ astfel ca $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ este satisfăcută inegalitatea:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Să se arate că:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

pentru orice $n \in N^*$ și orice submulțime $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \subset I$ și orice $\{\lambda_i, \ldots, \lambda_n\} \subset [0, 1]$ cu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

c°). Să se arate că:

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}\right) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}$$

pentru orice $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset I$ și orice sistem $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ de numere nenegative nu toate nule.

INDICAȚII

III.P.22[1]. Se are în vedere că $A \times A$ și $\mathcal{P}(A)$ trebuie să aibă același număr de elemente.

III.P.30[3]. Se pot folosi relațiile dintre rădăcini și coeficienți (relațiile lui *Vieta*) și inegalitatea lui *Cauchy* (a se vedea III.P.129 și III.P.134).

Scanned with OKEN Scanner

III.P.33*. Se pot considera cazurile în care X are $0, 1, \ldots, n$ elemente.

III.P.35[2]**.** Se poate construi un șir particular ajutător.

III.P.36[2]**.** Se observă că pentru $x = 3$ avem $p(3) = 0$.

III.P.38*. Da, polinomul este identic nul.

III.P.39[3]**.** Se observă că 44966103616 este cubul unui număr întreg.

III.P.48*. Se observă că dacă facem ca x să fie întreg atunci, potrivit ipotezei, unul din polinoamele p și q se anulează.

III.P.129*. Se poate demonstra prin inducție, întîi cînd numărul variabilelor este o putere oarecare a lui 2.

III.P.130[1]**.** Se deduce din inegalitatea lui *Cauchy*.

III.P.132[3]**.** Se poate folosi o proprietate importantă a trinomului.

III.P.134[1]**.** Se scrie că $x_1, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile ecuației.

III.P.140*. Se are în vedere inegalitatea lui *Mac Laurin*.

III.P.145[2]**.** Se are în vedere dezvoltarea în două moduri a binomului $(a + b)^{2n}$.

III.P.146. Se poate folosi dezvoltarea binomului după *Newton*.

III.P.148[3]**.** Se caută o expresie convenabilă care se dezvoltă după formula lui *Newton* și se are în vedere formula lui *Moivre*.

III.P.153[1]**.** Se are în vedere dezvoltarea în două moduri a binomului $(a + b)^{m+n}$.

III.P.161[3]**.** Se poate raționa prin inducție.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.164. Se poate folosi inegalitatea lui *Cauchy*.

III.P.168[3]**.** Se poate folosi o consecință a inegalității lui *Cauchy*.

III.P.170*. b°). Se poate dovedi prin inducție matematică.

SOLUȚII

III.P.1. Mulțimea valorilor funcției este $f(R) = [0, +\infty)$. Funcția este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ și strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Graficul este reprezentat în fig. III.P.1.

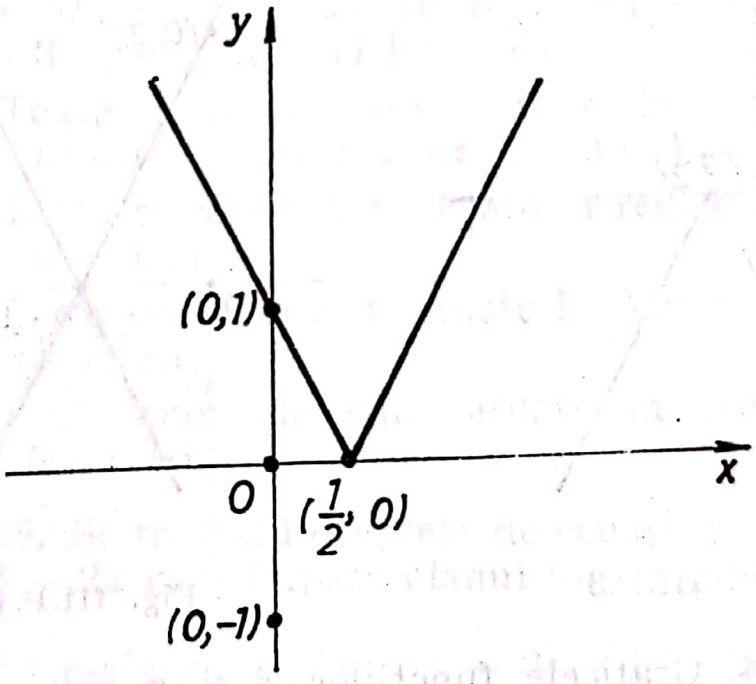


Fig. III.P.1

III.P.2. Mulțimea valorilor celor două funcții este aceeași, $[0, +\infty)$. Cele două funcții sînt egale. Graficele sînt reprezentate în fig. III.P.2.

Scanned with OKEN Scanner

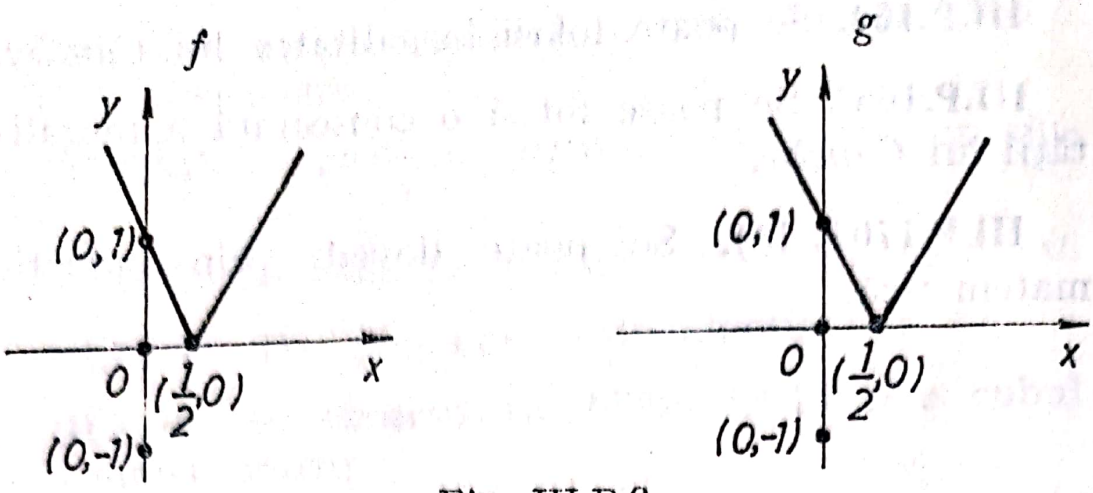


Fig. III.P.2

III.P.3. Graficul se deduce din figura precedentă, prin simetrie față de axa Ox (vezi fig. III.P.3).

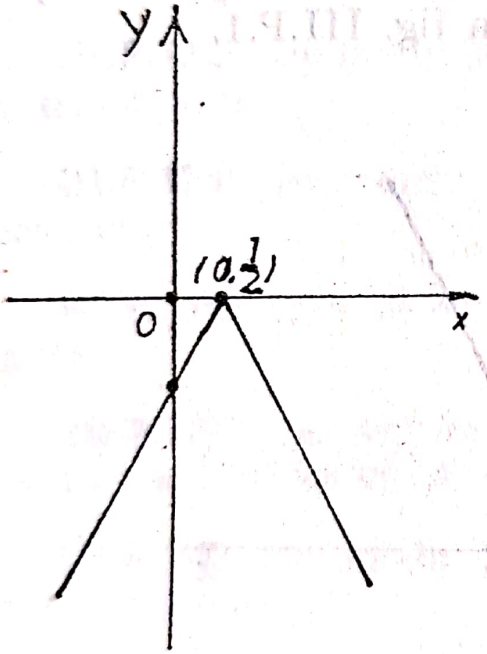


Fig. III.P.3

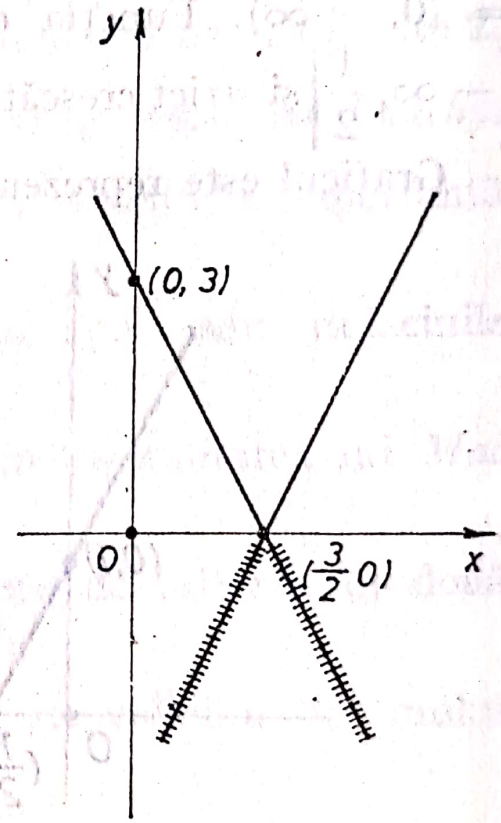


Fig. III.P.4.1

III.P.4. Graficele funcțiilor f și g sînt date de fig. III.P.4.1. Eliminînd porțiunea din fiecare dreaptă situată sub axa absciselor, ceea ce rămîne reprezintă atît graficul funcției f cît și graficul funcției g (fig. III.P.4.2).

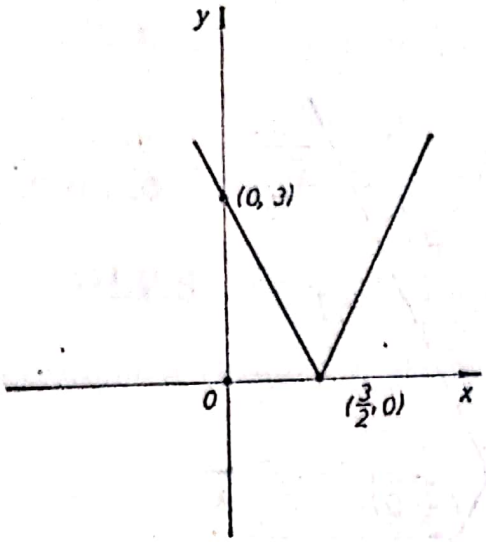


Fig. III.P.4.2

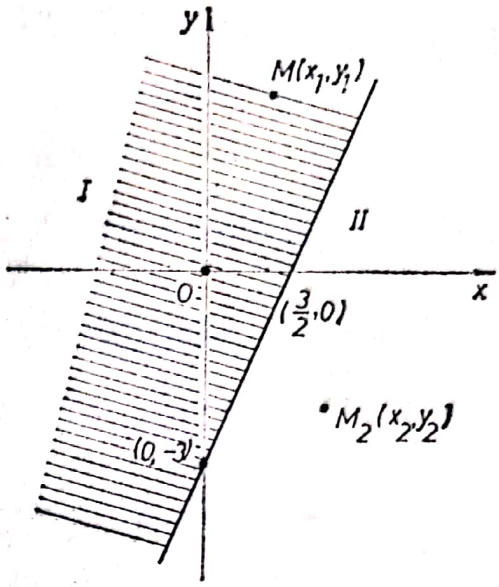


Fig. III.P.5.

III.P.5. Trasînd dreapta de ecuație $y = 2x - 3$, planul este împărțit în două regiuni. Semiplanul care conține originea reprezintă regiunea I iar al doilea semiplan regiunea a II-a.

Dacă $M_1\ (x_1, y_1)$ este în regiunea I, $y_1 > 2x_1 - 3$.

Dacă $M_2\ (x_2, y_2)$ este în regiunea a II-a, $y_2 < 2x_2 - 3$. (vezi fig. III.P.5). Deci:

a°). Toate punctele sînt situate în regiunea I, exclusiv frontiera (dreapta de ecuație $y = 2x - 3$);

b°). Toate punctele sînt situate în regiunea a II-a, exclusiv frontiera;

c°). Toate punctele sînt situate în regiunea a II-a, inclusiv frontiera;

d°). Toate punctele sînt situate în regiunea I, inclusiv frontiera.

III.P.6. Se trasează dreptele de ecuații $y = 2x - 3$ și $y = 3 - 2x$ care împart planul în 4 regiuni. Avem situația:

1°). În regiunea I: $2x - y - 3 > 0$ și $2x + y - 3 > 0$;

2°). În regiunea a II-a: $2x - y - 3 < 0$ și $2x + y - 3 > 0$;

3°). În regiunea a III-a: $2x - y - 3 < 0$ și $2x + y - 3 < 0$;

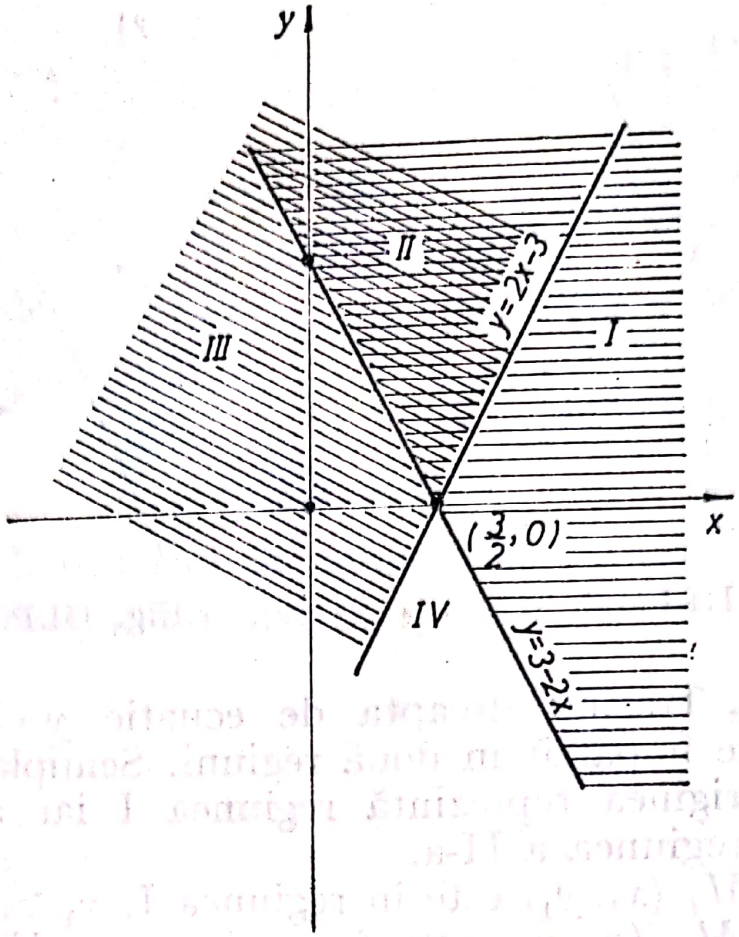


Fig. III.P.6

4°). În regiunea a IV-a: $2x - y - 3 > 0$ și $2x + y - 3 < 0$.

Convine regiunea a II-a.

III.P.7. Este necesară rezolvarea sistemului:

$$y = 6x - 6m - 1$$
$$y = x^2 - 2x - m$$

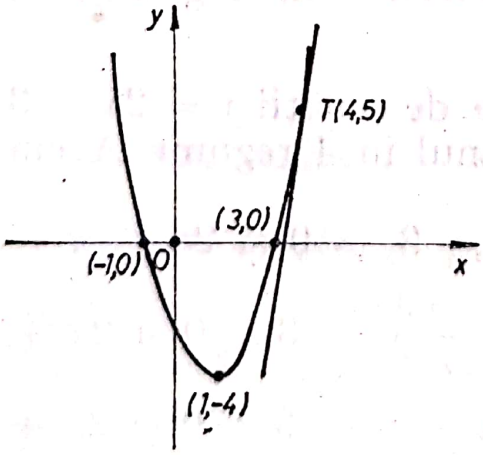


Fig. III.P.7

și în consecință, a ecuației:

$$x^2 - 2x - m = 6x - 6m - 1$$

sau, altfel scrisă:

$$x^2 - 8x + 5m + 1 = 0.$$

Pentru ca graficele celor două funcții să aibă un singur punct comun trebuie

ca ecuația la care am ajuns să aibă o rădăcină reală dublă deci ca *discriminantul* ei să fie nul. Deci:

$$64 - 20m - 4 = 0$$

de unde $m = 3$. Graficul III.P.7 arată această situație.

III.P.8. Avînd în vedere formula $\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$, ecuația a doua a sistemului devine:

$$\frac{1}{\log_x y} + \log_x y = 2$$

sau, altfel scrisă:

$$\log_x^2 y - 2 \log_x y + 1 = 0$$

de unde $\log_x y = 1$ (aceasta pentru că ecuația are rădăcină dublă) deci $x = y$.

Înlocuind în prima ecuație a sistemului propus, se obține:

$$x^2 - x - 20 = 0$$

de unde, folosind *formula de rezolvare pentru ecuația de gradul al II-lea*, $x_1 = y_1 = 5$ și $x_2 = -4$ care nu convine deoarece în acest caz logaritmii nu există.

III.P.9. Ca o primă constatare, $y \geqslant 0$, pentru ca radicalul să existe. Dacă $x = 0$ atunci din prima ecuație se obține $y = 0$, dar în acest caz obținem din a doua ecuație forma 0^0 care nu este definită. Deci $y > 0$ și se vede — dacă soluțiile există — că $x > 0$. Putem deci aplica logaritmii membrilor celor două ecuații ale sistemului propus. Obținem:

$$\lg x^{\sqrt{y}} = \lg y$$

$$\lg y^{\sqrt{y}} = \lg x^4$$

adică:

$$\sqrt{y} \lg x = \lg y$$

$$\sqrt{y} \lg y = 4 \lg x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Introducînd pe lg y din prima ecuație în a doua obținem ecuația:

$$\sqrt{y}\ \sqrt{y}\ \lg x = 4 \lg x$$

de unde sau $\lg x = 0$ și deci $x = 1$, sau $y = 4$.

Dacă $x^{\sqrt{y}} = y$ și $y = 4$, rezultă $x = +2$ ($x = -2$ nu convine).

Deci sistemul propus admite două soluții, anume:

$$x_1 = 1,\ y_1 = 1,\quad x_2 = 2,\ y_2 = 4.$$

III.P.10. Pentru ca radicalii să existe sînt necesare condițiile:

$$4x - 7 \geqslant 0 \text{ deci } x \in \left[\frac{7}{4};\ +\infty\right);$$

$$x + 5 \geqslant 0 \text{ deci } x \in [-5, +\infty),$$

$$5 - x \geqslant 0 \text{ deci } x \in (-\infty, 5],$$

$x \geqslant 0$ (din prima inecuație căci altfel un număr pozitiv ar fi mai mic decît un număr negativ — în ipoteza că radicalul există — absurd), condiții din care, considerate simultan, rezultă $x \in \left[\frac{7}{4};\ 5\right]$.

În această ultimă condiție, ridicînd prima inegalitate la pătrat, semnul inegalității nu se schimbă, deci:

$$4x - 7 < x^2.$$

Ridicînd și a doua inegalitate la pătrat obținem:

$$10 + 2\sqrt{25 - x^2} > 16$$

de unde:

$$\sqrt{25 - x^2} > 3$$

și deci, printr-o nouă ridicare la pătrat:

$$25 - x^2 > 9$$

de unde $x^2 < 16$, deci, avînd în vedere faptul că $x > 0$ rezultă $x < 4$.

Scanned with OKEN Scanner

Prima inecuație dă la rîndul ei:

$$x^2 - 4x + 7 > 0$$

care se verifică pentru orice $x \in R$ deci, avînd în vedere intervalul găsit cu ocazia punerii condițiilor de existență, rezultă $x \in \left[\frac{7}{4}, 4\right)$.

III.P.11. Oricare ar fi $m \neq 1$, fixat, graficul lui f trece prin punctul $I(-2, 0)$ căci f se mai poate scrie $f(x) = (x + 2)(m - 1)$ și pentru $x = -2$ rezultă $f(-2) = 0$, oricare ar fi m real.

Pentru $m = 1$ graficul pentru funcția obținută se reduce la axa Ox adică la dreapta de ecuație $y = 0$.

III.P.12. Ecuația se mai scrie:

$$m(x + y + 2) - (x + 2y + 3) = 0.$$

Vedem că putem satisface această egalitate punînd:

$$x + y + 2 = 0$$

și:

$$x + 2y + 3 = 0$$

care conduc la $x = -1$, $y = -1$ și deci punctul căutat este $I(-1, -1)$.

Observație. Punînd $m = 0$ și $m = 1$ se obține sistemul: $x + 2y + 3 = 0$; $y = -1$ și deci $I(-1, -1)$ sau, pentru $m = 2$ respectiv $m = 1$ obținem $x = -1$ respectiv $y = -1$.

III.P.13. Dreptele trec prin punctul fix $I(-1, -1)$. Ecuația fasciculului se obține din ecuația de la III.P.12 prin înlocuirea lui m cu $-m$.

III.P.14. Se alcătuiește tabelul:

x	$-\infty$			$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$1 - 2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$2x - 3$	$-$	$-$	$-$	$-$		0	$+$	
$(2x - 3)(1 - 2x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$ $-$
$\frac{2x - 3}{2x - 1}$	$+$	$+$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$+$ $+$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru prima inecuație:

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Pentru inecuația propusă la punctul b°):

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Pentru inecuația propusă la c°):

$$x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

III.P.15. Funcția f nu este definită în punctul $x = -2$ deci, cum graficul ei se găsește pe o dreaptă, obținem că f se confundă cu o funcție care este liniară pe reuniunea dintre intervalele $(-\infty, -2)$, $(-2, +\infty)$. Pentru a fi posibil acest lucru, trebuie ca $x^2 + mx - 2$ să se dividă cu $x + 2$ deci ca $x^2 + mx - 2$ să se anuleze pentru $x = -2$. Obținem imediat $m = 1$ și dreapta suport a graficului este de ecuație $y = x - 1$.

III.P.16. a°). $f(-1) = g(-1) = -3$, $f(0) = g(0) = -1$, $f(1) = g(1) = 1$.

b°). Domeniul maxim de definiție al funcției g este respectiv $R - \{2\}$ deci asupra domeniului de definiție al funcției f trebuie făcută restricția $R - \{2\}$ pentru a obține egalitatea celor două funcții: $f(x) = g(x) = 2x - 1$.

III.P.17. Domeniul maxim de definiție al funcției f este R iar al funcției g este $R - \{-1, 1\}$. Efectuînd împărțirea:

$$(x^3 - x^2 - x + 1) : (x^2 - 1)$$

obținem că $g(x) = 1 - x$ pe $R - \{-1, 1\}$ deci graficul lui g se poate obține din graficul lui f (care este o dreaptă, anume $y = 1 - x$) prin înlăturarea punctelor $A(-1, 2)$, $B(1, 0)$.

III.P.18. Ecuația dată se scrie:

$$m^2(x - y + 3) + m(3x - y + 1) + (x + y - 5) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde, pentru $m = 0$ se obține a doua ecuație cerută, pentru $m = -1$ se obține prima ecuație.

III.P.19. $m = 1 \left(m - 2 = 1 - 2m = \frac{m-3}{2}\right)$.

III.P.20. a°). $D_f = R - \{-1, 1\}$. Pentru b°), vezi fig. III.P.20.

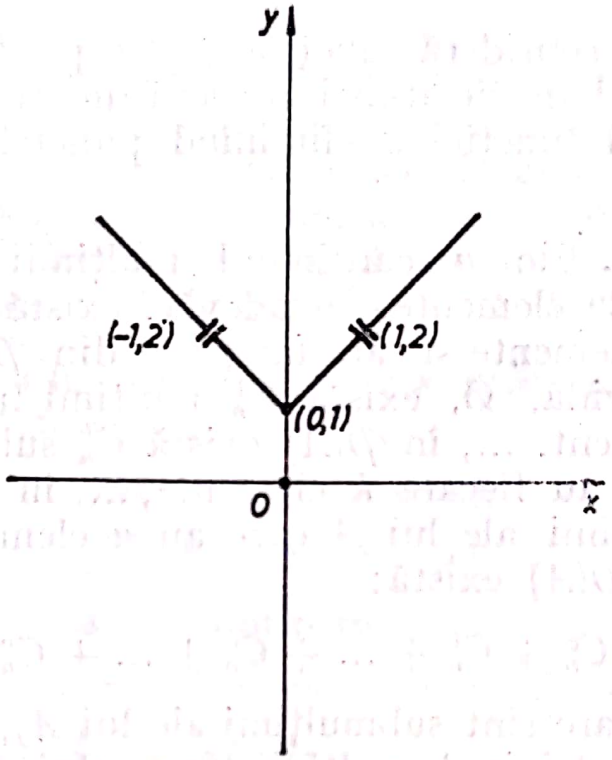


Fig. III.P.20

III.P.21. Putem scrie:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{-x-1} \text{ pentru } x < 0, \ x \neq -1 \\ 1 \text{ pentru } x = 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} \text{ pentru } x > 0, \ x \neq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 - x \text{ pentru } x \in R_0^- - \{-1\}, \\ 1 \text{ pentru } x = 0, \\ 1 + x \text{ pentru } x \in R_0^+ - \{1\}, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece $\sqrt{x^2} = |x|$ și:

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ pentru } x < 0, \\ 0 \text{ pentru } x = 0, \\ x \text{ pentru } x > 0. \end{cases}$$

Dacă domeniul de definiție al funcției g este restrîns la $R - \{-1, 1\}$ atunci funcția f și restricția lui g sînt egale.

Dacă se consideră funcțiile f și g pe domeniile lor maxime de definiție atunci graficul funcției f se obține din graficul funcției g eliminînd punctele $A(-1, 2)$ și $B(1, 2)$.

III.P.22[1]. Fie n cardinalul mulțimii A. Atunci $\mathcal{P}(A)$ are 2^n elemente. În adevăr, există C_n^0 mulțimi care au 0 elemente și care fac parte din $\mathcal{P}(A)$, anume mulțimea vidă, $\emptyset$, există C_n^1 mulțimi în $\mathcal{P}(A)$ care au un element, ..., în $\mathcal{P}(A)$ există C_n^k submulțimi ale lui A care au fiecare k elemente, ..., în $\mathcal{P}(A)$ există C_n^n submulțimi ale lui A care au n elemente deci în mulțimea $\mathcal{P}(A)$ există:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$$

elemente (care sînt submulțimi ale lui A), număr care este egal, potrivit dezvoltării binomului după *Newton* (în care $a = b = 1$), cu 2^n.

$A \times A$ are n^2 elemente și pentru a avea bijecții de tipul cerut trebuie ca $A \times A$ și $\mathcal{P}(A)$ să aibă același număr de elemente deci ca:

$$2^n = n^2.$$

O primă soluție $n = 2$. Se constată că $n = 3$ nu verifică ecuația și că pentru $n > 3$ avem, potrivit aceleași dezvoltări a binomului $(a + b)^n$:

$$(1 + 1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \ldots > n^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci card $A = 2$ deci $A \times A$ are 4 elemente (la fel cu $\mathcal{P}(A)$).

Numărul de bijecții este $P_4 = 4! = 24$ căci acest număr este egal cu numărul tuturor permutărilor ce se pot forma cu 4 elemente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$$

(i, j, k, l reprezentînd, de exemplu, o permutare arbitrară a numerelor 1, 2, 3, 4) căci i se poate alege în 4 moduri distincte dintre numerele 1, 2, 3, 4, j în 3 moduri distincte din cele 3 rămase (căci al patrulea număr a fost folosit pentru i, nemaiputînd fi folosit în virtutea injectivității) deci i și j în $4 \cdot 3$ moduri distincte etc., rezultînd, încă o dată spus, $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ funcții.

III.P.23[1]. Fie $x = a$ și $x = b$ cele două axe de simetrie. Putem scrie:

$$f(a - x) = f(a + x),$$
$$f(b - x) = f(b + x).$$

Punînd $y = a - x$ obținem:

$$f(a - x) = f(y) = f(a + x) = f(2a - y).$$

Notînd $y = b - x$ obținem:

$$f(b - x) = f(y) = f(b + x) = f(2b - y)$$

deci $f(y) = f(2a - y) = f(2b - y)$ și punînd $y = 2a - z$ în această ultimă relație obținem $f(z) = f(2b - 2a + z)$ ceea ce arată că funcția este periodică, cu perioada $2b - 2a$.

III.P.24[1]. Pentru $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$ afirmația este evidentă. Notînd $a = n - 1$, $b = n$, $c = n + 1$, $n \in N^*$, are loc:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3} = \frac{n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1}{n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^3+3n+1} =$$

$$= \frac{3n^2 + 2}{3n^3 + 6n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie D cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului. Atunci:

$$D \mid 3n^3 + 6n - n(3n^2 + 2)$$

deci $D \mid 4n$ adică:

$$D \mid 4(3n^2 + 2) - 3n \cdot 4n$$

de unde $D \mid 8$ și de aici $D \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Dacă a este număr par, adică $a = 2k$ $(k \in N^*)$, deci n impar, numărătorul $3n^2 + 2$ este număr impar și are numai divizori impari. Urmează în acest caz $D = 1$ și deci numărătorul și numitorul sînt numere prime între ele, astfel că fracția este ireductibilă.

Dacă a este impar, adică $a = 2k + 1$ $(k \in N^*)$, deci n par, numitorul $3n^3 + 6n$ se divide cu 4 pe cînd numărătorul numai cu 2 deci $D = 2$ și fracția se simplifică numai prin 2.

III.P.25². Să arătăm implicația $\Rightarrow$. Să presupunem că f este injectivă și funcțiile $g, g' : M' \to M$ au proprietatea că $f \circ g = f \circ g'$. Atunci pentru orice $x' \in M'$ avem $(f \circ g)(x') = (f \circ g')(x')$ adică $f(g(x')) = f(g'(x'))$ și cum f este presupusă injectivă, rezultă $g(x') = g'(x')$ deci $g = g'$.

Reciproc, să presupunem că pentru orice mulțime M' și orice două funcții g, g' $M' \to M$ cu proprietatea $f \circ g = f \circ g'$ rezultă $g = g'$. Să arătăm că f este atunci injectivă.

Presupunem că ar exista $x, y \in M$ cu $x \neq y$ și $f(x) = f(y)$. Fie atunci $M' = \{x', y'\}$ formată din două elemente x', y' și funcțiile g, $g' : M' \to M$ definite astfel: $g(x') = x$, $g(y') = y$, $g'(x') = g'(y') = x$. Atunci $(f \circ g)(x') = f(g(x')) = f(x) = f(y) = f(g(y')) = f(g'(x')) = (f \circ g')(x')$ și analog $(f \circ g)(y') = (f \circ g')(y')$ însă evident $g \neq g'$.

Urmează deci că f este injectivă.

III.P.26². Fie $x, y \in M$ astfel ca $f(x) = f(y)$. Atunci rezultă $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ și deoarece $g \circ f$ este injectivă rezultă $x = y$ deci și f este injectivă.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.27[1]. Fie $M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} P$ două funcții surjective. Aceasta înseamnă că pentru orice $p \in P$ există $n \in T$ astfel încît $g(n) = p$. Dar pentru orice $n \in T$ există $m \in M$ astfel încît $f(m) = n$ deci pentru orice $p \in P$ există $m \in M$ astfel încît $g(f(m)) = p$ de unde urmează afirmația din enunț.

III.P.28[1]. Fie $M \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} P$ două funcții injective. Egalitatea $g(f(x)) = g(f(y))$, datorită faptului că g este injectivă, implică $f(x) = f(y)$ și de aici, datorită faptului că f este injectivă, $x = y$ deci $g \circ f$ este injectivă.

III.P.29[2]. Presupunem că f este surjectivă iar g, g' două funcții astfel ca $g \circ f = g' \circ f$. Fie y un element oarecare din T. Va trebui să arătăm că $g(y) = g'(y)$. Deoarece f este presupusă surjectivă, există $x \in M$ astfel ca $f(x) = y$. Din $g \circ f = g' \circ f$ rezultă $(g \circ f)(x) = (g' \circ f)(x)$, adică $g(f(x)) = g'(f(x))$ deci $g(y) = g'(y)$.

Reciproc, să presupunem că funcția f are proprietatea că oricare ar fi mulțimea P și funcțiile $g, g' : T \to P$ astfel încît $g \circ f = g' \circ f$, rezultă $g = g'$. Fie $y \in T$ astfel încît nu există nici un element $x \in M$ cu proprietatea $f(x) = y$. Atunci considerăm mulțimea $P = \{0, 1\}$ și funcțiile $g, g' : T \to P$ definite astfel: $g(n) = 0$ pentru orice $n \in T$, $g'(n) = 0$ pentru $n \in T$, $n \neq y$ iar $g'(y) = 1$. Atunci se verifică imediat că $g \circ f = g' \circ f$ și se observă că $g \neq g'$, absurd. Deci neapărat există $x \in T$ astfel ca $f(x) = y$ adică f este surjectivă.

III.P.30[3]. Să arătăm în prealabil că:

$$\frac{a_k a_{n-k}}{a_0 a_n} \geqslant (C_n^k)^2, \ (\forall)\ k = \overline{1, n}$$

Potrivit formulelor lui *Vieta* (III.P.134) are loc egalitatea:

$$\sum x_1 \dots x_k = (-1)^k \frac{a_k}{a_0} \qquad (1)$$

unde x_i sînt rădăcinile ecuației din enunț, $k, i = \overline{1, n}$.

Tot astfel:

$$\sum x_1 \dots x_{n-k} = (-1)^{n-k} \frac{a_{n-k}}{a_0} \tag{2}$$

și, pentru $k = n$:

$$x_1 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}. \tag{3}$$

Împărțind (2) cu (3) membru cu membru obținem:

$$\sum \frac{1}{x_1 \dots x_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}. \tag{4}$$

Dar, potrivit inegalității lui *Cauchy* (vezi III.P.129):

$$\sum x_1 \dots x_k \geqslant C_n^k \sqrt[C_n^k]{\Pi\, x_1 \dots x_k}$$

și:

$$\sum \frac{1}{x_1 \dots x_k} \geqslant C_n^{n-k} \sqrt[C_n^{n-k}]{\Pi \frac{1}{x_1 \dots x_k}}.$$

Înmulțind relațiile de mai sus și ținînd cont că și $C_n^k = C_n^{n-k}$ și că:

$$\Pi\, x_1 \dots x_k \;\Pi \frac{1}{x_1 \dots x_k} = 1$$

obținem:

$$\sum \frac{1}{x_1 \dots x_k} \sum x_1 \dots x_k \geqslant (C_n^k)^2.$$

Ținînd seama de (1) și (4) deducem:

$$(-1)^k \frac{a_k}{a_0} (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \geqslant (C_n^k)^2$$

și cum $(-1)^{2k} = 1$ rezultă că:

$$\frac{a_k\, a_{n-k}}{a_0 a_n} \geqslant (C_n^k)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Sumînd ultima inegalitate după k, luînd valorile $0, \ldots, n$, și cum (vezi III.P.145):

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

rezultă:

$$\frac{1}{a_0 a_n} \sum a_k \, a_{n-k} \geqslant C_{2n}^n.$$

III.P.31[1]. În condiția $|x| < 1$:

$$\frac{1}{x} + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{x} + x(1 + x +$$

$$+ \ldots + x^n + \ldots) = \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x}$$

de unde ecuația:

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} = -\frac{7}{3}$$

adică, altfel scris:

$$3 - 3x + 3x^2 + 7x - 7x^2 = 0$$

adică, în fond:

$$4x^2 - 4x - 3 = 0$$

de unde $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Dar $|x_1| > 1$ deci nu convine. Singura soluție rămîne x_2.

III.P.32[1]. Fie $a = \sqrt[3]{2x-3}$, $b = \sqrt[3]{1-3x}$, $c = \sqrt[3]{x+2}$. Cum $a + b + c = 0$, identitatea:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)+3abc$$

devine:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

deci:

$$2x - 3 + 1 - 3x + x + 2 = \sqrt[3]{(2x-3)(1-3x)(x+2)}$$

adică:

$$\sqrt[3]{(2x-3)\ (1-3x)\ (x+2)} = 0$$

de unde:

$$x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = -2.$$

Observație. Pentru fiecare din soluții se anulează cîte un termen al ecuației, iar suma celorlalți doi este nulă.

III.P.33*. Fie $|X|$ numărul elementelor mulțimii X. Rezultă:

$$|X| + |Y| \geqslant n.$$

Dacă $|X| = 0$ atunci $|Y| \geqslant n$ și ecuația are $1 \cdot C_n^0$ soluții.

Dacă $|X| = 1$ atunci $|Y| \geqslant n-1$ și ecuația are $(1 + C_1^1)C_n^1$ soluții.

$$\vdots$$

Dacă $|X| = k$ atunci $|Y| \geqslant n-k$ și ecuația are $(1 + C_k^1 + C_k^2 + \ldots + C_k^k)C_n^k$ soluții.

$$\vdots$$

Dacă $|X| = n$ atunci $|Y| \geqslant 0$ și ecuația are $(1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n)C_n^n$ soluții.

Ecuația are în total:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} C_k^i C_n^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k = (2+1)^n = 3^n$$

soluții.

III.P.34[2]. a°). Se dă deci ecuația:

$$(2k+1)x^4 + (2p+1)x^3 + 2(m-k)x^2 - (2p+1)\,x - 2m - 1 = 0$$

sau:

$$(2k+1)x^4 + (2p+1)x^3 + 2\left(m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - k\right)x^2 - (2p+1)\,x - 2m - 1 = 0$$

adică:

$$(x^2 - 1)\,[(2k + 1)x^2 + (2p + 1)x + \\ + 2m + 1] = 0.$$

Se observă imediat că două rădăcini raționale sînt $x_1 = -1$ și $x_2 = 1$.

Presupunem că ecuația ar mai admite cel puțin o rădăcină rațională $x_3 = \frac{s}{t}$, $s, t \in Z$, $t \neq 0$, care adusă la forma ireductibilă ar putea fi de forma $\frac{2a}{2b + 1}$ sau $\frac{2a + 1}{2b}$ sau încă $\frac{2a + 1}{2b + 1}$ unde $a, b \in Z$.

Dacă există x_3 rădăcină rațională atunci ea trebuie să verifice ecuația:

$$(2k + 1)x^2 + (2p + 1)x + 2m + 1 = 0. \qquad (1)$$

Să încercăm cu x_3 de forma $\frac{2a}{2b + 1}$. Avem:

$$(2k + 1)\left(\frac{2a}{2b + 1}\right)^2 + (2p + 1)\frac{2a}{2b + 1} + 2m + 1 = 0$$

adică:

$$(2k + 1)\,4a^2 + 2a(2p + 1)\,(2b + 1) + (2m + \\ + 1)\,(2b + 1)^2 = 0$$

ceea ce este imposibil pentru că $(2k + 1)4a^2$ este par, $2a(2p + 1)\,(2b + 1)$ este par iar $(2m + 1)\,(2b + 1)^2$ este număr impar.

Să încercăm x_3 de forma $\frac{2a + 1}{2b}$. Putem scrie:

$$(2k + 1)\left(\frac{2a + 1}{2b}\right)^2 + (2p + 1)\frac{2a + 1}{2b} + 2m + 1 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

adică:

$$(2k+1)(2a+1)^2 + (2p+1)(2a+1)2b + \\ + 4b^2(2m+1) = 0,$$

imposibil pentru motive asemănătoare.

Pentru x_3 de forma $\frac{2a+1}{2b+1}$ rezultă:

$$(2k+1)\left(\frac{2a+1}{2b+1}\right)^2 + (2p+1)\frac{2a+1}{2b+1} + 2m + 1 = 0$$

sau încă:

$$(2k+1)(2a+1)^2 + (2p+1)(2a+1)(2b + \\ + 1) + (2m+1)(2b+1)^2 = 0$$

absurd căci suma a trei numere întregi impare nu poate fi număr par (egal cu 0).

Ca atare, ecuația admite numai două rădăcini raționale.

b°). Presupunem că $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ și, avînd în vedere că $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$, obținem $x_3 = x_4$. Din (1):

$$\Delta = (2p+1)^2 - 4(2k+1)(2m+1)$$

iar egalitatea $\Delta = 0$ este imposibilă deci, oricum, $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \neq 0$, $(\forall)$ $k, m, p \in Z$.

III.P.35². Fie șirul $\{v_n\}_{n\in N^*}$ definit prin relația:

$$v_n = u_{n-1}v_{n-1}$$

unde $v_1 = \sqrt{a^2-4}$. Făcînd simplificarea în:

$$\prod_{k=2}^{n+1} u_{k-1}v_{k-1} = \prod_{k=2}^{n+1} v_k$$

deducem:

$$u_1u_2 \dots u_n = \frac{v_{n+1}}{v_1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd $a = x + \frac{1}{x}$ are loc:

$$u_1 = x + \frac{1}{x},$$

$$u_2 = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = x^{2^{n-1}} + \frac{1}{x^{2^{n-1}}},$$

fapt ce se poate demonstra direct, folosind relația de recurență și:

$$v_1 = x - \frac{1}{x},$$

$$v_2 = x^2 - \frac{1}{x^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n = x^{2^{n-1}} - \frac{1}{x^{2^{n-1}}}.$$

Cu notațiile folosite rezultă:

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad \frac{1}{x} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

cu care v_{n+1} devine:

$$v_{n+1} = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)^{2^n} - \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)^{2^n}.$$

Astfel se obține:

$$u_1 u_2 \ldots u_n = \frac{\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)^{2^n} - \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)^{2^n}}{\sqrt{a^2 - 4}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.36[2]. Deoarece egalitatea:

$$xp(x) = (x-3)p(x+1) \qquad (1)$$

are loc pentru orice $x \in R$, o considerăm pentru $x = 0$:

$$(-3)p(1) = 0$$

adică $p(x) \vdots (x-1)$.

Pentru $x = 3$ rezultă $3p(3) = 0$ adică $p(x) \vdots (x-3)$. Ca atare $p(x) = (x-1)(x-3)q(x)$ relație pe care o notăm cu (2). Înlocuind pe (2) în (1) obținem:

$$x(x-1)(x-3)q(x) = (x-3)x(x-2)q(x+1)$$

deci:

$$(x-1)q(x) = (x-2)q(x+1).$$

Pentru $x = 2$ rezultă $q(2) = 0$ adică respectiv $q(x) \vdots (x-2)$ deci:

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)r(x). \qquad (3)$$

Înlocuind pe (3) în (1) obținem:

$$x(x-1)(x-2)(x-3)r(x) = (x-3)x(x-$$
$$-2)(x-1)r(x+1)$$

adică:

$$r(x) = r(x+1)$$

pentru orice x real. De aici, presupunînd grad $r = n$, rezultă:

$$r(0) = r(1) = \ldots = r(n) = k,$$

(k fiind o constantă) de unde reiese că polinomul de gradul n, $r(x) - k$, se anulează pentru $n+1$ valori distincte date variabilei deci polinomul în discuție este identic nul adică $r(x) - k = 0$, $(\forall)\ x \in R$.

Rezultă că polinomul p are forma:

$$p(x) = k(x-1)(x-2)(x-3).$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.37[1]. a°). Fie x_v, y_v coordonatele vîrfului parabolei:

$$x_v = \frac{1-m}{1+m};$$

$$y_v = \frac{4m(m+1) - 4(m-1)^2}{4(m+1)} = \frac{3m-1}{m+1}.$$

Condițiile din enunț se mai pot scrie:

$$0 < x_v < 1,$$

$$0 < y_v < 1$$

$$y_v < x_v$$

sau:

$$0 < \frac{1-m}{1+m} < 1$$

$$0 < \frac{3m-1}{m+1} < 1$$

$$\frac{3m-1}{m+1} < \frac{1-m}{1+m}$$

de unde pentru prima relație $m \in (-1, 1)$ și $\frac{1-m}{1+m} - 1 < 0$ implică $m \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ deci pentru prima inecuație $m \in (0, 1)$.

Apoi:

$$(3m-1)(m+1) > 0$$

implică $m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

În fine, inegalitatea:

$$\frac{3m-1}{m+1} - 1 < 0$$

Scanned with OKEN Scanner

conduce la $m \in (-1, 1)$ deci pentru a doua inecuație avem $m \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ iar inegalitatea:

$$\frac{3m-1}{m+1} - \frac{1-m}{1+m} < 0$$

conduce la $m \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Intersectînd rezultatele, obținem $m \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

b°). Dacă vîrful parabolei se află pe prima bisectoare atunci $m+1 \neq 0$, $x_v = y_v$ sau:

$$\frac{3m-1}{m+1} = \frac{1-m}{1+m}$$

de unde $m = \frac{1}{2}$.

Ecuația parabolei pentru $m = \frac{1}{2}$ devine $y = \frac{3x^2}{2} - x + \frac{1}{2}$ deci graficul (vezi fig. III.P.37).

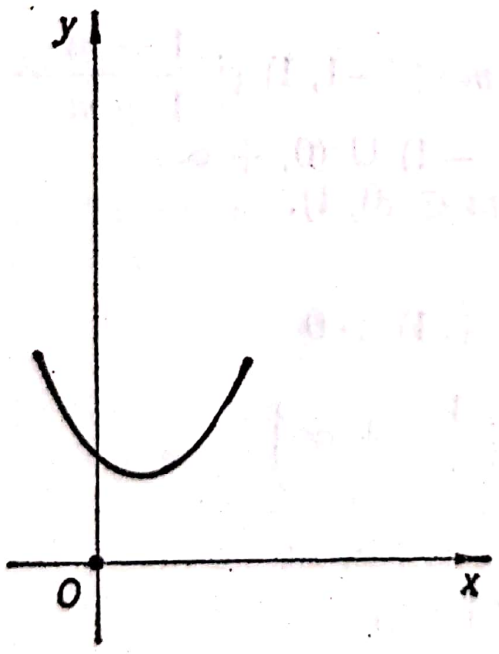


Fig. III.37

c°). Condițiile conduc la $x_1 > -\frac{1}{2}$, $x_2 > -\frac{1}{2}$ sau $x_1 + \frac{1}{2} > 0$, $x_2 + \frac{1}{2} > 0$. Folosim substituția $t = x + \frac{1}{2}$ și $t_1 > 0$, $t_2 > 0$,

$f_1(t) = 4(m+1)t^2 - 4(3 - m)t + m + 5 = 0$.

Condiții:

$\Delta \geqslant 0$, $P > 0$, $S > 0$

Scanned with OKEN Scanner

și se obține:

$$m \leqslant \frac{1}{3}, \quad 4P = \frac{m+5}{m+1} > 0$$

și deci:

$$m \in (-\infty, \ -5) \cup (-1, \ +\infty)$$

și:

$$S = \frac{3-m}{m+1} > 0 \quad \text{cu} \quad m \in (-1, \ 3).$$

Ecuația dată are rădăcinile mai mari decît $-\frac{1}{2}$, dacă $m \in \left(-1, \ \frac{1}{3}\right]$.

III.P.38*. a°). Este evident faptul că polinomul identic nul se anulează pentru orice număr real. Rezultă că pentru orice $x \in R$ avem egalitatea:

$$p(ax^2 + bx + c) = 0. \tag{1}$$

Dacă am presupune, prin absurd, că polinomul p nu este identic nul ar rezulta grad $p \geqslant 0$, p neconstant. De aici am deduce imediat că ecuația:

$$p(ax^2 + bx + c) = 0$$

admite exact 2 grad p rădăcini complexe (conform teoremei fundamentale a algebrei, a lui *d'Alembert*, anume că o ecuație polinomială cu coeficienți reali admite atîtea rădăcini cît arată gradul ei) ceea ce, evident, contrazice faptul că egalitatea (1) are loc pentru orice $x \in R$. Deci p este neapărat polinomul identic nul.

b°). Vom observa mai întîi că în corpul numerelor complexe, polinomul p admite descompunerea:

$$p(x) = \prod_{k=0}^{4} (x - \varepsilon^k) \tag{2}$$

unde prin ε am notat o rădăcină complexă de ordinul cinci a unității, diferită de 1.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem acum că p ar mai admite și o altă descompunere ca produs de două polinoame u și v cu coeficienți raționali.

Evident, dacă p ar admite o descompunere ca produs de trei sau mai multe polinoame cu coeficienți raționali, aceasta ar putea fi redusă la cazul unui produs de două polinoame, deoarece produsul unor polinoame cu coeficienți raționali este de asemenea un polinom cu coeficienți raționali.

Cele două polinoame sînt în mod necesar de gradul doi și trei deoarece dacă unul dintre ele ar avea gradul 1 ar trebui să figureze printre factorii produsului (2). Or, singurul factor de gradul 1 rațional al produsului (2) este $x - \varepsilon^\circ$ care ne conduce la descompunerea din enunț.

Prin urmare, p se poate reprezenta astfel:

$$p(x) = u(x)\ v(x)$$

unde u și v au coeficienți reali raționali iar grad $u = 2$ și grad $v = 3$.

Putem trage atunci concluzia că polinomul u este de tipul:

$$u(x) = x^2 - (\varepsilon^h + \varepsilon^j)\ x + \varepsilon^h \varepsilon^j$$

unde $\varepsilon^h + \varepsilon^j$ și $\varepsilon^h \varepsilon^j$ sînt numere raționale. Pe de altă parte, produsul $\varepsilon^h \varepsilon^j = \varepsilon^{h+j}$ este de asemenea o rădăcină de ordinul 5 a unității și cum singura rădăcină rațională este ε°, conchidem că $j + k = 5l$ (deoarece $\varepsilon^\circ = \varepsilon^{5l}$, $l \in N$).

Dar $k + j \leqslant 8$ și deci $k + j = 5$.

Urmează atunci că singurele perechi ce trebuie studiate sînt $(\varepsilon^1, \varepsilon^4)$ și $(\varepsilon^2, \varepsilon^3)$. Scriind explicit perechile de mai sus ajungem ușor la concluzia că atît în primul caz cît și în al doilea caz numărul $\varepsilon^h + \varepsilon^j$ este irațional.

Contradicția la care am ajuns provine din faptul că am presupus că polinomul p ar mai avea o altă descompunere în produs de două polinoame cu coeficienți raționali, decît cea din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.39³. Prin descompunerea numărului 44966103616 găsim că el este egal cu 3556^3.

Să tratăm cazul general, anume pentru ecuația:

$$x^3 + y^3 = z^2 \tag{1}$$

căreia să-i aflăm soluțiile în numere întregi.

Ecuația (1) o putem scrie sub forma:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = z^2.$$

Putem satisface această ecuație punînd:

$$x + y = p^2$$

$$x^2 - xy + y^2 = q^2$$

$$z = pq,$$

care se rezolvă potrivit metodelor clasice.

III.P.40². Scriem:

$$x^{ka_1} + (x^k)^{a_2} \cdot x + (x^k)^{a_3} \cdot x^2 + \ldots + (x^k)^{a_k} \cdot x^{k-1} =$$

$$= x^{ka_1} + x^{ka_2+1} + \ldots + x^{ka_k+k-1}. \tag{1}$$

Dacă:

$$x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + 1 = 0 \tag{2}$$

înseamnă că $\dfrac{x^k - 1}{x - 1} = 0$ deci $x^k = 1$. În acest caz (1) devine:

$$1 + x + \ldots + x^{k-2} + x^{k-1} = 0.$$

Deci cînd (2) se anulează atunci se anulează și (1) deci (1) se divide cu toate rădăcinile lui (2) deci se divide cu polinomul din (2), ceea ce trebuia demonstrat.

III.P.41². Fie $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ surjecții și $f \circ h \circ g$ injecție.

$h \circ g \circ h$ surjecție $\Rightarrow (h \circ g) \circ f$ surjecție $\Rightarrow h \circ g$ surjecție $\Rightarrow h$ surjecție și $g \circ f \circ h$ surjecție $\Rightarrow g \circ f$ surjecție $\Rightarrow g$ surjecție.

Scanned with OKEN Scanner

$f \circ h \circ g$ injecție $\Rightarrow$ $h \circ g$ injecție $\Rightarrow$ g injecție deci g și $h \circ g$ sînt bijecții; g fiind bijecție $\Rightarrow$ $(\exists)$ g^{-1} care este bijecție. $h \circ g, g^{-1}$ fiind bijecții $\Rightarrow$ $(h \circ g) \circ g^{-1}$ bijecție $\Rightarrow$ h bijecție; $g \circ f$ surjecție, g^{-1} surjecție $\Rightarrow$ $(g^{-1} \circ g) \circ f = f$ surjecție; $f \circ h \circ g$ injecție și g^{-1} injecție $\Rightarrow f \circ h = f \circ h \circ g \circ g^{-1}$ injecție, $f \circ h$ injecție, h^{-1} injecție $\Rightarrow f = f \circ h \circ h^{-1}$ injecție. f fiind injecție și surjecție este bijecție. Cu aceasta am arătat că f, g, h sînt bijecții.

Am folosit aici rezultatele din III.P.25, III.P.26, III.P.27, III.P.28, III.P.29.

III.P.42. a°). Explicitînd se poate scrie:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \leqslant 0 \\ 1 + 2x \text{ pentru } x > 0. \end{cases}$$

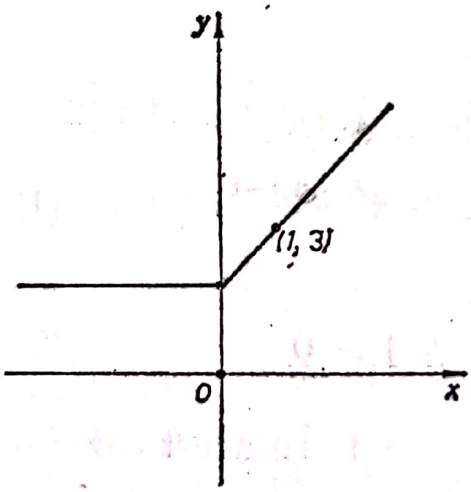


Fig. III.P.42

1°). Avem $f(x) = 1$ pentru orice $x \in (-\infty, 0]$; 2°). $f(x) = 3$ pentru $x = 1$.

b°). Graficul este alcătuit din două semidrepte (vezi fig. III.P.42) care au aceeași origine $I(0, 1)$.

III.P.43. Ecuația se mai poate scrie și sub forma:

$$5^x - \frac{5^3}{5^x} = 20$$

sau, cu notația $5^x = y$ $(y > 0)$:

$$y - \frac{125}{y} = 20$$

sau încă:

$$y^2 - 20y - 125 = 0$$

de unde $y_1 = 25$ și $y_2 = -5$ și de aici $x_1 = 2$, x_2 corespunzătoare lui y_2 nefiind reală.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.44. Împărțind ecuația la $5^x \cdot 7^x$ se obține:

$$-34 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^x + 34 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^x = 0$$

de unde:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^x = \left(\frac{7}{5}\right)^x$$

care conduce la singura soluție reală $x = 0$.

Observație. Ecuația se mai poate scrie:

$$5^{2x}(1-35) - 7^{2x}(1-35) = 0$$

$$-34(5^{2x} - 7^{2x}) = 0 \Rightarrow 5^{2x} = 7^{2x} \Rightarrow x = 0.$$

III.P.45. Avem, evident:

$$0{,}5 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{16}{\sqrt{8}} = 2^4 \cdot 2^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}.$$

astfel că ecuația devine:

$$-20x + x^2 + 61{,}5 = -2{,}5$$

sau, altfel scris:

$$x^2 - 20x + 64 = 0$$

de unde $x_1 = 4$, $x_2 = 16$.

III.P.46. Ecuația se mai scrie:

$$\frac{1}{8} \cdot 4^{2x-3} = (4\sqrt{2})^x$$

sau încă:

$$2^{4x-9} = 2^{\frac{5x}{2}}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde $4x - 9 = \frac{5x}{2}$ care rezolvată prin metodele clasice conduce la $x = 6$.

III.P.47. Ecuația dă;

$$2 + 4 + \ldots + 2x = 30$$

și cum:

$$2 + 4 + \ldots + 2x = x(x + 1)$$

rezultă:

$$x(x + 1) = 30$$

de unde $x = 5$ (rădăcina $x = -6$ nu convine deoarece x trebuie să fie natural).

III.P.48*. a°). Vom observa mai întîi că dacă polinomul r are gradul n atunci cel puțin unul dintre polinoamele p și q are gradul n iar celălalt are gradul mai mic sau egal cu n.

Fie grad $p = n$ iar grad $q = m \leqslant n$.

Dacă $a \in Z$ atunci, evident, $p(a)$, $q(a)$, $r(a) \in Z$ și cum:

$$[p(a)]^4 + [q(a)]^4 = [r(a)]^4$$

rezultă, după ipoteza (1), că $p(a) = 0$ deci a este rădăcină fie a polinomului p fie a polinomului q, $q(a) = 0$.

Vom alege atunci $n + m + 1$ numere întregi distincte. Din cele de mai sus rezultă că sau $p(a_k) = 0$ sau $q(a_k) = 0$ pentru orice $a_k (k = 1, 2, \ldots, n + m + 1)$.

Rezultă atunci cu necesitate una din următoarele situații:

(i) Cel puțin $n + 1$ din numerele a_k sînt rădăcini ale polinomului p;

(ii) Cel puțin $m + 1$ din numerele a_k sînt rădăcini ale polinomului q.

Din situația (i) rezultă că polinomul p este polinomul identic nul; în situația (ii) rezultă că polinomul q este polinomul identic nul.

Scanned with OKEN Scanner

În concluzie, polinoamele $p, q, r \in Z[x]$ care satisfac relația din enunț se pot afla într-una din situațiile:

$$(\alpha)\ p(x) = 0,\ q(x) = \varepsilon r(x), \qquad (\forall)\ x \in R$$
$$(\beta)\ p(x) = \varepsilon r(x),\ q(x) = 0,$$

unde ε poate lua valorile $+1$ sau -1.

b°). Fie acum $p, q, r \in R'[x]$ și satisfăcînd relația din enunț.

Dacă $x_1, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile polinomului r, vom avea egalitățile:

$$[p(x_k)]^4 + [q(x_k)]^4 = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Deoarece $p(x_k)$ și $q(x_k)$ sînt numere reale, din egalitatea de mai sus rezultă cu necesitate $p(x_k) = 0$ și $q(x_k) = 0$. Prin urmare polinoamele p, q și r au aceleași rădăcini. Urmează atunci că polinoamele din $R'[x]$ care satisfac relația din enunț sînt de tipul:

$$p(x) = at(x)$$
$$q(x) = bt(x)$$
$$r(x) = ct(x)$$

unde $t \in R'[x]$ iar $a, b, c \in R$ sînt legate prin relația:

$$a^4 + b^4 = c^4.$$

III.P.49[1]. Modul în care este alcătuit sistemul oferă posibilitatea de a folosi substituțiile $x - y = 2p$ și $x + y = 2q$. Sistemul se scrie:

$$a^{2p} - a^2 + a^p - a = 0, \tag{1}$$
$$b^{2q} - b^4 + b^q - b^2 = 0. \tag{2}$$

Considerînd (1) se obține:

$$a^2(a^{2p-2} - 1) + a(a^{p-1} - 1) = 0$$

sau:

$$a^2(a^{p-1} + 1)(a^{p-1} - 1) + a(a^{p-1} - 1) = 0$$

de unde:

$$a(a^{p-1} - 1)(a^p + a + 1) = 0.$$

De aici $a_1 = 0$, iar x și y pot fi alese arbitrar (discutăm numai despre soluțiile reale), $a_2 = 1$ și x și y pot

Scanned with OKEN Scanner

fi alese arbitrar (deocamdată pentru prima ecuație). Dacă $p = 1$ atunci putem alege pe a arbitrar.

Analog pentru a doua ecuație și combinînd în toate modurile posibile aceste situații obținem soluțiile pentru sistemul propus.

III.P.50. Prima ecuație a sistemului, cu notația $x - y = t$, devine:

$$2^{2t} + 2^t - 2 = 0$$

de unde soluția reală $t = 0$ deci $x = y$ și, folosind acest rezultat, ecuația a doua a sistemului devine:

$$2^{2x+1} + 2^{1-2x} = 5$$

sau, altfel scris:

$$2 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot \frac{1}{2^{2x}} = 5$$

și cu notația $2^{2x} = u$ se obține:

$$2u^2 - 5u + 2 = 0$$

ecuație care are soluțiile $u_1 = 2$ și $u_2 = \frac{1}{2}$ de unde se obține $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = y_2 = -\frac{1}{2}$.

III.P.51. Înlocuind x prin $-x$ și y prin $-y$, se obține același sistem. Prima ecuație a sistemului conduce la $x = 2y$ și deci, înlocuind în ecuația a doua:

$$4y^2 + y^2 = 5$$

de unde $y_1 = 1$ deci $x_1 = 2$ și $y_2 = -1$ și deci $x_2 = -2$.

III.P.52. Ecuațiile se scriu, în condițiile $a > 0$, $a \neq 1$ și $x, y > 0$:

$$\frac{x^2}{y} = a^{2m}$$

$$\frac{x^3}{y^2} = a^{6n}$$

de unde $x = a^{4m-6n}$, $y = a^{6m-12n}$.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.53. Domeniul de existență al soluțiilor este dat de inegalitățile:

$$4{,}5 - x > 0, \quad x > 0$$

adică $x \in (0, 4{,}5)$.

Ecuația devine:

$$x(4{,}5 - x) = 4{,}5$$

de unde $x_1 = 1{,}5$ și $x_2 = 3$ care convin, încadrîndu-se în intervalul de valori posibile.

III.P.54. Trebuie să avem $x > 0$ pentru existența logaritmului $\log_5 \sqrt{x}$ și avem:

$$x^{\log_5 \sqrt{x}} = 5^2$$

sau, logaritmînd:

$$(\log_5 \sqrt{x})(\log_5 x) = 2\log_5 5 = 2$$

sau încă:

$$\frac{1}{2}(\log_5 x)^2 = 2$$

de unde $\log_5 x_1 = 2$ care dă $x_1 = 25$ și $\log_5 x_2 = -2$ care dă $x_2 = 5^{-2} = \frac{1}{25}$.

III.P.55. O primă condiție $y - x > 0$. Ecuația a doua se scrie:

$$y - x = (\sqrt{2})^4 = 4$$

de unde $y = x + 4$. Prin introducerea acestei valori în prima ecuație se obține:

$$3^x \cdot 2^{x+4} = 576 = 3^2 \cdot 2^6.$$

Observînd că $3^x \cdot 2^{x+4} = 2^4 (2 \cdot 3)^x$ obținem imediat soluția $x = 2$ deci $y = 6$.

Verificare:

$$3^2 \cdot 2^6 = 576, \quad \log_{\sqrt{2}} (6 - 2) = 4.$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.56. O primă soluție se observă imediat: dacă $x = 1$ (sau $y = 1$) atunci $x = y = 1$. Presupunînd că sistemul are și alte soluții, aplicăm logaritmii:

$$(x + y) \lg x = 12 \lg y$$

$$(x + y) \lg y = 3 \lg x$$

și rezultă:

$$\frac{12 \lg y}{\lg x} = \frac{3 \lg x}{\lg y}$$

și dacă folosim substituția $t = \frac{\lg x}{\lg y}$ obținem $t_1 = 2$ și $t_2 = -2$. Prima soluție conduce la $x = y^2$ ia a doua la $x = \frac{1}{y^2}$.

Varianta $x = y^2$ conduce la $y^2 + y - 6 = 0$ deci soluția $y_1 = 2$ (soluția -3 nu convine, fiind negativă) de unde $x_1 = 4$, soluție care satisface sistemul, după cum se poate constata cu ușurință.

Varianta $x = \frac{1}{y^2}$ conduce la $y^3 + 6y^2 + 1 = 0$ care, se vede, nu are soluții în numere pozitive.

Rămîn singurele soluții (1, 1), (4, 2).

III.P.57. Sistemul propus se reduce la:

$$\log_4 x^2yz = \log_4 4^2$$

$$\log_9 xy^2z = \log_9 9^2$$

$$\log_{16} xyz^2 = \log_{16} 16^2$$

de unde:

$$x^2yz = 4^2$$

$$xy^2z = 9^2$$

$$xyz^2 = 16^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin înmulțirea celor trei ecuații se obține $xyz = 2 \cdot 3 \cdot 4$ (x, y, z trebuie să fie pozitive, pentru ca logaritmii să existe) și de aici:

$$x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{27}{8}, \quad z = \frac{32}{3}.$$

Verificarea este imediată.

III.P.58. Sistemul propus nu are soluții în mulțimea numerelor reale.

În adevăr, avem:

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{3x+2} + \sqrt{2x+3}$$

$$\sqrt{y+1} - \sqrt{2y+3} = \sqrt{3y+2}.$$

Ecuația:

$$\sqrt{y+1} - \sqrt{2y+3} = \sqrt{3y+2}$$

are soluții reale cînd $y + 1 \geqslant 0$, $2y + 3 \geqslant 0$, $3y + 2 \geqslant 0$ de unde $y \geqslant -\frac{2}{3}$.

Pe de altă parte, $\sqrt{y+1} - \sqrt{2y+3} \geqslant 0$ sau $\sqrt{y+1} \geqslant \sqrt{2y+3}$ deci $y \leqslant -2$ ceea ce contrazice prima inegalitate, stabilită anterior.

Ca atare, sistemul propus nu are soluții.

III.P.59. Aplicînd logaritmii în baza 10 celei de-a doua ecuații obținem:

$$y \lg x = \lg \frac{1}{100} = -2.$$

Cunoscînd suma: $y + \lg x = 1$ și produsul: $y \cdot \lg x = -2$, se ajunge la ecuația: $t^2 - t - 2 = 0$ și se ajunge la soluțiile $\left(\frac{1}{10}, 2\right)$, $(100, -1)$.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.60. Rezolvarea este analoagă, aplicînd însă logaritmii în baza 2.

Obținem soluțiile (4, 2) și (1, 16).

III.P.61. $x = 10^5$, $y = 10$. În adevăr, prima ecuație se mai scrie:

$$\frac{2 \lg x + 5 \lg y}{2 \lg x - 5 \lg y} = 3$$

care conduce la $2 \lg x + 5 \lg y = 6 \lg x - 15 \lg y$ de unde $\lg x = 5 \lg y$ și din a doua ecuație:

$$\frac{2}{5 \lg y} + \frac{5}{4 \lg y} = \frac{33}{20}$$

de unde $\lg y = 1$ adică $y = 10$ și deci imediat $x = 10^5$.

III.P.62. Folosind formula de schimbare a bazei:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

prima ecuație conduce la:

$$\frac{1}{\lg x} + \frac{1}{\lg y} = 5 \text{ sau } \frac{\lg x + \lg y}{\lg x \lg y} = 5$$

și deci, avînd în vedere a doua ecuație, se obține:

$$\lg x \lg y = \frac{1}{4}.$$

Cunoscînd suma ($\lg x + \lg y$) și produsul ($\lg x \cdot \lg y$) obținem cu ajutorul unei ecuații de gradul al doilea $4u^2 - 5u + 1 = 0$, cu $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{4}$, soluțiile:

$$x_1 = 10, \quad y_1 = 10^{\frac{1}{4}} \text{ și } x_2 = 10^{\frac{1}{4}}, \quad y_2 = 10.$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.63. Aplicînd logaritmii celor două ecuații ale sistemului, obținem:

$$\lg x \lg y = 2$$

$$\lg x + \lg y = 3$$

care conduce la soluțiile $x_1 = 10$, $y_1 = 100$ și $x_2 = 100$, $y_2 = 10$, sistemul fiind simetric.

III.P.64. Aplicînd logaritmii primei ecuații găsim:

$$(\lg x) \lg 2 + (\lg y) \lg 3 = \lg 12$$

$$\lg x + \lg y = 3$$

care se rezolvă prin schemele clasice: $(\lg 2 - \lg 3) \lg x = \lg 4 - 2 \lg 3$ și $\lg x = 2$, $x = 10^2$, $y = 10$.

III.P.65. Domeniul de existență al soluțiilor este $[-2, 2] - \{0\}$. Eliminînd numitorii se obține $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Rădăcina $x_1 = -1$ este străină ecuației propuse. Ea satisface ecuația:

$$\frac{1}{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}} - \frac{1}{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}} = 1,$$

sau ecuația:

$$\frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = -1.$$

III.P.66. Domeniul de existență al soluțiilor este $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Izolînd un radical și ridicînd la pătrat se obține:

$$4(4x - 2) = 9$$

de unde $x = \frac{17}{16}$.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.67. Putem scrie succesiv, după ce am încercat pe a ca soluție:

$$x\sqrt{x\sqrt{xx^{\frac{1}{2}}}} = a^{\frac{15}{8}}$$

$$x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} = a^{\frac{15}{8}}$$

$$x\sqrt{xx^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{15}{8}}$$

$$x\sqrt{x^{\frac{7}{4}}} = a^{\frac{15}{8}}$$

$$xx^{\frac{7}{8}} = a^{\frac{15}{8}}$$

$$x^{\frac{15}{8}} = a^{\frac{15}{8}}$$

de unde $x = a$.

III.P.68. Se are în vedere că $x = 1$ constituie soluție a ecuației. Se ajunge la această soluție observând că egalitatea are sens pentru:

$$x \in \left\{\left(-\infty, 1\right] \cup \left[\frac{5}{4}, +\infty\right)\right\} \cap \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}.$$

III.P.69. Putem scrie, pentru $x > 0$:

$$\frac{1}{2} + x = \frac{1}{2x}$$

sau încă:

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

de unde $x_1 = -1$ care nu convine (nu există logaritmii) și $x_2 = \frac{1}{2}$ care convine. În adevăr, făcînd verificarea:

$$\lg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \lg\frac{1}{2} - \lg\frac{1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.70. Soluțiile, dacă există, trebuie căutate în intervalul $(9, +\infty)$.

Ecuația se mai scrie pentru $x > 9$:

$$\lg (x - 9)\ (2x - 1) = \lg 10^2$$

sau:

$$(x - 9)\ (2x - 1) = 100$$

care se rezolvă prin metodele clasice ($x = 13$). Discuția urmează imediat.

III.P.71. Analog. În plus, să se observe asemănarea dintre ecuația propusă și cea de la exercițiul precedent. În fond, este una și aceeași ecuație, numai că scrierea diferă.

III.P.72. Ecuația devine:

$$x^2 - 3x + 15 = 5^2 = 25$$

de unde $x_1 = 5$, $x_2 = -2$. Ambele rădăcini convin întrucît $x^2 - 3x + 15 > 0\ \ (\forall)\ x \in R$.

III.P.73. Întîi $x \geqslant 1$ pentru ca ecuația să aibă rădăcini reale (discutăm ecuațiile de față numai pentru rădăcini reale). Cu substituția $\lg^2 x = y$ ecuația se scrie:

$$y^2 + 3y - 4 = 0$$

de unde $y_1 = -4$ care nu convine și $y_2 = 1$ care conduce la $x = 10$.

III.P.74. Se aplică logaritmii. Se ajunge la $x = -3$ care însă nu convine deoarece indicele radicalului trebuie să fie număr natural mai mare sau egal cu 4. Deci ecuația nu admite soluții.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.75. Putem scrie succesiv:

$$1 + \log_3 (1 + \log_2 x) = 2$$
$$\log_3 (1 + \log_2 x) = 1$$
$$1 + \log_2 x = 3$$
$$\log_2 x = 2$$

de unde $x = 4$.

III.P.76. Folosind formula de schimbare a bazei:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \quad a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1,$$

sau formula:

$$\log_a k = \log_{a^p} k^p,$$

ajungem la ecuația:

$$\log_2 (x+1) - \frac{1}{2}\log_2 (3x-5) = 1$$

sau:

$$\frac{(x+1)^2}{3x-5} = 4$$

adică:

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

de unde $x_1 = 3$, $x_2 = 7$. Soluțiile verifică ecuația. În adevăr:

$$\log_2 (3+1) - \log_4 (3 \cdot 3 - 5) = \log_2 4 - \log_4 4 = 2 - 1 = 1$$

și:

$$\log_2 (7+1) - \log_4 (3 \cdot 7 - 5) = \log_2 8 - \log_4 16 = 1.$$

Observație. Este recomandabil ca după ce s-a aflat o posibilă soluție a unei ecuații, aceasta să fie verificată (chiar de cîteva ori) în ecuația respectivă pentru a înlătura orice confuzii.

Ecuația se mai poate scrie:

$$\log_4 (x+1)^2 - \log_4 (3x-5) = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 4(3x-5).$$

III.P.77. Pentru ca logaritmul de dedesubtul celui de-al doilea radical să existe este necesar ca $2x - 22 > 0$ adică $x > 11$. Pentru ca primul radical să existe este necesar ca $1 - \lg (x-1) \geqslant 0$ adică $x \leqslant 11$, inegalitate ce o contrazice pe cea stabilită anterior. În concluzie, ecuația propusă nu are soluții reale.

Observație. Este mult mai util ca în cazul ecuațiilor de acest tip — cu radicali ori în care intervin radicali — atunci cînd este vorba de aflarea soluțiilor reale să se pună condițiile de existență a soluțiilor; calcule inutile pot fi înlăturate, ca în cazul de față.

III.P.78. Ecuația se mai scrie:

$$\frac{x-1}{10} = \frac{2}{x}$$

de unde:

$$x^2 - x - 20 = 0.$$

Rezolvînd această ultimă ecuație cu ajutorul formulei de rezolvare a ecuației de gradul II obținem $x_1 = 5$, $x_2 = -4$, Rădăcina x_1 convine, dar x_2 nu convine deoarece condiția cere ca $x > 0$, și mai mult, $x > 1$.

III.P.79. Ecuația se mai scrie:

$$1 - \lg (x-1) = 1 + \lg (x+1) \text{ cu } x > 1,$$

de unde:

$$\lg (x-1)(x+1) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

și de aici $x^2 - 1 = 1$ de unde $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$. Rădăcina x_2 nu convine.

III.P.80. Folosind proprietățile proporțiilor, obținem:

$$1 - \lg^2 (x - 1) = 1 - \lg^2 (x + 1), \text{ cu } x > 1$$

de unde:

$$\lg^2 (x - 1) = \lg^2 (x + 1).$$

De aici:

$$[\lg (x - 1) + \lg (x + 1)] [\lg (x - 1) - \lg (x + 1)] = 0$$

adică:

$$x^2 - 1 = 1$$

deci $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, respectiv, $x - 1 = x + 1$, care nu are soluții.

Singura soluție este x_1.

III.P.81. Analog: condiția de existență a soluției este $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) - \{-\sqrt{11}, -\sqrt{1{,}01}, \sqrt{1{,}01}, \sqrt{11}\}$. Se obține $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$.

III.P.82. După eliminarea radicalului obținem:

$$f(x) = 1 - \log_8 (x^2 - 1) = 0$$

de unde $x_1 = 3$ și $x_2 = -3$. Convin ambele soluții, întrucît $f(-x) = f(x)$.

III.P.83. Obținem aceleași soluții ca în problema precedentă.

III.P.84. Avem succesiv:

$$\log_{a_{n-1}} \log_{a_{n-2}} \dots \log_{a_1} x = a_n{}^b$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n{}^b$$
$$\cdot\cdot\cdot$$
$$a_2$$
$$x = a_1$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.85. Folosind formula schimbării de bază, ecuația devine:

$$n \log_a x - \frac{n+1}{2} \log_a x = \sqrt{\log_a x^n},\ n \in N^*$$

sau încă:

$$\frac{n-1}{2} \log_a x = \sqrt{n \log_a x},\ \text{cu condiția } \log_a x \geqslant 0,$$

deci:

$$\frac{(n-1)^2}{4} \log_a^2 x = n \log_a x$$

de unde $x_1 = 1$ și:

$$x_2 = a^{\frac{4n}{(n-1)^2}},\ \text{pentru}\ n > 1.$$

III.P.86. Egalînd exponenții, găsim:

$$1 - \log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} x + 1.$$

Dar, $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$ astfel că ecuația admite drept soluție orice număr real și strict pozitiv, cu condiția $x < 2$. În acest caz, exponenții sub formă de radicali au sens.

III.P.87. Cum:

$$a^{\log_a x} = x$$

și:

$$x^{\log_x a} = a$$

rezultă $x = a$.

III.P.88. Deoarece (vezi III.P.142):

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Scanned with OKEN Scanner

și:

$$x + x^2 + \ldots + x^n = x(1 + x + \ldots + x^{n-1})$$

ecuația se mai scrie:

$$\log_a \left(x \frac{x^n - 1}{x - 1} \right) + \log_a (1 - x) = \log_a x(1 - x^n),$$

care este o identitate, în condițiile $a \in R_0^+ - \{1\}$, $x \in (0, 1)$.

III.P.89. Ecuația poate eventual furniza soluții atunci cînd:

$$x^3 - 3x + 2 > 0,$$

$$x^2 + x - 2 > 0,$$

$$x - 1 > 0.$$

Dar:

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x + 2)(x - 1) =$$

$$= (x - 1)^2 (x + 2)$$

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

deci $x > 1$.

În această din urmă ipoteză ecuația se scrie:

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} = x - 1$$

care se verifică pentru orice x din mulțimea $(1, +\infty)$.

III.P.90*. Mulțimea posibilă în care se pot găsi soluțiile este $(1, +\infty)$.

În acest caz rezultă:

$$\frac{x^{n+1} - x}{x^2 + x - 2} = x - 1$$

care conduce la:

$$x(x^n - 1) = (x - 1)(x - 1)(x + 2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $n = 1$ atunci ecuația se scrie:

$$(x - 1)(x + 2) = x$$

adică $x_1 = \sqrt{2}$ care verifică (cealaltă rădăcină nu verifică, nefiind cuprinsă în intervalul $(1, +\infty)$).

Dacă $n = 2$ atunci:

$$x(x^2 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x + 2)$$

sau încă:

$$x(x + 1) = (x - 1)(x + 2)$$

care nu se verifică pentru nici o valoare reală a lui x.

Pentru $n \geqslant 3$, potrivit dezvoltării după *Newton*, egalitatea:

$$(a + 1)[(a + 1)^n - 1] = a^2(a + 3)$$

(în ipoteza că $x = 1 + a$, a strict pozitiv) conduce la:

$$a^2(a + 3) = (a + 1)[(a + 1)^n - 1] = (a +$$

$$+ 1)(1 + a + C_n^1 a^2 + C_n^2 a^3 + \dots) \geqslant$$

$$\geqslant (a + 1)\left(1 + a + na^2 + \frac{n(n - 1)}{2} a^3\right) > a^3 + 3a^2$$

deci ecuația propusă pentru $n > 3$ nu are soluții reale.

Insistăm de fiecare dată cu precizarea că analizăm numai existența soluțiilor reale deoarece, adoptînd alte definiții, alte notații, un sistem poate admite nu numai soluții reale, dar și complexe, sau chiar mai mult, putem considera ecuații care nu mai sînt rezolvate în cadrul numerelor reale sau complexe, de exemplu ecuațiile cu mulțimi, pe care le-am analizat, cu ajutorul cîtorva exemple, în capitolele anterioare.

În legătură cu aceasta specificăm că funcția log poate fi definită și pe mulțimea numerelor reale negative, chiar pe mulțimea C a numerelor complexe însă în cadrul discuției de față, avînd în vedere scopul lucrării, nu studiem aceste lucruri. De altfel, este necesară o teorie întreagă din corpul căreia se distinge cu precădere teoria funcțiilor de mai multe variabile ce face

Scanned with OKEN Scanner

obiectul *Analizei matematice superioare*, alături de alte discipline (ca, de exemplu, *Analiza funcțională*, *Teoria distribuțiilor*, *Ecuațiile funcționale* etc.).

III.P.91. $x = \frac{\lg n}{2}$ cu $n \neq 100$.

III.P.92[1]. Cu notația $\log_a x = y$ inecuația se scrie:

$$\frac{y}{y^2 - y - 2} > 0$$

care conduce la $y \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$ și deci $-1 < \log_a x < 0$ respectiv $\log_a x > 2$ de unde rezultă:

— pentru $a > 1$, $\frac{1}{a} < x < 1$ sau $x > a^2$;

— pentru $0 < a < 1$, $1 < x < \frac{1}{a}$ și $x < a^2$.

III.P.93. Este cazul clasic în care baza este subunitară atît pentru baza puterii cît și pentru logaritmi. Se obține $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

III.P.94. Inecuația ia și forma:

$$\frac{1}{\log_x m} + \frac{1}{\log_x m + 1} + \frac{1}{\log_x m} \cdot \frac{1}{\log_x m - 1} > 0$$

și nu ne rămîne altceva de făcut decît să notăm $\log_x m = y$ și să rezolvăm o inecuație clasică. Se ajunge la $\frac{y}{y^2 - 1} > 0$ și deci $m > x$ cînd $x > 1$ sau $x > m$ cînd $0 < x < 1$; $-1 < y < 0$ conduce la $\frac{1}{x} < m < 1$ cînd $x > 1$ și $1 < m < \frac{1}{x}$ cînd $0 < x < 1$.

III.P.95. Pentru ca radicalul să existe este necesar ca $\lg x$ să fie un număr natural mai mare sau egal cu 2, deci $x = 10^t$ unde $t \in N^* - \{1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd logaritmii obținem:

$$x^4 = 1$$

care dă $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ iar x_3 și x_4 date de $x^2 + 1 = 0$, ecuație care nu are rădăcini reale. Deoarece nici una dintre aceste 4 rădăcini nu se încadrează în condiția stabilită anterior, rezultă că ecuația nu are soluții. (Rezolvată formal, s-ar ajunge la $x^4 = 1$ și deci $x_{1,2} = \pm 1$.)

Observație. Potrivit definițiilor curente, simbolul $\sqrt[n]{f(x)}$ există dacă n este număr natural par și mai mare sau egal cu 2 iar $f(x) \geqslant 0$, pe domeniul de definiție sau impar și mai mare sau egal cu 3 și $f(x) \geqslant 0$ sau $f(x) \leqslant 0$. Din păcate, se mai întîlnesc în unele locuri indici fracționari, chiar negativi ori expresii negative sub radical, în discuții de acest gen, fapt ce generează confuzii. Să fie oare definiția de vină?

III.P.96. Aplicînd logaritmii se obține:

$$\frac{\lg x\,(\lg x + 8)}{3} = \lg x + 2 \text{ sau}$$

$$(\lg x)^2 + 5 \lg x - 6 = 0,$$

cu $\lg x_1 = -6$ deci $x_1 = 10^{-6}$ și $\lg x_2 = 1$, deci $x_2 = 10$. Ambele soluții verifică ecuația dată.

III.P.97. Punînd condiția $x - 2 > 0$ se ajunge ușor la $x = 2 + \frac{1}{3^{40}}$.

III.P.98. Folosind formula de schimbare a bazei obținem: $x_1 = 4$, $x_2 = \sqrt{2}$.

III.P.99. Evident, $\lg 0{,}001 = -3$ astfel că ecuația, în condiția $x > 1$ se scrie:

$$2 \lg x + 2 \lg 5 - 4 = -2 \lg(x - 1) \text{ cu } x > 1$$

de unde $x^2(x-1)^2 = \frac{10^4}{25}$ adică:

$$(x^2 - x - 20)\,(x^2 - x + 20) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația:

$$x^2 - x + 20 = 0$$

nu are rădăcini reale, iar cealaltă ecuație dă soluția admisibilă $x = \frac{1 + \sqrt{81}}{2} = 5$.

III.P.100. Avem în vedere că:

$$a^{\log_a b} = b$$

astfel că ecuația devine:

$$x^2 - 4 = 5 \text{ cu } x > 2.$$

de unde $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Soluția x_2 nu convine deoarece x trebuie să fie pozitiv, fiind baza logaritmului.

III.P.101. Se obține soluția $x = 2$, egalînd fiecare factor cu 1. Pentru celelalte soluții trebuie rezolvată ecuația:

$$\log_3 (x + 1) \cdot \log_3 \sqrt{4x + 1} \cdot \log_3 \sqrt[3]{13x + 1} = 1.$$

III.P.102. Analog. Se obține $x = 2$.

III.P.103. Avem, după calcule:

$$2^{x^2 - 3x} = 2^0$$

de unde $x_1 = 0$ și $x_2 = 3$ care verifică ecuația.

III.P.104. Se aplică logaritmii în baza 10 și se obține:

$$\lg x (\lg^3 x - 2 \lg x + 1{,}5) = 0{,}5.$$

și pentru $x = 10$, $\lg x = 1$ și deci:

$$1 \cdot (1 - 2 + 1{,}5) = 0{,}5.$$

Dacă notăm $\lg x = t$, atunci:

$$y^4 - 2y^2 + 1{,}5y - 0{,}5 = 0$$

sau:

$$(y - 1)(2y^3 + 2y^2 - 2y + 1) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația admite $y = 1$ și deci $\lg x_1 = 1$, $x_1 = 10$ și rădăcina α,

$$\alpha \in (-2, -1).$$

Deci:

$$x_2 \in \left(\frac{1}{100}, \frac{1}{10}\right).$$

III.P.105. Ecuația devine:

$$2^{x-2} + 1 = 0{,}2\,(4^{x-2} + 9)$$

sau încă:

$$5(y + 1) = y^2 + 9$$

cu notația $2^{x-2} = y$ de unde $y_1 = 4$, $y_2 = 1$ adică $x_1 = 4$ și $x_2 = 2$. Ambele soluții verifică ecuația.

III.P.106. Rezultă $x^2 + 21 = 10x$ după ce s-a scris ecuația sub forma: $\lg 10^{\lg(x^2+21)} = \lg 10x$ de unde $x_1 = 3$ și $x_2 = 7$ care verifică ecuația.

III.P.107. Ecuația se rezolvă imediat observînd că $\log_x 5x = 1 + \log_x 5$ și că făcînd substituția $\log_x 5 = y$ se ajunge la o ecuație de gradul II:

$y^2 - 6y + 5 = 0$ cu $\log_x 5 = 1 \Rightarrow x_1 = 5$ și $\log_x 5 = 5 \Rightarrow x_2 = \sqrt[5]{5}$.

III.P.108. $x = a$. Se transformă ecuația trecînd la logaritm în baza a.

III.P.109. $x = a$.

III.P.110. Ecuația se mai poate scrie:

$$5^{\lg x}(1 + 5^{-1}) = 3^{\lg x}(3 + 3^{-1}) \text{ și } \left(\frac{5}{3}\right)^{\lg x} = \left(\frac{5}{3}\right)^2,$$

de unde $x = 100$.

III.P.111. $x = a^2$. Se procedează ca în exercițiul precedent unde $a = 10$.

III.P.112[1]. Punînd $\log_a x = t$ se ajunge la ecuația $|t + 1| + |t - 1| = 2a\sqrt{t}$ cu $t > 0$ cu $t_1 = a^2, t_2 = \frac{1}{a^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.113. $x = 2$, rădăcină a ecuației:

$$x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x} = 2^{\frac{25}{12}}.$$

III.P.114. $x = 16$, rădăcina reală a ecuației:

$$x^7 = (2^4)^7.$$

III.P.115[1]. Logaritmînd, găsim:

$$\lg \lg \lg x = 0$$

de unde $x = 10^{10}$.

III.P.116. Ecuația se scrie:

$$(x + 1)^2 = mx$$

sau încă:

$$x^2 + (2 - m)x + 1 = 0. \tag{1}$$

Pentru ca ecuația din enunțul problemei să aibă soluții reale este necesar ca:

$$x + 1 > 0, \tag{2}$$

$$mx > 0 \tag{3}$$

Ecuația (1) are rădăcini reale dacă:

$$(2 - m)^2 - 4 = m^2 - 4m \geqslant 0$$

adică $m \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$.

Dacă $m < 0$ atunci $x < 0$ (din(3)) deci, avînd în vedere (2), rădăcina trebuie să se afle în intervalul $(-1, 0)$.

Dar rădăcinile ecuației (1) sînt:

$$x_{1,2} = \frac{m - 2 \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2}$$

deci trebuie rezolvat sistemul de inecuații:

$$m < 0$$

$$-1 < \frac{m - 2 \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2} < 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $m < 0$, inegalitatea corespunzătoare pentru x_1 se mai scrie:

$$-2 < m - 2 + \sqrt{m^2 - 4m} < 0$$

sau:

$$0 < m + \sqrt{m^2 - 4m} < 2$$

care se mai scrie:

$$\begin{cases} \sqrt{m^2 - 4m} < 2 - m \text{ cu } 2 - m > 0, \\ -m < \sqrt{m^2 - 4m} \text{ cu } -m > 0. \end{cases}$$

Ridicînd la pătrat se obține:

$$m^2 - 4m < 4 - 4m + m^2 \Rightarrow 0 < 4,$$

respectiv:

$$m^2 < m^2 - 4m \Rightarrow -4m > 0$$

ceea ce înseamnă că pentru $m \in (-\infty, 0)$ ecuația logaritmică este satisfăcută de:

$$x_1 = \frac{m - 2 + \sqrt{m^2 - 4m}}{2}.$$

Pentru $m = 0$ nu se poate pune problema întrucît $\log_a(mx)$ nu are sens.

Dacă se consideră rădăcina x_2:

$$-2 < m - 2 - \sqrt{m^2 - 4m} < 0$$

sau:

$$0 < m - \sqrt{m^2 - 4m} < 2$$

s-ar ajunge la:

$$\begin{cases} m - \sqrt{m^2 - 4m} < 2 \Rightarrow -\sqrt{m^2 - 4m} < 2 - \\ \qquad - m, \text{ cu } m < 0, \\ 0 < m - \sqrt{m^2 - 4m}, \text{ imposibil pentru că } m < 0. \end{cases}$$

Dacă $m > 4$, trebuie $x > 0$ pentru ca $\log_a(mx)$ să aibă sens; indiferent care este valoarea lui m,

$$\frac{m - 2 \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2} > 0$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru că:

$$m-2>0,\ \sqrt{m^2-4m}\geqslant 0 \text{ și deci } m-2+$$
$$+\sqrt{m^2-4m}>0 \text{ respectiv}$$
$$m-2>0 \text{ și } m-2>\sqrt{m^2-4m} \Rightarrow m^2-$$
$$-4m+4>m^2-4m$$

și deci;

$$m-2-\sqrt{m^2-4m}>0.$$

În concluzie:

— dacă $m<0$, ecuația admite o singură rădăcină;

— dacă $m>4$, ecuația admite două rădăcini distincte pozitive;

— dacă $m=4$, rădăcinile se confundă cu $x=1$;

— dacă $m\in(0,4)$, ecuația nu are rădăcini reale.

III.P.117. Condițiile de existență ale soluțiilor sînt $x>-1$ și $x>-\frac{1}{m}$ pentru $m>0$ sau $x<-\frac{1}{m}$ pentru $m<0$.

Ecuația se reduce la $x^2-(m-3)x+1=0$, care are rădăcini reale pentru $m\in(-\infty,\ 1]\cup[5,+\infty)$. Pentru $m<0$, folosind substituția $y=\frac{x+1}{x+\frac{1}{m}}$ se obține ecuația $(m-1)(2m-1)y^2-m(m-1)(m+1)y+m^2\cdot(m-1)=0$.

Cum pentru $m<0$ rezultă $P_y<0$, (P_y reprezentînd produsul rădăcinilor ecuației în y) ecuația logaritmică are o singură soluție reală (deoarece ecuația în y are o singură soluție negativă și deci $x+1>0$, $x+\frac{1}{m}<0$; nu putem avea $\frac{1}{m}<x<-1$ deoarece $m<0$). Pentru $m\in(0,\ 1)$, condițiile inițiale se reduc la $\Delta>0$ și $x>-1$ (Δ fiind discriminantul ecuației în x).

Pentru $m\in(0,\ 1)$, condițiile inițiale se reduc la $\Delta>0$ și $x>-1$.

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz, transformata ecuației este, prin $y = x + 1$:

$$y^2 - (m-1)\,y + (m-1) = 0,$$

cu $P_y < 0$ pentru $m \in (0, 1)$ și deci ecuația logaritmică admite tot o singură rădăcină reală.

Dacă $m > 5$, se folosește substituția stabilită pentru $m < 0$; cum $P_y > 0$, $S_y > 0$ pentru $m > 5$, ecuația logaritmică are două rădăcini reale distincte.

Pentru $m = 1$, se obține ecuația:

$$\lg(x+1) + \lg(x+2) = \lg(x+1)$$

și deci:

$$\lg(x+2) = 0,\ x = -1, \text{ care nu convine.}$$

Pentru $m = 0$, ecuația se reduce la:

$$\lg(x+1) + \lg(x+2) = 0$$

și are soluția $x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} > -1$.

Pentru $m = 5$, ecuația se reduce la:

$$\lg(x+1) + \lg(x+2) = \lg(5x+1)$$

cu rădăcinile $x_1 = x_2 = 1$ (se recomandă să se facă verificări pentru $m < 0$, $m \in (0, 1)$ și $m > 5$.)

Observație. Ecuația adusă la forma:

$$x^2 + 3x + 1 = mx \text{ cu } x > -1,\ mx + 1 > 0,$$

se poate discuta mult mai ușor dacă se consideră arcul de parabolă $y = x^2 + 3x + 1$, pentru $x > -1$, și dreptele care trec prin originea aceluiași sistem de referință.

Tangentele duse din O la arcul de parabolă se obțin pentru $m = 1$ și $m = 5$, punctele de tangență fiind:

$$T_1(-1, -1)\ (m = 1) \text{ și } T_2(1, 5)\ (m = 5).$$

Pentru $m < 0$, toate dreptele ce trec prin O taie arcul de parabolă într-un singur punct. Același lucru

Scanned with OKEN Scanner

cînd $m \in (0, 1)$. Dacă $m = 0$, arcul de parabolă este tăiat într-un punct de ordonată nulă.

Pentru $m \in (1, 5)$ dreptele care trec prin origine nu taie arcul de parabolă.

Analog pentru $m \geqslant 5$.

III.P.118[1]. a°). Observăm că:

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 = (\log_2 x - 1)(\log_2 x - 4), \text{ cu } x > 0$$

de unde domeniul maxim de definiție $(0, 2] \cup [16, +\infty)$.

b°). Din graficul funcției $y = u^2 - 5u + 4$ deducem codomeniul funcției f. Acesta este $[0, +\infty)$.

c°). Numărul cerut se găsește rezolvînd ecuația:

$$f(x) = m.$$

1°). Dacă $m = 0$ există două puncte de intersecție și anume $(2, 0)$ și $(16, 0)$.

2°). Pentru $m < 0$ nu există nici un punct de intersecție cu graficul.

3°). Dacă $m > 0$ există două puncte de intersecție cu graficul, ale căror coordonate se obțin rezolvînd ecuația:

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 = m^2,$$

cu:

$$x_1 = 2^{\frac{5-\sqrt{4m^2+9}}{2}} \text{ și } x_2 = 2^{\frac{5+\sqrt{4m^2+9}}{2}}.$$

III.P.119. a°), b°). Expresia în t este reală pentru $t \in (-\infty, -1] \cup (0, 1] \cup (2, +\infty)$. Urmează deci că expresia în x este reală pentru intervalul:

$$\left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, 2] \cup (4, +\infty).$$

și $E'(x) = 1$ pentru $x = \sqrt{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.120. a°). $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}$.

b°). Nu convine nici o soluție de mai sus deoarece $\lg(x-1)$ nu există pentru $x = 0$, respectiv $x = \frac{2}{3}$.

c°). Convine numai $x_2 = \frac{2}{3}$.

III.P.121. Faptul este evident, folosind proprietățile logaritmilor și amintindu-ne că relația la care ajungem:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

nu reprezintă de fapt decît relația lui *Pitagora*.

III.P.122. Cu condițiile de existență $m > 0$, $m \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$ ale logaritmilor, relația capătă și forma $bc = m^2$.

III.P.123. Este posibilă, de exemplu, pentru $x = 0$. Este posibilă și pentru $x = k\pi$, $k \in Z$.

III.P.124. Se ajunge la $y^3 - 9y^2 + 2y + 24 = 0$ de unde $y_1 = \log_4 x_1 = 2$; și de aici $x_1 = 16$ etc.

III.P.125. Condițiile de existență a soluțiilor sînt:

$$a > 0,\ m + x > 0,\ m + x \neq 1,\ x \neq \frac{1}{a},\ x > 0.$$

Ecuația logaritmică se înlocuiește prin ecuația $x^2 - (a - 2m)x + m^2 = 0$, care are rădăcini de același semn, produsul fiind pozitiv (cînd ele sînt reale).

Discriminantul ecuației algebrice este $a^2 - 4am \geqslant 0$ pentru $m \leqslant \frac{a}{4}$.

Condiția $m + x > 0$ se traduce prin $x > -m$. Dacă se folosește substituția $y = x + m$ și deci $x = y - m$, se obține ecuația $y^2 - ay + am = 0$ care trebuie să aibă rădăcinile strict pozitive.

Dar, pentru $m < 0$ (a fiind pozitiv) ecuația are o singură rădăcină reală pozitivă.

Scanned with OKEN Scanner

Condiția $m + x \neq 1$ se traduce prin $x \neq 1 - m$ și deci $m \neq 1 - \frac{1}{a}$.

Condiția $x \neq \frac{1}{a}$ conduce la $m \neq \pm 1 - \frac{1}{a}$.

Cum semnul expresiei $1 - \frac{1}{a}$ (cu $a > 0$) depinde de a, se consideră situațiile: $a \in (0, 1)$, $a = 1$, $a \in (1, 2)$, $a = 2$: $a \in (2, +\infty)$.

1°). Pentru $a \in (0, 1)$.

m	Rădăcini
$-\infty$	
	o rădăcină
$-1-\frac{1}{a}$	o rădăcină
	o rădăcină
$1-\frac{1}{a}$	o rădăcină
	o rădăcină
0	o rădăcină
	2 rădăcini
$\frac{a}{4}$	2 rădăcini confundate

2°). Pentru $a = 1$.

m	Rădăcini
$-\infty$	
	o rădăcină
-2	o rădăcină
	o rădăcină
0	nici o rădăcină
	2 rădăcini
$\frac{1}{4}$	2 rădăcini confundate

3°). Pentru $a \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

m	Rădăcini
$-\infty$	
	o rădăcină
$-1-\frac{1}{a}$	o rădăcină
	o rădăcină
0	o rădăcină
	2 rădăcini
$1-\frac{1}{a}$	o rădăcină
	2 rădăcini
$\frac{a}{4}$	2 rădăcini confundate

4°). Pentru $a = 2$.

m	Rădăcini
$-\infty$	
	o rădăcină
$-\frac{3}{2}$	nici o rădăcină
	o rădăcină
0	o rădăcină
	2 rădăcini
$\frac{1}{2}$	2 rădăcini confundate

Scanned with OKEN Scanner

III.P.126. Fie $\lg x = y$ și deci $y = -\frac{1}{2}$ și $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

III.P.127. Fie $y = \log_2 x$. Se ajunge la $y_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ și deci $x_{1,2} = 2^{\pm\sqrt{2}}$.

III.P.128[1]. Să observăm că dacă $x, y \geqslant 0$ atunci:

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt[2]{xy} \tag{1}$$

cu egalitate cînd $x = y$. În adevăr, inegalitatea evidentă:

$$(\sqrt[2]{x} - \sqrt[2]{y})^2 \geqslant 0$$

conduce la inegalitatea anterioară. Egalitate cînd $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ adică atunci cînd $x = y$.

Facem în inegalitatea (1) $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{z+t}{2}$ și obținem:

$$\frac{u+v+z+t}{4} \geqslant \sqrt{\frac{u+v}{2} \cdot \frac{z+t}{2}}$$

și avînd în vedere (1) găsim:

$$\frac{u+v+z+t}{4} \geqslant \sqrt[4]{uvzt}. \tag{2}$$

Egalitatea are loc atunci cînd:

$$\frac{u+v}{2} = \frac{z+t}{2}$$

și $u = v$, $z = t$ deci $u = v = z = t$.

Scanned with OKEN Scanner

Facem acum $t = \frac{u+v+z}{3}$ și obținem:

$$\frac{u+v+z+\frac{u+v+z}{3}}{4} \geqslant \sqrt[4]{uvz\left(\frac{u+v+z}{3}\right)}$$

sau, după oarecari calcule și simplificări:

$$\frac{u+v+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{uvz}$$

cu egalitate cînd $u = v = z$. Aici, peste tot $u, v, z, t \geqslant 0$.

III.P.129*. Continuăm raționamentul inițiat în soluția problemei III.P.128.

Raționăm prin inducție matematică.

Pentru $n = 2, 3, 4$ am văzut că se verifică, egalitatea avînd loc atunci cînd variabilele sînt egale între ele. Presupunem inegalitatea valabilă pentru 2^n numere, adică:

$$x_1 x_2 \ldots x_{2^n} \leqslant \left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^n}}{2^n}\right)^{2^n}$$

cu egalitate pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2^n}$.

Este clar că:

$$(x_1 x_2 \ldots x_{2^n})\,(x_{2^n+1} \ldots x_{2^{n+1}}) \leqslant \left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^n}}{2^n}\right)^{2^n} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{x_{2^n+1} + \ldots + x_{2^{n+1}}}{2^n}\right)^{2^n} \leqslant \left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^{n+1}}}{2^{n+1}}\right)^{2^{n+1}}$$

deci inegalitatea este valabilă pentru 2^{n+1} numere, în ipoteza că ea este valabilă pentru 2^n numere, deci, potrivit principiului inducției matematice, pentru orice 2^k numere, $k \in N^*$, egalitatea avînd loc pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2^k}$.

Pentru un n oarecare luăm pe $k \in N^*$ astfel încît $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$ (un astfel de număr există) iar cele $2^k - n$ numere rămase, reținînd primele $n < 2^k$ numere,

le facem egale cu media aritmetică t a celor n. În felul acesta:

$$x_1x_2 \dots x_nt^{2^k-n} \leqslant \left[\frac{x_1 + \dots + x_n + (2^k - n)\,t}{2^k}\right]^{2^k} = t^{2^k}$$

de unde:

$$x_1x_2 \dots x_n \leqslant t^n = \left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)^n$$

(demonstrația aparține chiar lui *Cauchy* și este considerată, dintre cele cunoscute, a fi cea mai elegantă).

Putem da, spre exemplificare, a doua demonstrație. Oricare ar fi $x > 0$ și $n \in N^*$, are loc inegalitatea:

$$(n-1)x^n + 1 \geqslant nx^{n-1}.$$

În adevăr, inegalitatea de mai sus se mai scrie:

$$nx^{n-1}(x-1) \geqslant x^n - 1 = (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)\,(x-1)$$

sau:

$$nx^{n-1} \geqslant x^{n-1} + \dots + 1 \text{ pentru } x \geqslant 1$$

și:

$$nx^{n-1} \leqslant x^{n-1} + \dots + 1 \text{ pentru } x \leqslant 1.$$

Dacă $x > 1$ evident $x^{n-1} > x^i$, $i = 0, 1, \dots, n-2$, deci $nx^{n-1} > x^{n-1} + \dots + 1$.

Dacă $x = 1$, are loc egalitate, de altfel singurul caz cînd are loc o asemenea situație.

Pentru $x < 1$, $x^{n-1} < x^i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$, adică $nx^{n-1} < x^{n-1} + \dots + 1$ deci inegalitatea este adevărată pentru orice $x \in (0, +\infty)$, $n \in N^*$.

Pentru două variabile am văzut anterior că inegalitatea mediilor este verificată, cu egalitate cînd numerele sînt egale.

Raționăm prin inducție. Presupunem că pentru $n = k - 1$ putem scrie:

$$x_1 + \dots + x_{k-1} \geqslant (k-1)\sqrt[k-1]{x_1 \dots x_{k-1}}$$

cu egalitate pentru $x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1}$.

Scanned with OKEN Scanner

Adunînd ambilor membri pe x_k obținem:

$$x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k \geqslant (k-1)\,(x_1 \ldots x_{k-1})^{\frac{1}{k-1}} + x_k \quad (1)$$

iar în inegalitatea:

$$(n-1)x^n + 1 \geqslant nx^{n-1}$$

înlocuim pe n prin k și x prin:

$$x = \left(\frac{x_1 \ldots x_{k-1}}{x_k^{k-1}}\right)^{\frac{1}{k(k-1)}}$$

astfel că:

$$1 + (k-1)\,(x_1 \ldots x_{k-1})^{\frac{1}{k-1}} \cdot \frac{1}{x_k} \geqslant k(x_1 \ldots x_k)^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{x_k}$$

adică:

$$(k-1)\,(x_1 \ldots x_{k-1})^{\frac{1}{k-1}} + x_k \geqslant k(x_1 \ldots x_k)^{\frac{1}{k}}$$

sau, în definitiv, avînd în vedere (1):

$$x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k \geqslant (k-1)\,(x_1 \ldots x_{k-1})^{\frac{1}{k-1}} +$$

$$+ x_k \geqslant k(x_1 \ldots x_k)^{\frac{1}{k}}.$$

Deci:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geqslant k\sqrt[k]{x_1 \ldots x_k}.$$

Inegalitatea fiind valabilă și pentru k este, în virtutea principiului inducției matematice, valabilă pentru orice $n \in N^*$. Există egalitate pentru:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$$

și:

$$\frac{x_1 \ldots x_{n-1}}{x_n^{n-1}} = 1$$

deci pentru $x_1 = \ldots = x_n$.

Scanned with OKEN Scanner

III.P.130[1]. Avem, potrivit inegalității lui *Cauchy*:

$$x + y + z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz},$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$$

astfel că înmulțind aceste două relații o obținem pe cea din enunț.

Egalitate pentru $x = y = z$.

Observație. Se știe că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, $(a, b > 0)$ și deci:

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geqslant 3 \cdot 2,$$

$$3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geqslant 9,$$

inegalitate care conduce la:

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9.$$

III.P.131[2]. Demonstrația este analoagă cu cea de la exercițiul precedent cu diferența că în loc de 3 considerăm n numere.

Observație. Fie:

$$E = (x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) =$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{de } n \text{ ori}} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} + \ldots + \frac{x_1}{x_n} +$$

$$+ \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1} + \frac{x_n}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}} =$$

$$= n + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \ldots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}}\right),$$

în care sînt $\frac{n(n-1)}{2}$ paranteze.

Scanned with OKEN Scanner

Cum fiecare sumă din paranteză este cel puțin egală cu 2, rezultă:

$$E \geqslant n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2$$

și deci:

$$E \geqslant n^2.$$

III.P.132[3]. Fie a_k, b_k numere reale, $k = 1, \ldots, n$. Pentru orice x real este evident că:

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \ldots + (a_nx + b_n)^2 \geqslant 0 \tag{1}$$

cu egalitate cînd:

$$x = -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2} = \ldots = -\frac{b_n}{a_n} \tag{2}$$

(se observă că pentru cazul în care cîteva numere din cele $2n$ sînt egale cu 0, inegalitatea nu-și schimbă structura, doar numărul acestor numere scade deci putem presupune $a_k \neq 0$, $(\forall)\, k \in \overline{1, n}$).

Discriminantul formei pătratice din inegalitatea (1) este:

$$D = 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\sum_{k=1} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Pentru ca inegalitatea (1) să fie valabilă pentru orice x real este necesar ca D să fie mai mic sau egal cu 0, deoarece coeficientul lui x^2 este pozitiv de unde și inegalitatea.

Egalitatea are loc atunci cînd sîntem în condiția (2).

III.P.133[1]. Folosim identitatea (vezi III.P.152):

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

În continuare:

$$\begin{aligned}
&C_k^k = C_{k+1}^{k+1},\\
&C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1} = C_{k+2}^{k+1},\\
&C_{k+2}^k + C_{k+2}^{k+1} = C_{k+3}^{k+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_{k+m-1}^k + C_{k+m-1}^{k+1} = C_{k+m}^{k+1}.
\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Adunînd membru cu membru obținem, după reduceri:

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1}$$

și cu notațiile:

$$k + m = p,\ k + 1 = n$$

tocmai egalitatea din enunț.

III.P.134[1]. Scriem că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verifică ecuația:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

în felul următor:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Efectuînd înmulțirile în al doilea membru și egalînd coeficienții acelorași puteri ale lui x obținem tocmai relațiile căutate.

Formulele lui *Vieta* se mai numesc și *relațiile dintre rădăcini și coeficienți*, denumire sub care le vom întîlni frecvent citate în această lucrare.

III.P.135. Avem, potrivit formulei lui *Newton*:

$$(1 - 1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n,$$

$$2^n = (1 + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n.$$

Adunînd și respectiv scăzînd cele două relații obținem egalitățile din enunț.

III.P.136. Egalitatea se poate dovedi prin inducție matematică, sau pornind de la egalitatea $\Sigma(k + 1)^4 = \Sigma k^4 + 4\Sigma k^3 + 6\Sigma k^2 + 4\Sigma k + \Sigma 1$ sau $\Sigma(k + 1)^4 - \Sigma k^4 = 4\Sigma k^3 + n(n + 1)\,(2n + 1) + 2n(n + 1) + n$.

III.P.137. Scăzînd a doua egalitate din prima obținem:

$$5y + 4z = -1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind a doua egalitate cu 2 și scăzînd din a treia găsim:

$$5y + 4z = 0$$

deci sistemul propus nu are soluții.

III.P.138. Inecuația nu are soluții reale.

III.P.139. Sistemul, în condițiile $x, y > 0$, se mai scrie:

$$x + y = 13$$
$$x = 100y$$

de unde:

$$x = \frac{1300}{101} \text{ și } y = \frac{13}{101}.$$

III.P.140*. Să arătăm mai întîi că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, atunci:

$$\left(\frac{\Sigma x_1 x_2 \ldots x_{k-1}}{C_n^{k-1}}\right)^{\frac{1}{k-1}} \geqslant \left(\frac{\Sigma x_1 \ldots x_k}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}} \qquad (1)$$

sau, altfel scris:

$$\left(\frac{\Sigma x_1 x_2 \ldots x_{k-1}}{C_n^{k-1}}\right)^{\frac{k}{k-1}} \leqslant \left(\frac{\Sigma x_1 \ldots x_k}{C_n^k}\right), \ (k \leqslant n), \qquad (2)$$

cu egalitate pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Fie c_1 și c_2 numere reale, a_1, a_2, α, β și x_i, $i = 1, \ldots, n$, numere reale și pozitive, a_1 și a_2 nefiind nule în același timp.

Dacă:

$$a_1 c_2 \underset{(\leqslant)}{\geqslant} a_2 c_1$$

și expresia:

$$k = a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^\alpha + a_2(x_1 x_2 \ldots x_n)^\beta \qquad (3)$$

este constantă, atunci expresia:

$$E = c_1(x_1 + x_2 + + \ldots + x_n)^\alpha + c_2(x_1 \ldots x_n)^\beta$$

Scanned with OKEN Scanner

este maximă (minimă) în cazul cînd toate numerele x_i sînt egale cu x.

Pentru aceasta să arătăm că dacă $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, atunci:

$$n^{\alpha} c_1 x^{\alpha} + c_2 x^{n\beta} \underset{(\leqslant)}{\geqslant} c_1 (x_1 + \ldots + x_n)^{\alpha} + c_2 (x_1 \ldots x_n)^{\beta}$$

x deducîndu-se din:

$$k = n^{\alpha} a_1 x^{\alpha} + a_2 x^{n\beta}. \tag{3'}$$

Inegalitatea se mai scrie:

$$\frac{c_2}{a_2} [a_2 x^{n\beta} - a_2 (x_1 \ldots x_n)^{\beta}] - \frac{c_1}{a_1} [a_1 (x_1 + \ldots + x_n)^{\alpha} - n^{\alpha} a_1 x^{\alpha}] \underset{(\leqslant)}{\geqslant} 0.$$

Scăzînd (3) din (3') deducem:

$$a_2 x^{n\beta} - a_2 (x_1 \ldots x_n)^{\beta} = a_1 (x_1 + \ldots + x_n)^{\alpha} - n^{\alpha} a_1 x^{\alpha}$$

iar inegalitatea de demonstrat devine:

$$a_2 \left(\frac{c_2}{a_2} - \frac{c_1}{a_1} \right) [x^{n3} - [x_1 \ldots x_n)^{\beta}] \underset{(\leqslant)}{\geqslant} 0$$

și cum:

$$a_2 \left(\frac{c_2}{a_2} - \frac{c_1}{a_1} \right) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} 0$$

rămîne de arătat că:

$$x^n \geqslant x_1 x_2 \ldots x_n$$

adică tocmai o consecință a teoremei lui *Cauchy* (produsul a n variabile pozitive, a căror sumă este constantă, este maxim cînd variabilele sînt egale).

În adevăr, folosind inegalitatea lui *Cauchy* și (3) rezultă:

$$k \geqslant n^{\alpha} a_1 (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{\alpha}{n}} + a_2 (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\beta}$$

Scanned with OKEN Scanner

și înlocuind pe k cu valoarea din (3'):

$$n^{\alpha}a_1x^{\alpha} + a_2x^{n\beta} \geqslant n^{\alpha}a_1(x_1 \dots x_n)^{\frac{\alpha}{n}} + a_2(x_1 \dots x_n)^{\beta}$$

sau:

$$n^{\alpha}a_1\left[x^{\alpha} - (x_1 \dots x_n)^{\frac{\alpha}{n}}\right] + a_2[x^{n\beta} - (x_1x_2 \dots x_n)^{\beta}] \geqslant 0.$$

Să presupunem prin absurd:

$$x^n < x_1x_2 \dots x_n$$

deci, prin ridicare la puterile $\frac{\alpha}{n}$ și β ar rezulta:

$$x^{\alpha} < (x_1 \dots x_n)^{\frac{\alpha}{n}}$$

și:

$$x^{n\beta} < (x_1 \dots x_n)^{\beta}$$

din care s-ar deduce:

$$n^{\alpha}a_1\left[x^{\alpha} - (x_1 \dots x_n)^{\frac{\alpha}{n}}\right] + a_2[x^{n\beta} - (x_1 \dots x_n)^{\beta}] < 0,$$

ceea ce este absurd.

Deci ipoteza de mai sus nu poate fi acceptată. Pentru $a_1 = 0$ sau $a_2 = 0$ obținem cazul analizat cu cîteva rînduri mai sus.

Să revenim la inegalitatea (1) pe care ne-am propus să o demonstrăm și să remarcăm că ea este echivalentă cu teorema:

dacă suma:

$$\Sigma x_1x_2 \dots x_{k-1} = a$$

este constantă atunci expresia:

$$\Sigma x_1x_2 \dots x_k$$

este maximă cînd $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Demonstrația o facem prin reducere la absurd. Să presupunem că expresia:

$$\Sigma x_1x_2 \dots x_k$$

este maximă pentru valori ale numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care nu sînt egale între ele. Atunci:

$$\Sigma x_1 x_2 \ldots x_{k-1} = (x_1 + x_2)\ \Sigma x_3 x_4 \ldots x_k + \\ + x_1 x_2\ \Sigma x_3 x_4 \ldots x_{k-1} + \Sigma x_3 x_4 \ldots x_{k+1}$$

cu presupunerea că $x_1 \neq x_2$, și:

$$\Sigma x_1 \ldots x_k = (x_1 + x_2)\ \Sigma x_3 x_4 \ldots x_{k+1} + \\ + x_1 x_2\ \Sigma x_3 x_4 \ldots x_k + \Sigma x_3 x_4 \ldots x_{k+2}.$$

Considerăm numerele $x_3, x_4, \ldots, x_n$ și păstrînd expresia:

$$(x_1 + x_2)\ \Sigma x_3 x_4 \ldots x_k + x_1 x_2\ \Sigma x_3 x_1 \ldots x_{k-1}$$

constantă, să arătăm în cele ce urmează că expresia:

$$(x_1 + x_2)\ \Sigma x_3 x_4 \ldots x_{k+1} + x_1 x_2\ \Sigma x_3 x_4 \ldots x_k$$

poate fi mărită făcînd $x_1 = x_2$. Dacă acest lucru este adevărat rezultă că și expresia:

$$\Sigma x_1 x_2 \ldots x_k$$

va fi mărită deci va căpăta o valoare mai mare decît valoarea maximă presupusă.

Ajungem astfel la o contradicție de unde se deduce că suma:

$$\Sigma x_1 x_2 \ldots x_k$$

este maximă pentru:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt[k-1]{\frac{a}{C_n^{k-1}}}.$$

Ținînd seama de cele obținute asupra expresiei E în care scriem $\alpha = \beta = 1$ și $n = 2$, obținem afirmația pe care ne-am propus să o demonstrăm.

Anume, este adevărată dacă există inegalitatea:

$$(\Sigma x_3 x_4 \ldots x_k)^2 > \Sigma x_3 x_4 \ldots x_{k-1}\ \Sigma x_3 x_4 \ldots x_{k+1}$$

Scanned with OKEN Scanner

care este echivalentă cu:

$$(\Sigma x_1' x_2' \dots x_k')^2 > \Sigma x_1' x_2' \dots x_{k-1}' \, \Sigma x_1' x_2' \dots x_{k+1}',$$

x_i' fiind numere pozitive. Din motive de simetrie avem:

$$(\Sigma x_1' x_2' \dots x_k')^2 = \Sigma x_1'^2 x_2'^2 \dots x_k'^2 + \alpha_1 \Sigma x_1'^2 x_2'^2 \dots x_{k-1}'^2 x_k' x_{k+1}' +$$
$$+ \alpha_2 \Sigma x_1'^2 x_2'^2 \dots x_{k-2}'^2 x_{k-1}' x_k' x_{k+1}' x_{k+2}' + \dots +$$
$$+ \alpha_k \Sigma x_1' x_2' \dots x_{2k}' \qquad (4)$$

unde α_i, $i = 1, \dots, k$ sînt coeficienți care trebuie determinați.

În acest scop să studiem de cîte ori apare un termen al sumei:

$$\Sigma a_1^2 a_2^2 \dots a_{k-i}^2 a_{k-i+1} \dots a_{k+i}$$

în membrul stîng al identității de mai sus. Să luăm, de exemplu, termenul:

$$a_1^2 a_2^2 \dots a_{k-i}^2 \cdot a_{k-i+1} \dots a_{k+i}.$$

Din formula:

$$(t_1 + t_2 + \dots + t_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 2 \sum_{i<j} t_i t_j$$

observăm că termenul considerat apare ca urmare a efectuării produsului a doi termeni diferiți ai sumei:

$$\Sigma a_1 a_2 \dots a_k.$$

Acești termeni trebuie să fie produse de numere a_i care să îndeplinească condițiile:

a°). Fiecare produs să conțină factorii $a_1, \dots, a_{k-i}$,

b°). Restul de factori ai fiecărui produs (în număr de i) să fie diferiți și aleși din următoarele $2i$ numere $a_{k-i+1}, \dots, a_{k+i}$,

c°). Restul de factori ai primului produs să difere de restul de factori ai celui de-al doilea produs.

Suma:

$$\Sigma a_1 a_2 \dots a_k$$

conține C_{2i}^{i} termeni care să satisfacă condițiile a°) și b°). Fiecăruia din acești termeni i se poate asocia un singur alt element al sumei:

$$\Sigma a_1 a_2 \dots a_k$$

astfel ca fiecare pereche formată să îndeplinească condițiile a°), b°), c°). Există în total $\frac{1}{2} C_{2i}^{i}$ astfel de perechi distincte. Deoarece în membrul stîng al identității (4) fiecare produs format prin înmulțirea unor astfel de termeni apare de două ori, deducem că valoarea lui α_i este C_{2i}^{i}.

Să determinăm acum valoarea coeficienților $\beta_i (i = 1, \dots, k)$ pentru care avem:

$$\begin{aligned}\Sigma a_1 a_2 \dots a_{k-1} \Sigma a_1 a_2 \dots a_{k+1} = \beta_1 \Sigma a_1^2 a_2^2 \dots a_{k-1}^2 a_k a_{k+1} + \\ + \beta_2 \Sigma a_1^2 a_2^2 \dots a_{k-2}^2 a_{k-1} a_k a_{k+1} a_{k+2} + \\ + \dots + \beta_i \Sigma a_1^2 a_2^2 \dots a_{k-i}^2 a_{k-i+1} \dots a_{k+i} + \dots + \\ + \beta_k \Sigma a_1 \dots a_{2k}.\end{aligned} \tag{5}$$

Pentru aceasta, considerăm tot termenul:

$$a_1^2 a_2^2 \dots a_{k-i}^2 a_{k-i+1} \dots a_{k+i}$$

al sumei:

$$\Sigma a_1^2 a_2^2 \dots a_{k-i}^2 a_{k-i+1} \dots a_{k+i}$$

care apare în membrul stîng al identității de mai sus ca urmare a efectuării produsului între doi termeni ai sumei:

$$\Sigma a_1 a_2 \dots a_{k+1}.$$

Aceștia trebuie să îndeplinească condițiile a°), b°), c°), cu excepția faptului că restul de factori ai celor două produse sînt în număr de $i - 1$, respectiv, $i + 1$. Sumele:

$$\Sigma a_1 a_2 \dots a_{k-1}$$

și:

$$\Sigma a_1 a_2 \dots a_{k+1}$$

Scanned with OKEN Scanner

conțin cîte $C_{2i}^{i+1} = C_{2i}^{i-1}$ termeni care satisfac condițiile a°) și b°). Fiecărui termen al primei sume îi corespunde un singur termen din cea de-a doua sumă, astfel ca cele C_{2i}^{i-1} perechi de termeni să îndeplinească condițiile a°), b°) și c°). Deci prin efectuarea produsului:

$$\Sigma a_1 a_2 \dots a_{k-1} \Sigma a_1 a_2 \dots a_{k+1}$$

vor apare C_{2i}^{i-1} termeni:

$$a_1^2 a_2^2 \dots a_{k-i}^2 a_{k-i+1} \dots a_{k+i}$$

de unde rezultă $\beta_i = C_{2i}^{i-1}$.

Din (4) și (5) rezultă:

$$(\Sigma a_1 a_2 \dots a_k)^2 - \Sigma a_1 a_2 \dots a_{k-1} \Sigma a_1 a_2 \dots a_{k+1} =$$
$$= \Sigma a_1^2 a_2^2 \dots a_k^2 + (C_2^1 - C_2^0) \Sigma a_1^2 a_2^2 \dots a_{k-1}^2 a_k a_{k+1} +$$
$$+ (C_4^2 - C_4^1) \Sigma a_1^2 a_2^2 \dots a_{k-2}^2 a_{k-1} a_k a_{k+1} a_{k+2} + \dots +$$
$$+ (C_{2i}^i - C_{2i}^{i-1}) \Sigma a_1^2 a_2^2 \dots a_{k-i}^2 a_{k-i+1} \dots a_{k+i} + \dots +$$
$$+ (C_{2k}^k - C_{2k}^{k-1}) \Sigma a_1 \dots a_{2k} > 0.$$

căci toate sumele sînt pozitive și $C_{2i}^i - C_{2i}^{i-1} > 0$.

Cu aceasta, inegalitatea (2) deci și (1) este complet demonstrată.

Din ea rezultă:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geqslant \left(\frac{\Sigma x_1 x_2}{C_n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \left(\frac{\Sigma x_1 x_2 x_3}{C_n^3}\right)^{\frac{1}{3}} \geqslant$$
$$\geqslant \dots \geqslant \left(\frac{\Sigma x_1 \dots x_k}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}} \geqslant \dots \geqslant (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

adică inegalitatea generalizată a mediilor și:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geqslant \left(\frac{\Sigma x_1 \dots x_k}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad k = \overline{1,\ n},$$

inegalitate cunoscută sub numele de *inegalitatea lui Mac Laurin.*

Scanned with OKEN Scanner

III.P.141. Se obține soluția (0, 1, — 1, 1).

III.P.142. În legătură cu acest exercițiu facem unele remarci.

Un șir (finit) de numere:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{1}$$

se numește *progresie aritmetică*, avînd *rația* r, dacă:

$$a_{i+1} - a_i = r$$

pentru orice $i = 1, \ldots, n - 1$.

În acest caz este consacrată următoarea notație, pentru a indica faptul că numerele din șirul (1) formează o progresie aritmetică:

$$\div a_1, \ldots, a_n.$$

Un șir (finit) de numere:

$$b_1, b_2, \ldots, b_m$$

se numește *progresie geometrică*, cu rația q, dacă:

$$b_{j+1} = b_j q$$

pentru orice $j = 1, \ldots, m - 1$.

Avem și aici notația consacrată:

$$\div\div b_1, \ldots, b_m.$$

Numim *suma progresiei aritmetice* (respectiv *geometrice*) numărul $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (respectiv $b_1 + b_2 + \ldots + b_m$).

Vedem că, în cazul de față, avem de aflat suma termenilor unei progresii geometrice.

Raționăm, așa cum este indicat, prin inducție matematică.

Pentru $n = 1$ este evidentă formula (în ipoteza că $x \neq 1$).

Presupunem formula adevărată pentru un n oarecare și să o demonstrăm și pentru $n + 1$ de, unde, în virtutea principiului inducției matematice, formula va fi valabilă pentru orice $n \in N^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă la egalitatea:

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

presupusă adevărată, adăugăm x^{n+1} obținem:

$$1 + x + \ldots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1}$$

de unde, după oarecare calcule:

$$1 + x + \ldots + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

III.P.143. Pentru $n = 1$ egalitatea este satisfăcută.

Presupunem că egalitatea se verifică pentru un n oarecare:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)\,(2n + 1)}{6}.$$

Adunînd ambilor membri numărul $(n + 1)^2$ obținem:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(n + 2)\,(2n + 3)}{6}$$

deci ea se verifică și pentru $n + 1$, în ipoteza că se verifică pentru n deci, potrivit principiului inducției matematice, se verifică pentru orice $n \in N^*$. Sau: $\Sigma(k + 1)^3 = \Sigma k^3 + 3\Sigma k^2 + 3\Sigma k + \Sigma 1$ și $(n + 1)^3 - 1 = 3\Sigma k^2 + 3\dfrac{n(n + 1)}{2} + n.$

III.P.144. Avem, pentru $n = 1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2};$$

evident. Presupunem că afirmația este verificată pentru un n oarecare:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n + 1)} = 1 - \frac{1}{(n + 1)}$$

Scanned with OKEN Scanner

și adunînd ambilor membri cantitatea:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

rezultă că afirmația este valabilă și pentru $n+1$ deci, potrivit principiului inducției matematice, pentru orice $n \in N^*$.

Altfel, constatăm că:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

pentru orice $k \in N^*$ (identitatea este valabilă pentru orice număr real $k \notin \{-1, 0\}$ însă aici ne interesează numai valorile naturale) deci:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

și adunînd, obținem egalitatea din enunț.

III.P.145[2]**.** O elegantă demonstrație poate căpăta această formulă folosind considerente probabilistice însă, deoarece nu dispunem încă de astfel de cunoștințe, vom folosi dezvoltarea binomului după *Newton*:

$$(a+b)^{2n} = a^{2n} + C_{2n}^1 a^{2n-1}b + C_{2n}^2 a^{2n-2}b^2 + \ldots +$$

$$+ C_{2n}^n a^n b^n + \ldots + b^{2n},$$

și astfel:

$$(a+b)^{2n} = (a+b)^n(a+b)^n = (a^n + C_n^1 a^{n-1}b +$$

$$+ \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n)(a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + b^n).$$

După efectuarea înmulțirilor, ținînd seama de formula $C_n^k = C_n^{n-k}$, și identificarea coeficienților terme-

Scanned with OKEN Scanner

nului $a^n b^n$ în cele două expresii, obținem tocmai identitatea cerută.

III.P.146. Formula devine evidentă, avînd în vedere dezvoltarea binomului după *Newton*:

$$(a + b)^n = (a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + b^n)$$

în care înlocuim $a = 1$, $b = -1$ (vezi III.P.135).

III.P.147. *Soluția I.* Raționăm prin inducție matematică.

Pentru $n = 1$, egalitatea este evident satisfăcută.

Presupunem egalitatea adevărată pentru un n oarecare:

$$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$

Adăugînd la ambii membri ai acestei egalități cantitatea $(2n + 1)^3$ și făcînd oarecare calcule obținem:

$$1^3 + 3^3 + \ldots (2n - 1)^3 + (2n + 1)^3 =$$
$$(n + 1)^2[2(n + 1)^2 - 1],$$

ceea ce dovedește, potrivit principiului inducției matematice, că egalitatea este valabilă pentru orice $n \in N^*$.

Soluția a II-a. Putem scrie, ținînd seama de III.P.136 și III.P.143:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)^3 = \sum_{k=1}^{n} (8k^3 - 12k^2 + 6k - 1) =$$

$$= 8 \sum_{k=1}^{n} k^3 - 12 \sum_{k=1}^{n} k^2 + 6 \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1.$$

adică, după oarecari calcule se obține:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

adică tocmai formula din enunț.

În adevăr, din:

$$\sum_{1}^{n} (2k - 1)^3 = 8 \sum_{1}^{n} k^3 - 12 \sum_{1}^{n} k^2 + 6 \sum_{1}^{n} k - \sum_{1}^{n} 1$$

Scanned with OKEN Scanner

se obține:

$$\sum_1^n (2k-1)^3 = 8 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 12 \cdot$$

$$\cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n.$$

Se obține:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

III.P.148[3]**.** Avînd în vedere dezvoltarea binoamelor $(1+1)^n$, $(1-1)^n$, $(1+\mathrm{i})^n$ și $(1-\mathrm{i})^n$ cu $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, după formula lui *Newton*, avem:

$$\begin{aligned} 2^n &= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n, \\ 0 &= C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n \qquad (1) \\ (1+\mathrm{i})^n &= C_n^0 + \mathrm{i}C_n^1 + \mathrm{i}^2 C_n^2 + \ldots + \mathrm{i}^n C_n^n, \\ (1-\mathrm{i})^n &= C_n^0 - \mathrm{i}C_n^1 + \mathrm{i}^2 C_n^2 - \ldots + (-1)^n \mathrm{i}^n C_n^n. \end{aligned}$$

Să observăm acum că pentru un k oarecare, care dă restul 1 prin împărțirea cu 4, are loc:

$$1 + (-1)^k + \mathrm{i}^k + (-1)^k \mathrm{i}^k = 1 - 1 + \mathrm{i} - \mathrm{i} = 0,$$

apoi pentru k oarecare care dă restul 2 prin împărțirea cu 4:

$$1 + (-1)^k + \mathrm{i}^k + (-1)^k \mathrm{i}^k = 1 + 1 - 1 - 1 = 0,$$

și, în continuare, pentru un k oarecare care dă restul 3 prin împărțirea cu 4:

$$1 + (-1)^k + \mathrm{i}^k + (-1)^k \mathrm{i}^k = 1 - 1 - \mathrm{i} + \mathrm{i} = 0$$

și, în fine, pentru un k oarecare care dă restul 0 la împărțirea cu 4:

$$1 + (-1)^k + \mathrm{i}^k + (-1)^k \mathrm{i}^k = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Adunînd egalitățile (1) scrise anterior și ținînd seama de formulele de mai sus, obținem:

$$2^n + (1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n = 4(C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots)$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = \frac{2^n + (1+i)^n + (1-i)^n}{4}.$$

În continuare:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Să demonstrăm în prealabil formula lui *Moivre*:

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na$$

pentru orice arc real a și orice număr $n \in N^*$.

Demonstrația o vom face prin inducție matematică.

Pentru $n = 1$ formula este evidentă.

Presupunem formula adevărată pentru un $k \in N^*$ oarecare:

$$(\cos a + i \sin a)^k = \cos ka + i \sin ka.$$

Înmulțind această egalitate cu expresia $(\cos a + i \sin a)$ și avînd în vedere formulele:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

obținem:

$$(\cos a + i \sin a)^{k+1} = \cos(k+1)a + i \sin(k+1)a$$

deci formula este, potrivit principiului inducției matematice, valabilă pentru orice $n \in N^*$.

Folosind această formulă obținem:

$$(1+i)^n = \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i \sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

$$(1-i)^n = \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i \sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Astfel:

$$2^n + (1 + i)^n + (1 - i)^n = 2^n + 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$$

adică:

$$C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} =$$

$$= \begin{cases} 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}} & \text{pentru } n = 8k, \\ 2^{n-2} + 2^{\frac{n-3}{2}} & \text{pentru } n = 8k + 1, \\ 2^{n-2} & \text{pentru } n = 8k \pm 2, \\ 2^{n-2} - 2^{\frac{n-3}{2}} & \text{pentru } n = 8k \pm 3, \\ 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}} & \text{pentru } n = 8k + 4. \end{cases}$$

III.P.149. Se poate demonstra prin inducție sau, mai simplu, se poate folosi formula:

$$\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$$

în care dăm lui k valori de la 1 la n și adunăm relațiile astfel obținute găsim, după reducerile posibile relația din enunț.

III.P.150[2]**.** Transformăm termenul de ordin k al sumei date:

$$\frac{k}{k! + (k-1)! + (k-2)!} =$$

$$= \frac{k}{(k-2)!\,(1 + k - 1 + k^2 - k)} = \frac{k}{(k-2)!\,k^2} =$$

$$= \frac{1}{(k-2)!\,k} = \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare:

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+$$

$$+\frac{n}{(n-2)!+(n-1)!+n!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-$$

$$-\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n!}$$

III.P.151[1]. Suma din primul membru se mai poate scrie:

$$S=\frac{(5-3)(5+3)}{3^2\cdot 5^2}+\frac{(7-5)(7+5)}{5^2\cdot 7^2}+$$

$$+\ldots+\frac{[(2n+3)-(2n+1)][(2n+3)+(2n+1)]}{(2n+1)^2(2n+3)^2}.$$

Termenul general al sumei S se poate scrie deci:

$$\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}=\frac{1}{(2k+1)^2}-\frac{1}{(2k+3)^2}$$

care, particularizat pentru $k=\overline{1,n}$ și adunate cele n egalități obținute, rezultă:

$$S=\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}-$$

$$-\frac{1}{(2n+3)^2}$$

adică, în fond:

$$S=\frac{1}{9}-\frac{1}{(2n+3)^2}=\frac{4n(n+3)}{9(2n+3)^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatul obținut se poate demonstra și prin inducție matematică.

III.P.152. Afirmația este evidentă, avînd în vedere formula ce exprimă pe C_n^k, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, relație scrisă folosind factoriale.

III.P.153[1]. În identitatea:

$$(x+1)^m (x+1)^n = (x+1)^{m+n},$$

pe care o retranscriem folosind dezvoltarea binomului după *Newton*, egalăm coeficienții termenului x^p; (în $(x+1)^{n+m}$ este C_{m+n}^p) și obținem formula din enunț.

Pentru $m = n = p$ facem în prima formă o variantă a exercițiului III.P.145. Ținem apoi seama de formula $C_n^k = C_n^{n-k}$.

III.P.154[3]. Să considerăm expresia:

$$(1+1)^n - (1-1)^n - \mathrm{i}(1+\mathrm{i})^n + \mathrm{i}(1-\mathrm{i})^n \qquad (1)$$

unde toate parantezele se efectuează potrivit formulei lui *Newton*.

Dacă numărul k dă prin împărțirea la 4 unul din resturile 0, 2, 3 atunci:

$$1 - (-1)^k - \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^k + \mathrm{i}(-1)^k \mathrm{i}^k = 0$$

și:

$$1 - (-1)^k - \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^k + \mathrm{i}(-1)^k \mathrm{i}^k = 4$$

cînd numărul k dă restul 1 prin împărțirea cu 4. Ca atare, potrivit dezvoltării expresiei (1):

$$2^n - \mathrm{i}(1+\mathrm{i})^n + \mathrm{i}(1-\mathrm{i})^n = 4(C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots).$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosind exprimarea trigonometrică a numerelor $1+i$ și $1-i$ vom obține:

$$C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}} \sin\frac{n\pi}{4} =$$

$$= \begin{cases} 2^{n-2} & \text{pentru } n = 8k \text{ sau } n = 8k+4, \\ 2^{n-2} + 2^{\frac{n-3}{2}} & \text{pentru } n = 8k+1 \text{ sau } n = 8k+3 \\ 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}} & \text{pentru } n = 8k+2, \\ 2^{n-2} - 2^{\frac{n-3}{2}} & \text{pentru } n = 8k-1 \text{ sau } n = 8k-3, \\ 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}} & \text{pentru } n = 8k-2. \end{cases}$$

III.P.155[3]. Pentru a dovedi egalitatea propusă se arată în prealabil că:

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 x + \frac{C_n^1}{2}x^2 + \frac{C_n^2}{3}x^3 + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}x^{n+1},$$

care se deduce din:

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

și înlocuim pe x cu 1.

III.P.156[3]. Fie

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

o *rădăcină cubică complexă a unității*. Din dezvoltarea binoamelor $(1+1)^n$, $(1+\alpha)^n$ și $(1+\alpha^2)^n$ obținem:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots,$$

$$(1+\alpha)^n = C_n^0 + \alpha C_n^1 + \alpha^2 C_n^2 + \ldots + \alpha^n C_n^n,$$

$$(1+\alpha^2)^n = C_n^0 + \alpha^2 C_n^1 + \alpha C_n^2 + C_n^3 + \alpha^2 C_n^4 + \ldots + \alpha^{2n} C_n^n,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde prin adunare și ținînd seama că:

$$1+\alpha=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},$$

$$1+\alpha^2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3};$$

obținem:

$$C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots=\frac{1}{3}[2^n+(1+\alpha)^n+(1+$$

$$+\alpha^2)^n]=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right);$$

deci identitatea cerută în enunț.

III.P.157[3]. Considerăm suma:

$$(1+1)^n+(1-1)^n-(1+i)^n-(1-i)^n$$

și folosim raționamente analoage celor expuse în soluția problemei III.P.148; obținem:

$$2^n-(1+i)^n-(1-i)^n=4(C_n^2+C_n^6+C_n^{10}+\ldots)$$

de unde, altfel scris:

$$C_n^2+C_n^6+C_n^{10}+\ldots=2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}=$$

$$=\begin{cases}2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & \text{pentru } n=8k,\\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & \text{pentru } n=8k\pm1,\\ 2^{n-2} & \text{pentru } n=8k\pm2,\\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & \text{pentru } n=8k\pm3,\\ 2^{n2}+2^{-\frac{n-2}{2}} & \text{pentru } n=8k+4.\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

III.P.158[3]. Demonstrația este analoagă cu cea de la III.P.156, considerînd însă suma $(1+1)^n + \alpha^2(1+\alpha)^n + (1+\alpha^2)^n$ pe care o dezvoltăm după procedeul indicat acolo.

III.P.159[3]. Considerînd suma:

$$(1+1)^n + (1-1)^n + (1+i)^n\, i - (1-i)^n\, i$$

și prevalîndu-ne de un raționament analog celui expus în soluția problemei III.P.148, obținem:

$$C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \ldots = 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}} \sin\frac{n\pi}{4} =$$

$$= \begin{cases} 2^{n-2} & \text{pentru } n = 8k \text{ sau } n = 8k+4, \\ 2^{n-2} - 2^{\frac{n-3}{2}} & \text{pentru } n = 8k+1 \text{ sau } n = 8k+3, \\ 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}} & \text{pentru } n = 8k+2, \\ 2^{n-2} + 2^{\frac{n-3}{2}} & \text{pentru } n = 8k-1 \text{ sau } n = 8k-3, \\ 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}} & \text{pentru } n = 8k-2. \end{cases}$$

III.P.160[3]. Demonstrația este analoagă cu cea dată problemei III.P.156 cu deosebirea că aici considerăm expresia:

$$(1+1)^n + \alpha(1+\alpha)^n + \alpha^2(1+\alpha^2)^n$$

pe care o dezvoltăm potrivit formulei lui *Newton* (α este rădăcină cubică a unității).

III.P.161[3]. Să demonstrăm pentru început inegalitatea:

$$\prod_{i=1}^{n}(1-b_i) > 1 - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

în care $0 < b_i < 1$.

Raționăm prin inducție matematică.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $n = 2$ inegalitatea se reduce la:

$$1 - b_1 - b_2 + b_1 b_2 > 1 - b_1 - b_2,$$

ceea ce este evident.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru $n - 1$ numere b_i:

$$\prod_{i=1}^{n-1} (1 - b_i) > 1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i$$

și să o demonstrăm și pentru n numere b_i de unde va rezulta, potrivit principiului inducției matematice, că inegalitatea propusă va fi valabilă pentru orice $n \in N^*$.

Are loc:

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - b_i) > \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)(1 - b_n) = 1 -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} b_i + b_n \sum_{i=1}^{n-1} b_i > 1 - \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

de unde rezultă valabilitatea și pentru n.

Luînd în inegalitatea astfel demonstrată $1 - b_i = a_i$ avem $0 < a_i < 1$ și:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i > 1 - n + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

sau:

$$\sum a_i - \prod_{i=i}^{n} a_i < n - 1,$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

III.P.162[2]. Este clar că are loc egalitatea:

$$\frac{k^2 + k - 1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

astfel că suma din membrul întîi al inegalității de demonstrat devine:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!} + 1 - \frac{1}{n!}$$

de unde, evident:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+1)!} < 2.$$

III.P.163[1]. Raționăm prin inducție matematică.

Pentru $n = 1$ avem, evident, egalitate.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru un n oarecare și o vom demonstra și pentru $n+1$ de unde, potrivit principiului inducției matematice, ea va fi valabilă pentru orice $n \in N^*$. Trebuie să demonstrăm deci că:

$$(1-x)^{n+1} + (1+x)^{n+1} \leqslant 2^{n+1}$$

în ipoteza că:

$$(1-x)^n + (1+x)^n \leqslant 2^n.$$

Avem succesiv:

$$(1-x)^{n+1} + (1+x)^{n+1} = (1-x)(1-x)^n +$$

$$+ (1+x)(1+x)^n$$

și cum, prin ipoteză, $|x| \leqslant 1$ rezultă $0 \leqslant x+1 \leqslant 2$ și $0 \leqslant 1-x \leqslant 2$ adică:

$$(1-x)^{n+1} + (1+x)^{n+1} \leqslant 2[(1-x)^n +$$

$$(1+x)^n] \leqslant 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

de unde și afirmația corespunzătoare pentru $n+1$.

Se poate folosi și dezvoltarea după *Newton* și faptul că $1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^n = 2^{n-1}$ (n par).

Scanned with OKEN Scanner

III.P.164. Afirmația rezultă imediat din inegalitatea lui *Cauchy* (vezi III.P.129) în care facem $a_i = i$, $i = 1, \ldots, n$,

Dacă se înmulțesc inegalitățile $2^n \leqslant (n+1)^n$ și $n! \leqslant n^n$ se obține o inegalitate mai slabă, $n! \leqslant \leqslant \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^n$.

III.P.165[1]. Dacă inegalității evidente:

$$0 < 2 + 2\sqrt{4a+1}$$

îi adunăm și într-o parte și în alta cantitatea $4a$ și extragem radicalul obținem:

$$2\sqrt{a} < 1 + \sqrt{4a+1}$$

deoarece:

$$\sqrt{2 + 4a + 2\sqrt{4a+1}} = \sqrt{\frac{2+8a}{2}} + \sqrt{\frac{2+4a-4a}{2}}$$

deci:

$$\sqrt{a} < \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}.$$

Dacă acestei noi inegalități îi adăugăm pe a, apoi o înmulțim cu 4 și extragem radicalul, obținem:

$$2\sqrt{a+\sqrt{a}} < 1 + \sqrt{1+4a}$$

și așa mai departe.

III.P.166[1]. Pentru orice $n \in N^*$, $n \geqslant 2$, evident:

$$n+1 < n+2 < n+3 < \ldots < n^2 -$$

$$2 < n^2 - 1 < n^2$$

de unde:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} > \ldots > \frac{1}{n^2-2} >$$

$$> \frac{1}{n^2-1} > \frac{1}{n^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n^2}; \quad \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n^2}; \quad \ldots \quad \frac{1}{n^2-1} > \frac{1}{n^2}$$

astfel că:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n+(n^2-n)} > \frac{1}{n} + \underbrace{\left(\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)}_{(n^2-n) \text{ ori}} =$$

$$= \frac{1}{n} + (n^2-n)\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} = 1,$$

adică tocmai inegalitatea propusă.

III.P.167[1]**.** Este un caz particular al inegalității lui *Buneakowski* (vezi III.P.132) în care facem $b_k = 1$ pentru orice $k = 1, \ldots, n$.

III.P.168[3]**.** Mai mult, dacă α și β sînt două numere raționale astfel ca $\alpha + \beta = 1$ și $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sînt $2n$ numere reale pozitive atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} b_i^{\beta} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\beta}.$$

În adevăr, notînd:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a,$$
$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b,$$

inegalitatea, prin împărțirea cu $a^{\alpha}b^{\beta}$, devine echivalentă cu inegalitatea:

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_1}{b}\right)^{\beta} + \left(\frac{a_2}{a}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_2}{b}\right)^{\beta} + \ldots + \left(\frac{a_n}{a}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_n}{b}\right)^{\beta} \leqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din inegalitatea lui *Cauchy* rezultă că:

$$\left(\frac{a_k}{a}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_k}{b}\right)^{\beta} \leqslant \left(\frac{\alpha\frac{a_k}{a}+\beta\frac{b_k}{b}}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta} \leqslant \alpha\frac{a_k}{a}+\beta\frac{b_k}{b}$$

pentru orice $k \in \{1, \ldots, n\}$ deci adunînd inegalitățile astfel obținute găsim că:

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_1}{b}\right)^{\beta}+\left(\frac{a_2}{a}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_2}{b}\right)^{\beta}+\ldots+\left(\frac{a_n}{a}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_n}{b}\right)^{\beta} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a}+\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{b}=1$$

adică o variantă a inegalității cerute.

Pentru:

$$\alpha=\frac{1}{p};\ \beta=\frac{1}{q};\ a_i=x_i^p,\ b_i=y_i^q,\ i=1, 2, \ldots, n$$

obținem inegalitatea lui *Hölder*.

Pentru inegalitatea ajutătoare avem egalitate cînd:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$$

iar pentru inegalitatea lui *Hölder* cînd:

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\ldots=\frac{x_n}{y_n}.$$

III.P.169. Faptul este evident, prin efectuarea ridicării la pătrat.

III.P.170*. a°). Proprietatea este evidentă pentru $n = 1$.

Pentru $n = 2$, fie $x_1, x_2 \in I$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem $x_1 \leqslant x_2$. Atunci:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda)\, x_2 = x_2 + \\ + \lambda_2 (x_1 - x_2) \leqslant x_2$$

și la fel se arată că $x_1 \leqslant \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ deci $\lambda_1 x_1 + \\ + \lambda_2 x_2 \in I$.

Să presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru n oarecare și să arătăm că dacă $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ sînt puncte din I și $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ sînt astfel ca:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$$

atunci:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in I.$$

Observînd că putem presupune $\lambda_{n+1} \neq 1$, rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} =$$

$$= (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Dar deoarece, prin ipoteză:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = 1$$

rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i \in I$$

deci:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in I.$$

b°). Pentru $n = 1$, proprietatea este evidentă iar pentru $n = 2$, rezultă din definiție. Presupunînd-o

Scanned with OKEN Scanner

adevărată pentru n să o demonstrăm și pentru $n+1$.

Avem:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\right)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i+\lambda_{n+1}x_{n+1}\right)=$$

$$=f\left[(1-\lambda_{n+1})\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}x_i+\lambda_{n+1}x_{n+1}\right]\leqslant$$

$$\leqslant(1-\lambda_{n+1})\cdot f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}x_i\right)+$$

$$+\lambda_{n+1}f(x_{n+1})\leqslant(1-\lambda_{n+1})\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}f(x_i)+$$

$$+\lambda_{n+1}f(x_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(x_i).$$

c°). Putem lua $\lambda_i=\dfrac{\mu_i}{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}$ și aplicăm cele obținute la b°).

TRIGONOMETRIE

IV.1.0. Funcții trigonometrice.

IV.1.1. *Arce.* Arcele de cerc pot fi orientate pozitiv sau orientate negativ (vezi fig. IV.1.1). *O* este originea arcelor. Arcele se exprimă în aceleași unități de măsură ca și unghiurile: *gradul sexagesimal, gradul centezimal, radianul.*

Relațiile de trecere de la o unitate de măsură la alta sînt:

$$\frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha^g}{200^g} = \frac{\alpha^{rad}}{\pi}.$$

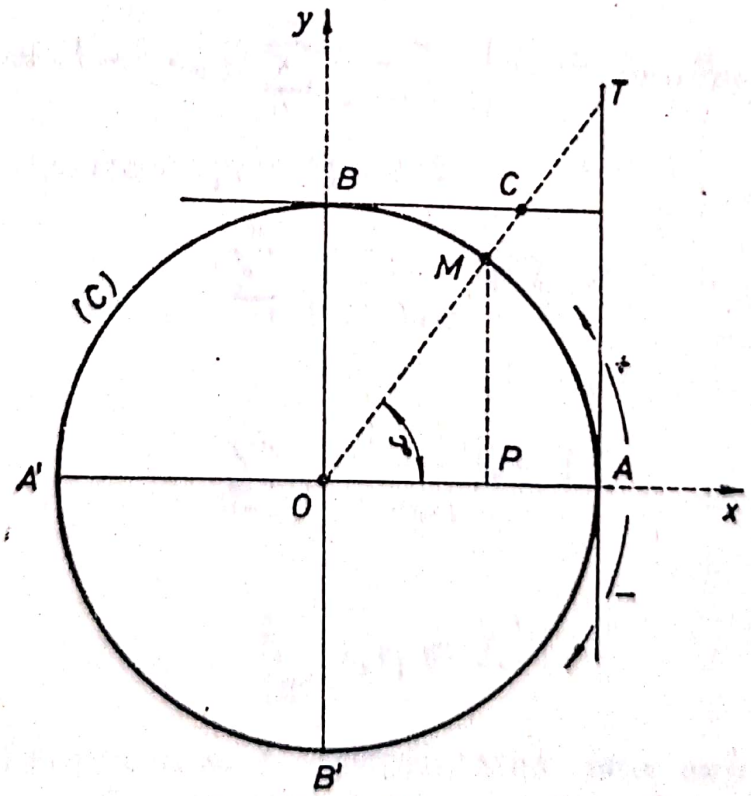


Fig. IV.1.1

Unele arce pot avea aceeași origine O și aceeași extremitate M. Așa, de exemplu, $K = \left\{2k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}_{k\in Z}$ reprezintă mulțimea arcelor cu originea în O și extremitatea în $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

IV.1.2. *Cercul orientat.* Diametrele AA' și BB' sînt diametre perpendiculare și alcătuiesc un sistem de referință xOy. Mulțimea punctelor cercului (C) reprezintă o submulțime a punctelor planului xOy. Oricărui punct al cercului (C) îi corespunde coordonatele x, y, dacă acest cerc este raportat la sistemul rectangular xOy sau coordonatele $\alpha = \text{măs}\,\widehat{AM}$ și raza R.

IV.1.3. *Categorii de arce.* Arcele pot fi:

1°). Arce cu extremitățile simetrice față de axa yy' și aceeași origine. Arcele $2k\pi + \alpha$ și $2k'\pi + \pi - \alpha$ au aceeași origine iar extremitățile lor sînt simetrice față de axa yy';

2°). Arce cu extremitățile simetrice față de axa xx' și aceeași origine O. Acestea sînt α (sau $2k\pi + \alpha$) și $-\alpha$ (sau $2k'\pi - \alpha$);

3°). Arce cu aceleași extremități și cu aceeași origine. Acestea sînt arcele α și $2k\pi + \alpha$ sau $\pi + \alpha$ și $2k\pi + \pi + \alpha$;

4°). Arce cu aceeași origine, extremitățile fiind diametral opuse: $k\pi$ și $k'\pi$, $k' = k + 1$ (peste tot, k, $k' \in Z$).

IV.1.4. *Definițiile funcțiilor trigonometrice fundamentale.* Fie xOy un sistem de axa rectangulare și $(\triangle)$ o dreaptă ce trece prin origine (vezi fig. IV.1.4). Conform teoremei lui *Tales*:

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{OM}{OM'} = \frac{MP}{M'P'},$$

de unde rezultă că fiecare din rapoartele:

$$\frac{a}{b},\ \frac{b}{a},\ \frac{b}{r},\ \frac{a}{r},$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă există, are aceeași valoare pentru orice poziție a lui M pe dreapta (Δ) (P și Q reprezintă proiecțiile lui M pe axa xx', respectiv axa yy').

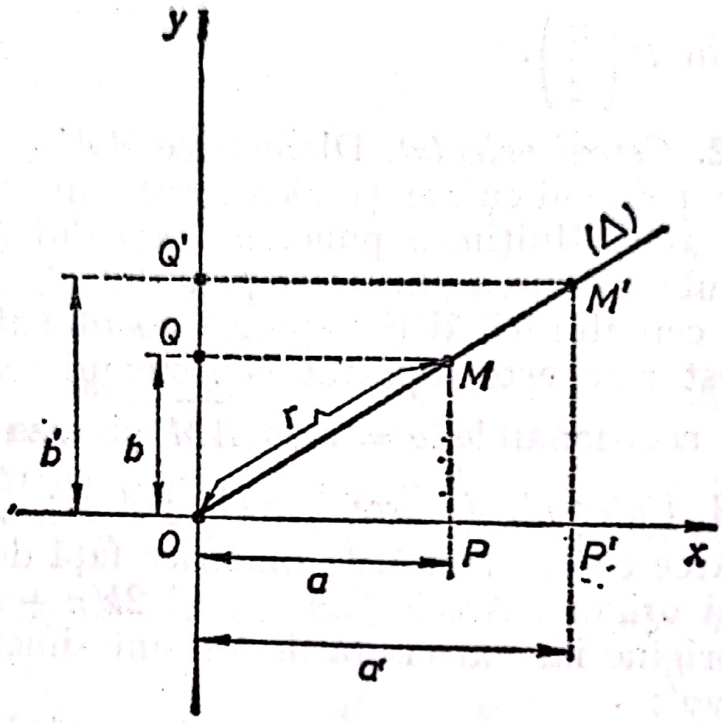


Fig. IV.1.4

Prin definiție, notînd $\alpha = \sphericalangle MOP$:

— valoarea raportului $\frac{b}{r}$ se numește *sinusul* unghiului α;

— valoarea raportului $\frac{a}{r}$ se numește *cosinusul* unghiului α;

— valoarea raportului $\frac{b}{a}$ se numește *tangenta* unghiului α;

— valoarea raportului $\frac{a}{b}$ se numește *cotangenta* unghiului α;

— valoarea raportului $\frac{r}{a}$ se numește *secanta* unghiului α;

Scanned with OKEN Scanner

— valoarea raportului $\frac{r}{b}$ se numește *cosecanta* unghiului α.

În felul acesta definim funcțiile *sinus, cosinus, tangentă, cotangentă, secantă, cosecantă,* notate prescurtat sin, cos, tg, ctg, sec, cosec.

Funcțiile de mai sus pot fi definite atît pe mulțimea arcelor pozitive cît și pe mulțimea arcelor negative.

Se observă imediat că:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

pentru valorile lui α pentru care funcțiile respective există.

IV.1.5. *Domeniul maxim de definiție* (în raport cu relația de incluziune) pentru funcția *sinus* este mulțimea tuturor arcelor reale dar, prin abuz de limbaj, este identificată cu mulțimea numerelor reale. Analog pentru funcția *cosinus*.

IV.1.5.1. *Aplicație.* Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției definită de legea:

$$f(x) = \sin (2x + 1).$$

Soluție. Oricare ar fi x real, $2x + 1$ este, de asemenea, real deci domeniul maxim de definiție este R.

Domeniul maxim de definiție pentru funcția *tangentă* este $R - \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right\}_{k \in Z}$ iar pentru funcția *cotangentă* este $R - \{k\pi\}_{k \in Z}$.

IV.1.5.2. *Aplicație.* Să se determine domeniul maxim de definiție pentru funcțiile definite de legile:

a°). $g(x) = \operatorname{tg} (3x - 2)$,

b°). $h(x) = \dfrac{\operatorname{tg} (2x^2)}{\operatorname{ctg} (2x - 3)}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. a°). Funcția *tangentă* nu este definită în punctele $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, deci în punctele $x = (2k+1)\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}$, $k \in Z$, astfel că domeniul maxim de definiție este $R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\right\}_{k \in Z}$.

Amintim că vorbim în această lucrare numai despre funcții reale de variabilă reală, în afara specificării exprese a contrariului. Domeniul maxim de definiție subînțelege mulțimea de numere reale care majorează (în raport cu relația de incluziune) toate mulțimile de numere reale pe care poate fi definită funcția despre care este vorba.

Reamintim, de asemenea, că aceste noțiuni teoretice nu reprezintă altceva decît o sinteză a principalelor fapte parcurse (sau ce urmează a fi parcurse) în timpul liceului.

b°). Funcția se mai scrie:

$$h(x) = \operatorname{tg}(2x^2)\operatorname{tg}(2x-3)$$

deci nu este definită în punctele x pentru care:

$$2x^2 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

unde $k \in N$ căci $2x^2$ este pozitiv, adică pe mulțimea $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{(2k+1)\pi}\right\}_{k \in N}$ și, respectiv, în acele puncte x pentru care $2x - 3 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, adică pentru toți $x \in \left\{(2k+1)\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\right\}_{k \in Z}$.

Domeniul maxim de definiție este deci:

$$R - \left(\left\{\frac{1}{2}\sqrt{(2k+1)\pi}\right\}_{k \in N} \cup \left\{(2k+1)\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\right\}_{k \in Z}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

IV.1.6. *Codomeniul minim* (sau *mulțimea valorilor*) al funcției $f_1(x) = \sin x$ este $[-1, 1]$, al funcției $f_2(x) = \cos x$ este, de asemenea, $[-1, 1]$, iar al funcțiilor $f_3(x) = \operatorname{tg} x$ și, respectiv, $f_4(x) = \operatorname{ctg} x$, este R.

IV.1.6.1. *Aplicație.* Să se afle codomeniul minim al funcțiilor:

a°). $f(x) = \sin x + \cos x$, cînd $x \in R$;

b°). $g(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, cînd $x \in R$.

Soluție. Scriem teorema lui *Pitagora* în triunghiul OMP (vezi fig. IV.1.6.1):

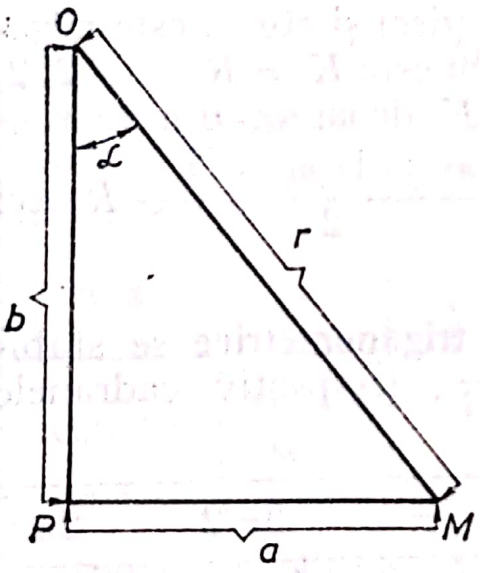


Fig. IV.1.6.1

$$OM^2 = OP^2 + PM^2 \text{ sau:}$$
$$a^2 + b^2 = r^2$$

sau, împărțind prin r^2:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$$

deci $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Deci:

$$f^2(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x.$$

Însă $(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2})^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geqslant 2\sqrt{a^2 b^2}$, $a, b \in R$, adică, făcînd $a = \sin x$, $b = \cos x$:

$$\sin^2 x \cos^2 x \leqslant \frac{1}{4}$$

de unde:

$$-\frac{1}{2} \leqslant \sin x \cos x \leqslant \frac{1}{2}.$$

Așadar, $f^2(x) \leqslant 2$ de unde $-\sqrt{2} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{2}$.

Ca atare, codomeniul minim este $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Pentru $x = \frac{\pi}{4}$ are loc $f(x) = \sqrt{2}$ iar pentru $x = \frac{5\pi}{4}$, $f(x) = -\sqrt{2}$ (acest lucru se întîmplă și pentru alte valori ale lui x).

O soluție mult mai elegantă se poate obține folosind formula $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

b°). Dacă în inegalitatea:

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \geqslant 2, \quad a > 0,$$

facem $a = \operatorname{tg} x > 0$, obținem $f(x) \geqslant 2$ pentru orice x pentru care tg x (deci și ctg x) este pozitiv. Dacă $\operatorname{tg} x < 0$ atunci și $\operatorname{ctg} x < 0$ (și reciproc) deci $f(x) \leqslant -2$ pentru toți x pentru care tg x (deci și ctg x) este negativ. Ca atare, codomeniul minim este $K = R - (-2, 2)$ (f poate lua orice valoare $m \in K$ deoarece din $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$ rezultă $\operatorname{tg} x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2} \in R$ deci x există — este real).

IV.2.0. Semnele funcțiilor trigonometrice se stabilesc pentru intervalul $[0, 2\pi]$, (respectiv cadranele I, II, III, IV):

arcul / funcția	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
		I		II		III		IV	
sinus	0	+	1	+	0	−	−1	−	0
cosinus	1	+	0	−	−1	−	0	+	1
tangenta	0	+	nu are sens	−	0	+	nu are sens	−	0
cotangenta	nu are sens	+	0	−	nu are sens	+	0	−	nu are sens
secanta	1	+	nu are sens	−	−1	−	nu are sens	+	1
cosecanta	nu are sens	+	1	+	nu are sens	−	−1	−	nu are sens

Scanned with OKEN Scanner

iar, pentru rapiditatea calculelor, se stabilesc principalele valori ale funcțiilor trigonometrice *(funcțiile trigonometrice pentru unele arce uzuale)*:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nu are sens
$\operatorname{ctg} \alpha$	nu are sens	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\sec \alpha$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	nu are sens
$\operatorname{cosec} \alpha$	nu are sens	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

Pentru a obține valorile funcțiilor trigonometrice ale arcelor α mai mari decît $\frac{\pi}{2}$ se determină arcul β $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ pentru care valorile funcțiilor trigonometrice de același nume ale celor două arce (α, β) să difere cel mult prin semn. Arcul β se determină astfel:

a°). se împarte arcul dat la 2π radiani (sau 360°) dacă este vorba de sinus, cosinus, secantă sau cosecantă, sau la π radiani (sau 180°) dacă este vorba de tangentă sau cotangentă și se obține un rest.

b°). se determină cadranul în care își are extremitatea arcul rest și se calculează:

$\beta = \pi - \alpha_r$ dacă α_r (arcul-rest) are extremitatea în cadranul II;

$\beta = \alpha_r - \pi$ dacă α_r are extremitatea în cadranul III;

$\beta = 2\pi - \alpha_r$ dacă α_r are extremitatea în cadranul IV.

c°). se iau în considerație semnele funcțiilor trigonometrice ale arcelor cu extremități în diferite cadrane, considerînd arcul α_r și arcul β.

VI.2.1. *Exemplu.* Să se calculeze sin 2760°.

Soluție. $\sin 2760° = \sin (7 \cdot 360° + 240°) = \sin 240° = \sin (180° + 60°) = -\sin 60°$ deoarece arcul 240° are extremitatea în cadranul III ($\alpha_r = 240°$ și $\beta = 60°$).

IV.3.0. Proprietăți ale funcțiilor trigonometrice.

IV.3.1. Funcția cosinus este pară:

$$\cos (-\alpha) = \cos \alpha, \ (\forall)\ \alpha \in R;$$

IV.3.2. Funcțiile sinus, tangentă și cotangentă sînt impare:

$$\operatorname{tg} (-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha;$$
$$\sin (-\alpha) = -\sin \alpha;$$
$$\operatorname{ctg} (-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

pentru orice α din domeniul de definiție maximal, corespunzător fiecărei funcții.

IV.3.3. *Aplicație.* Să se arate că funcția $f(x) = \sin x^2 + \cos x$ este pară.

Soluție. În adevăr:

$$f(-x) = \sin (-x)^2 + \cos(-x) = \sin x^2 + \cos x = f(x).$$

IV.3.4. Funcțiile sinus și cosinus sînt periodice, cu perioada principală 2π:

$$\sin (\alpha + 2\pi) = \sin \alpha; \ \cos (\alpha + 2\pi) = \cos \alpha, \ (\forall)\ \alpha \in R.$$

IV.3.5. Funcțiile tangentă și cotangentă sînt periodice, cu perioada principală π:

$$\operatorname{tg} (\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha, \ (\forall)\ \alpha \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}_{k \in Z};$$

$$\operatorname{ctg} (\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha, \ (\forall)\ \alpha \in R - \{k\pi\}_{k \in Z}.$$

Scanned with OKEN Scanner

IV.3.6. *Aplicație.* Să se determine perioada principală a funcțiilor:

$$a^\circ).\ f(x) = \sin 2x + \cos 3x; \quad b^\circ).\ g(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \cos 5x; \quad c^\circ).\ h(x) = \sin x^2.$$

Soluție. a°). Fie t perioada funcției:

$$f(x+t) = \sin(2t+2x) + \cos(3t+3x) = f(x), \quad (\forall)\ x \in R.$$

Fie $x = 0$ deci $\sin 2t + \cos 3t = 1$. Fie $x = -t$ deci $-\sin 2t + \cos 3t = 1$. Scăzînd, obținem $\sin 2t = 0$ deci $\cos 3t = 1$, de unde $t = 2\pi$.

b°). Dacă t este perioada funcției, din $g(x+t) = g(x)$ se obține:

$$\operatorname{tg}\frac{t+x}{2} + \cos(5x+5t) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \cos 5x,$$

$$(\forall)\ x \in R - \{(2k+1)\pi\}_{k\in Z}.$$

Pentru $x = 0$ respectiv $x = -t$ se obține:

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos 5t = 1,$$

$$-\operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos 5t = 1,$$

de unde $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = 0$ deci $\frac{t}{2} = \pi$ adică $t = 2\pi$.

c°). Fie t perioada funcției, $h(x+t) = h(x)$, deci $\sin x^2 = \sin(x+t)^2$. Pentru $x=0$ rezultă $\sin t^2 = 0$ deci $t^2 = z\pi$, $z \in N^*$, adică $t = \sqrt{z\pi}$. Dacă $x = \sqrt{\pi}$ atunci $\sin x^2 = 0$ deci $\sin \pi(1+\sqrt{z})^2 = 0$, absurd, căci nu există $k \in Z$ astfel încît $\pi(1+\sqrt{z})^2 = k\pi$ (numai pentru arce de forma $x = k\pi$, $k \in Z$, are loc $\sin x = 0$).

Ca atare, funcția nu este periodică.

IV.3.7. Pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ funcția $f_1(x) = \sin x$ este strict crescătoare (funcția păstrează aceeași

Scanned with OKEN Scanner

proprietate pe orice interval $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in Z$.

Pe intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ funcția este strict descrescătoare (aceeași completare: $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right], k \in Z$).

IV.3.8. Pe intervalul $[0, \pi]$ funcția $f_2(x) = \cos x$ este strict descrescătoare (funcția păstrează aceeași proprietate pe orice interval $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in Z$).

Pe intervalul $[\pi, 2\pi]$ funcția f_2 este strict crescătoare (aceeași completare).

IV.3.9. Pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funcția $f_3(x) = \operatorname{tg} x$ este strict crescătoare.

IV.3.10. Pe $(0, \pi)$ funcția $f_4(x) = \operatorname{ctg} x$ este strict descrescătoare.

IV.4.0. Funcții inverse.

IV.4.1. *Funcția* $f(x) = arcsin\ x$. Funcția $g(x) = \sin x$ este strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (vezi IV.3.7) deci este inversabilă pe acest interval (considerînd drept codomeniu pe $[-1, 1]$). Prin definiție, funcția inversă funcției $f_1(x) = \sin x$, se numește *arcsinus* și se notează $g_1(x) = \arcsin x$. De aici tragem concluzia că dacă valoarea funcției $f_1(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, într-un punct $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ este egală cu $y_0 = f(x)$ ($y_0 = \sin x_0$) atunci valoarea funcției $g_1(x) = \arcsin x$ în punctul y_0 este egală cu $x_0 (x_0 = \arcsin y_0)$.

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea valorilor funcției $f_1(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este $[-1, 1]$ deci domeniul de definiție al funcției inverse $g_1(x) = \arcsin x$ este $[-1, 1]$, iar codomeniul este $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Analog, pentru $f_2: [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f_2(x) = \cos x$, funcția inversă este $g_2: [-1, 1] \to [0, \pi]$ definită prin $g_2(x) = \arccos x$, pentru $f_3: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$, $f_3(x) = \operatorname{tg} x$, funcția inversă este $g_3: R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definită prin $g_3(x) = \operatorname{arctg} x$ iar pentru funcția $f_4: (0, \pi) \to R$, $f_4(x) = \operatorname{ctg} x$, funcția inversă este $g_4: R \to (0, \pi)$ definită prin $g_4(x) = \operatorname{arctg} x$.

Funcțiile inverse sînt, de asemenea, monotone.

Există și:

$$\sin(\arcsin x) = x, \ (\forall)\ x \in [-1, 1];$$
$$\cos(\arccos x) = x, \ (\forall)\ x \in [-1, 1];$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \ (\forall)\ x \in R\};$$
$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \ (\forall)\ x \in R.$$

și încă:

$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha \text{ dacă } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
$$\arccos(\cos \alpha) = \alpha \text{ dacă } \alpha \in [0, \pi],$$
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha \text{ dacă } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$
$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha \text{ dacă } \alpha \in (0, \pi).$$

De exemplu:

$$\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5};$$
$$\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$$
$$\arccos\left(\cos \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4};$$
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

IV.4.2. *Aplicație*

1°). Să se calculeze:

a°). $\operatorname{tg}\left(4 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

b°). $\arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

2°). Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției:

$$f(x) = \arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

3°). Să se arate că:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad (\forall)\, x \in [-1, 1].$$

4°). Să se calculeze $f(x) = \cos(2 \arccos x) + \arcsin \sqrt{1 - x} + \arcsin \sqrt{x}$, stabilindu-se în prealabil domeniul maxim de definiție.

Soluție.

1°). a°). Deoarece $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ expresia devine $\operatorname{tg} \pi = 0$.

b°). Cum $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ rezultă:

$$\arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

2°). Trebuie ca $-1 \leqslant \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \leqslant 1$ deci $-1 - x^2 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1 + x^2$ adică $x^2 \geqslant 0$ deci domeniul maxim de definiție este R.

3°). Domeniul de definiție al funcției $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ este $[-1, 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie:

$$\arcsin x = \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arccos x = \beta \in [0, \pi]$$

deci:

$$x = \sin \alpha, \quad x = \cos \beta$$

adică:

$$\sin \alpha = \cos \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

deci (avem în vedere condițiile impuse):

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

de unde:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ deci } f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad (\forall)\ x \in [-1, 1].$$

4°). Domeniul maxim de definiție este [0, 1]. Cum $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, $\cos(\arccos \alpha) = \alpha$, are loc $\cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1$, $x \in [0, 1]$, și $\arcsin \sqrt{1-x} = \arccos \sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2} = \arccos \sqrt{x}$, deci $f(x) = 2x^2 - 1 + \arcsin \sqrt{x} + \arccos \sqrt{x} = 2x^2 - 1 + \frac{\pi}{2}$.

Codomeniul minim este deci $\left[\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2} + 1\right]$.

IV.5.0. Graficele funcțiilor trigonometrice directe și inverse. Variația funcțiilor trigonometrice pe intervalele de monotonie se studiază cu ajutorul unor valori particulare dispuse într-un tabel de variație (sau tabel de valori ale funcției). Dacă tabelul de valori ale unei funcții, în general, conține un număr suficient de mare de puncte, se consideră graficul ca fiind curba care unește aceste puncte (într-un sistem rectangular xOy) cu condiția ca punctele să fie convenabil alese.

Scanned with OKEN Scanner

x / y	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$y = \sin x$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0
$y = \cos x$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$y = \operatorname{tg} x$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0
$y = \operatorname{ctg} x$	$+\infty \mid$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Funcțiile trigonometrice directe fiind periodice, este suficient să facem graficul pe intervalele $[0, 2\pi]$ (pentru sinus și cosinus) și $(0, \pi)$ (pentru tangentă și cotangentă), în fiecare interval $[2k\pi, (2k+2)\pi]$ (pentru sinus și cosinus) și $(k\pi, (k+1)\pi)$ (pentru tangentă și cotangentă) curba repetîndu-se $(k \in Z)$.

$y = \sin x$

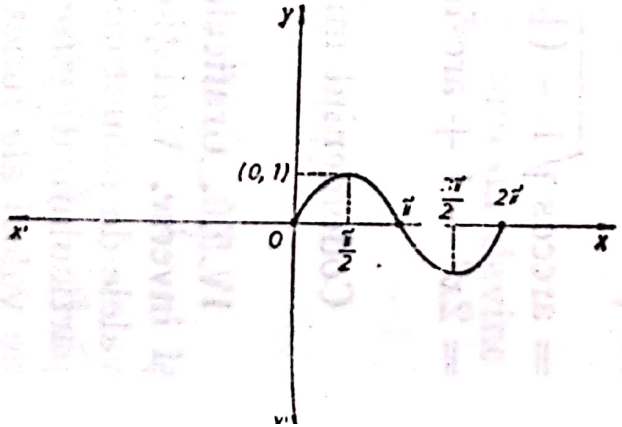


Fig. IV.5.a

$y = \cos x$

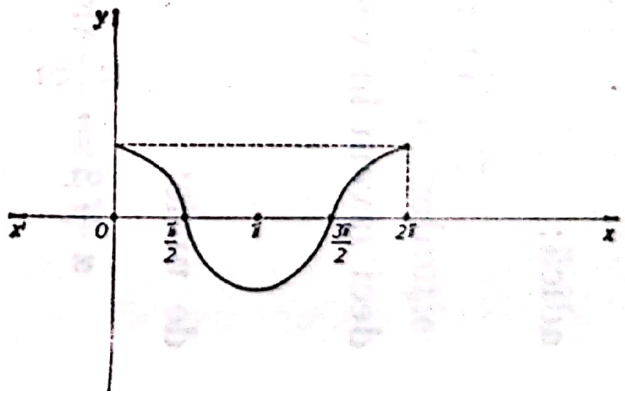


Fig. IV.5.b

Scanned with OKEN Scanner

$y = \operatorname{tg} x$

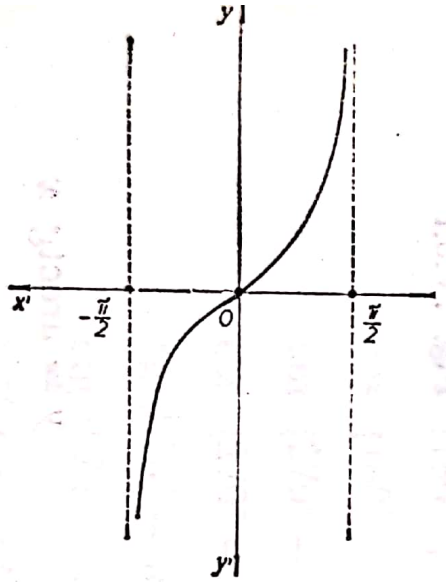


Fig. IV.5.c

$y = \operatorname{ctg} x$

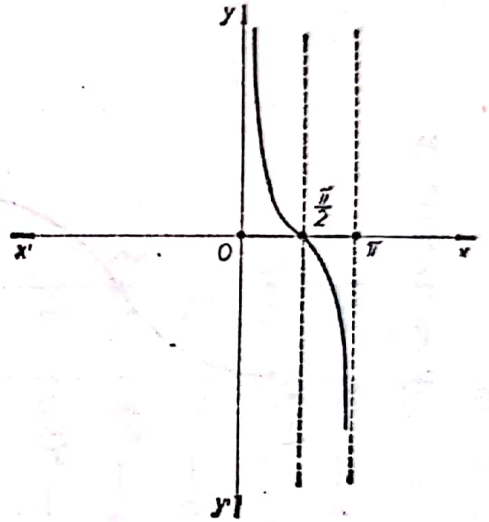


Fig. IV.5.d

Pentru funcțiile trigonometrice inverse avem tabelul:

x / y	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$y=\arcsin x$			$-\frac{\pi}{2}\nearrow$		$-\frac{\pi}{3}\nearrow$	$-\frac{\pi}{4}\nearrow$	$-\frac{\pi}{6}\nearrow$	$0\nearrow$		$\frac{\pi}{6}\nearrow$	$\frac{\pi}{4}\nearrow$	$\frac{\pi}{3}\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$		
$y=\arccos x$			$\pi\searrow$		$\frac{5\pi}{6}\searrow$	$\frac{3\pi}{4}\searrow$	$\frac{2\pi}{3}\searrow$	$\frac{\pi}{2}\searrow$		$\frac{\pi}{3}\searrow$	$\frac{\pi}{4}\searrow$	$\frac{\pi}{6}\searrow$	0		
$y=\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{2}\nearrow$	$-\frac{\pi}{3}\nearrow$	$-\frac{\pi}{4}\nearrow$	$-\frac{\pi}{6}\nearrow$				$0\nearrow$	$\frac{\pi}{6}\nearrow$			$\frac{\pi}{4}\nearrow$	$\frac{\pi}{3}\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	
$y=\operatorname{arcctg} x$	$\pi\searrow$	$\frac{5\pi}{6}\searrow$	$\frac{3\pi}{4}\searrow$	$\frac{2\pi}{3}\searrow$				$\frac{\pi}{2}\searrow$	$\frac{\pi}{3}\searrow$			$\frac{\pi}{4}\searrow$	$\frac{\pi}{6}\searrow$	0	

Scanned with OKEN Scanner

$y = \arcsin x$

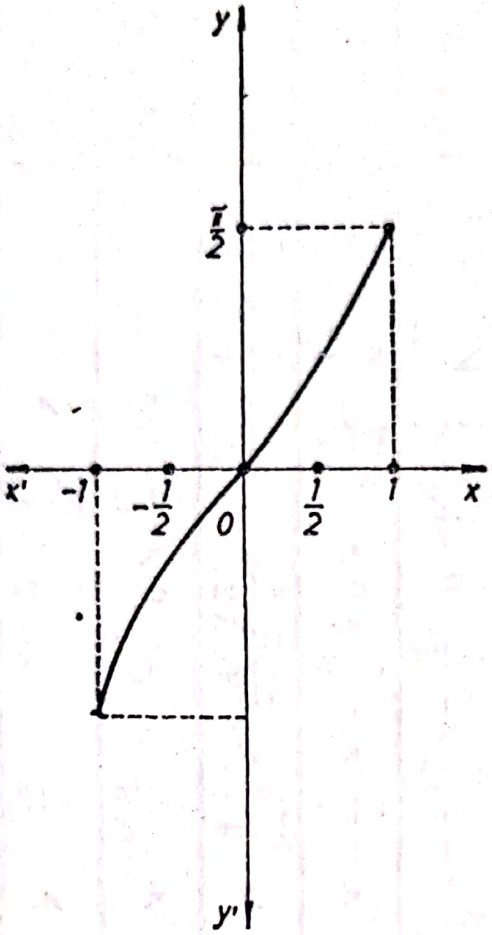


Fig. IV.5.e

$y = \arccos x$

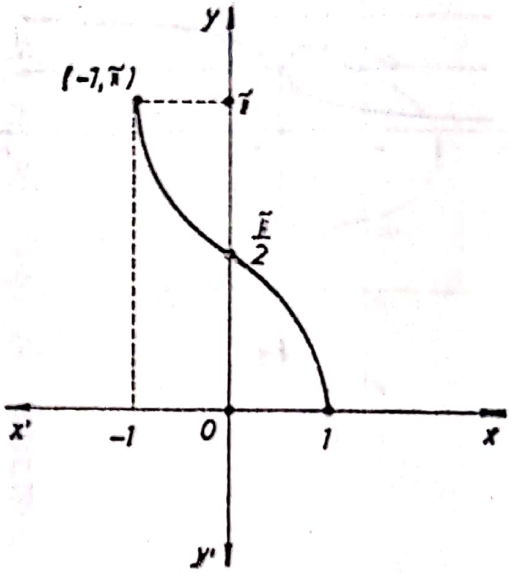


Fig. IV.5.f

$y = \operatorname{arctg} x$

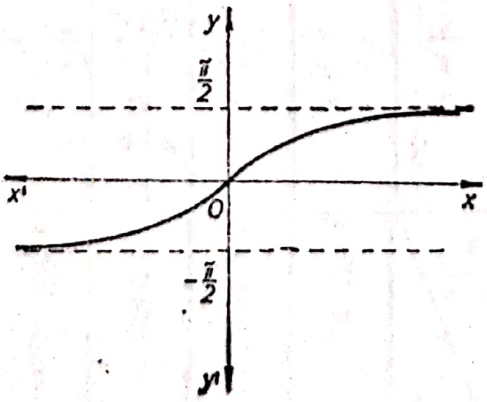


Fig. IV.5.g

$y = \operatorname{arcctg} x$

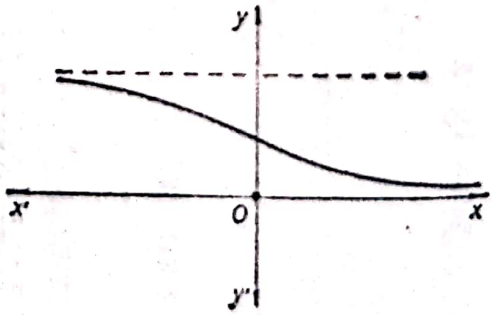


Fig. IV.5.h

Scanned with OKEN Scanner

IV.6.0. Formule fundamentale. Pentru unghiurile pentru care funcțiile trigonometrice fundamentale au sens, au loc relațiile:

$$\sin\ (90° + a) = \cos\ a,$$

$$\cos\ (90° + a) = -\sin\ a,$$

$$\operatorname{tg}\ (90° + a) = -\operatorname{ctg}\ a,$$

$$\operatorname{ctg}\ (90° + a) = -\operatorname{tg}\ a,$$

$$\sin\ (90° - a) = \cos\ a,$$

$$\cos\ (90° - a) = \sin\ a,$$

$$\operatorname{tg}\ (90° - a) = \operatorname{ctg}\ a,$$

$$\operatorname{ctg}\ (90° - a) = \operatorname{tg}\ a,$$

$$\sin\ (180° - a) = \sin\ a,$$

$$\cos\ (180° - a) = -\cos\ a,$$

$$\operatorname{tg}\ (180° - a) = -\operatorname{tg}\ a,$$

$$\operatorname{ctg}\ (180° - a) = -\operatorname{ctg}\ a,$$

$$\sin\ (180° + a) = -\sin\ a,$$

$$\cos\ (180° + a) = -\cos\ a,$$

$$\sin\ (270° - a) = -\cos\ a,$$

$$\cos\ (270° - a) = -\sin\ a,$$

$$\operatorname{tg}\ (270° - a) = \operatorname{ctg}\ a,$$

$$\operatorname{ctg}\ (270° - a) = \operatorname{tg}\ a,$$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1,$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}; \quad \operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\sin a};$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a}; \quad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a};$$

Scanned with OKEN Scanner

	$\sin a$	$\cos a$	$\operatorname{tg} a$	$\operatorname{ctg} a$	$\sec a$	$\operatorname{cosec} a$
$\sin a$	$\sin a$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 a}$	$\dfrac{\operatorname{tg} a}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 a}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\sec^2 a-1}}{\sec a}$	$\dfrac{1}{\operatorname{cosec} a}$
$\cos a$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 a}$	$\cos a$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg} a}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 a}}$	$\dfrac{1}{\sec a}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}{\operatorname{cosec} a}$
$\operatorname{tg} a$	$\pm\dfrac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$	$\operatorname{tg} a$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg} a}$	$\pm\sqrt{\sec^2 a-1}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}$
$\operatorname{ctg} a$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin a}$	$\dfrac{\cos a}{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg} a}$	$\operatorname{ctg} a$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 a-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}$
$\sec a$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\dfrac{1}{\cos a}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 a}}{\operatorname{ctg} a}$	$\sec a$	$\dfrac{\operatorname{cosec} a}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}$
$\operatorname{cosec} a$	$\dfrac{1}{\sin a}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 a}$	$\dfrac{\sec a}{\pm\sqrt{\sec^2 a-1}}$	$\operatorname{cosec} a$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b},$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b},$$

$$\operatorname{ctg}(a+b) = \frac{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b - 1}{\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b};$$

$$\operatorname{ctg}(a-b) = \frac{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b + 1}{\operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} a},$$

$$\sin(a+b+c) = \sum \sin a \cos b \cos c - \sin a \sin b \sin c,$$

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \sum \sin a \sin b \cos c,$$

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\sum \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \sum \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b},$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2},$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b-a}{2},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin (a+b)}{\cos a \cos b}; \quad \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin (a-b)}{\cos a \cos b};$$

$$\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b = \frac{\sin (a+b)}{\sin a \sin b}; \quad \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b = \frac{\sin (b-a)}{\sin a \sin b};$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos (a-b) - \cos (a+b)],$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos (a+b) + \cos (a-b)],$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin (a+b) + \sin (a-b)],$$

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b};$$

$$\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b = \frac{\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b};$$

$$\operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{ctg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} b};$$

$$\operatorname{ctg} (a+b+c) = \frac{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c - \sum \operatorname{ctg} a}{\sum \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b - 1}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a,$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}; \qquad \operatorname{ctg} 2a = \frac{\operatorname{ctg}^2 a - 1}{2 \operatorname{ctg} a};$$

$$\sin 3a = (3 - 4 \sin^2 a) \sin a$$

$$\cos 3a = (4 \cos^2 a - 3) \cos a,$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a} \qquad \operatorname{ctg} 3a = \frac{\operatorname{ctg}^3 a - 3 \operatorname{ctg} a}{3 \operatorname{ctg}^2 a - 1}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2};$$

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2};$$

$$\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2};$$

$$\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a} = \operatorname{ctg}^2 \frac{a}{2};$$

$$\sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}};$$

$$\cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}};$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}};$$

$$\operatorname{ctg} a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}};$$

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a = -2 \operatorname{ctg} 2a,$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a = \frac{2}{\sin 2a};$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}};$$

$$\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2};$$

$$\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}.$$

IV.7.0. Maxime și minime trigonometrice. Pentru aflarea maximului, respectiv minimului unei funcții oarecare se pot folosi teoremele:

a°). Produsul mai multor puteri pozitive ale unor factori pozitivi, variabili, de sumă constantă , este maxim, cînd acești factori sînt proporționali cu exponenții lor, dacă acest lucru este posibil.

Scanned with OKEN Scanner

b°). Suma unor numere pozitive, în ipoteza că produsul acestor numere este constant, este minimă cînd numerele sînt proporționale cu exponenții lor, dacă acest lucru este posibil.

Reamintim și inegalitatea:

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \geqslant (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}, \quad x_i > 0, \; i = \overline{1,n},$$

cu egalitate cînd $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ (inegalitatea mediilor sau a lui *Cauchy*). Demonstrația este dată în capitolul III în soluția problemei III.P.129.

IV.7.1. *Aplicații.* 1°). Să se determine amplitudinea, faza inițială, perioada și frecvența oscilației armonice pentru $y = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ și să se construiască graficul.

2°). Să se determine maximul funcției $f : R \to R$ definită prin $f(x) = \sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x$, $m, n \in N^*$.

3°). Să se determine minimul funcțiilor f și g definite de:

$$f(x) = 2\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} x, \; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$g(x) = \cos 2x + 4\cos x + 3, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

4°). Să se determine minimul funcției $f(x) = \operatorname{tg}^m x + \operatorname{ctg}^n x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și să se determine valoarea lui x corespunzătoare acestui minim.

Soluție. 1°).

$$y = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = a\sin(\omega x + \varphi) \text{ unde } |a| \text{ este}$$

amplitudinea oscilației, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ este perioada miș-

cării, $\nu = \frac{1}{T}$ este frecvența mișcării, iar φ faza inițială. În cazul de față $|a| = \sqrt{2}$, $T = 2\pi$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\nu = \frac{1}{2\pi}$. Pentru grafic se folosește tabelul:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
y	1	$\sqrt{2}$	1	-1	1

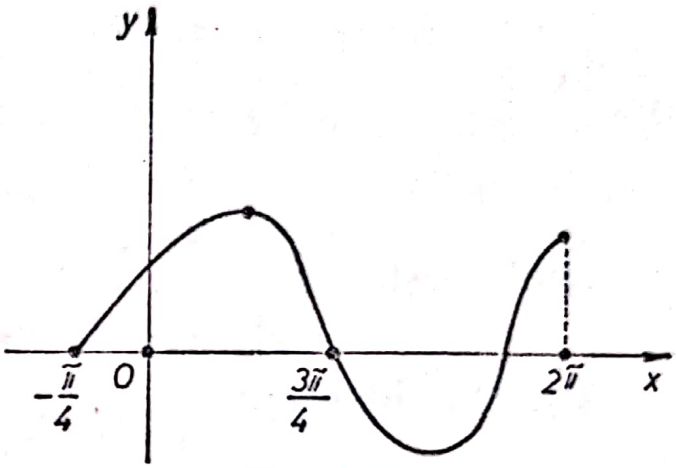


Fig. IV.7.1

2°). Cum $f(x) = (\sin^2 x)^m (\cos^2 x)^n$ și $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, sîntem în condițiile teoremei a°). Maximul funcției se obține pentru x satisfăcînd condiția:

$$\frac{\sin^2 x}{m} = \frac{\cos^2 x}{n}$$

deci pentru $\operatorname{tg}^2 x = \frac{m}{n}$ adică $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{m}{n}}$; în fond, pentru $x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{m}{n}}\right)$. Deducem $\sin^2 x = \frac{m}{m+n}$; $\cos^2 x = \frac{n}{m+n}$ deci maximul funcției este $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$.

3°). Întrucît $(2 \operatorname{tg} x)(5 \operatorname{ctg} x) = 10 = \text{const.}$, sîntem în condițiile teoremei b°). Obținem minimul funcției considerate pentru x satisfăcînd egalitatea $2 \operatorname{tg} x = 5 \operatorname{ctg} x$ adică pentru $\operatorname{tg}^2 x = \frac{5}{2}$ de unde $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{5}{2}}$ și $\operatorname{ctg} x = \sqrt{\frac{2}{5}}$ astfel că $\min\limits_{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} f(x) = 2\sqrt{\frac{5}{2}} + 5\sqrt{\frac{2}{5}} = 2\sqrt{10}$

(egalitatea $\operatorname{tg}^2 x = \frac{5}{2}$ conduce și la $\operatorname{tg} x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ dar în acest caz $x \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$).

Pentru funcția g, $g(x) = \cos 2x + 4 \cos x + 3 = 2\cos^2 x + 4 \cos x + 2$, $\cos x \in [-1, 1]$ adică, altfel scris, $g(x) = 2(\cos x + 1)^2$. Minimul se obține pentru $\cos x = 0$ deci $x = \frac{\pi}{2}$ iar maximul pentru $x = 0$. În felul acesta, $\min\limits_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = 2$, $\max\limits_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} g(x) = 8$.

4°). Din identitatea:

$$(\operatorname{tg}^m x)^{\frac{1}{m}} (\operatorname{ctg}^n x)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

deducem că putem aplica teorema b°). Obținem pentru x valoarea dată de relația:

$$\frac{\operatorname{tg}^m x}{\frac{1}{m}} = \frac{\operatorname{ctg}^n x}{\frac{1}{n}}.$$

adică $x = \operatorname{arctg} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{n+m}}$, care realizează minimul deci:

$$\min f(x) = \frac{n+m}{(m^m n^n)^{\frac{1}{m+n}}}.$$

Avem însă de-a face și cu altfel de tipuri de probleme legate de maxim și minim.

Exemplu. Dacă $13° \leqslant x \leqslant 28°$ atunci:

a°). $\frac{3}{2} \leqslant \sin^2 (4x + 8°) + \cos^2 (4x - 82°) \leqslant 2$,

b°). $0 \leqslant \operatorname{ctg}^2 (4x + 8°) + \operatorname{tg}^2 (4x - 82°) \leqslant \frac{2}{3}$.

În adevăr, în cazul a°), $\cos (4x - 82°) = \sin (90 - 4x + 82°) = \sin (172° - 4x) = \sin (180° - 172° + 4x) = \sin (4x + 8°)$.

Scanned with OKEN Scanner

Prima inegalitate devine:

$$\frac{3}{2} \leqslant 2 \sin^2 (4x + 8°) \leqslant 2$$

sau:

$$\frac{3}{4} \leqslant \sin^2 (4x + 8°) \leqslant 1.$$

Cum $13° \leqslant x \leqslant 28°$ rezultă $60° \leqslant 4x + 8° \leqslant 120°$, deci se obține:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin (4x + 8°) \leqslant 1,$$

de unde rezultă imediat afirmația.

b°). Este clar că $\operatorname{tg} (4x - 82°) = -\operatorname{ctg} (4x + 8°)$. Cum $60° \leqslant 4x + 8° \leqslant 120°$, rezultă:

$|\operatorname{ctg} (4x + 8°)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$ iar inegalitatea obținută se scrie:

$$0 \leqslant 2 \operatorname{ctg}^2 (4x + 8°) \leqslant \frac{2}{3},$$

care este evidentă.

IV.8.0. Ecuații și sisteme de ecuații trigonometrice.

a°). *Ecuații trigonometrice simple.*

$\sin x = a \Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \arcsin a$ dacă:

$$-1 \leqslant a \leqslant 1, \quad k \in Z,$$

$\cos x = b \Rightarrow x = 2k\pi \pm \arccos b$, dacă:

$$-1 \leqslant b \leqslant 1, \; k \in Z,$$

$\operatorname{tg} x = c \Rightarrow x = k\pi + \operatorname{arctg} c$, oricare ar fi c real, $k \in Z$.

Ecuațiile $\sin f(x) = 0$, $\cos f(x) = 0$, $\operatorname{tg} f(x) = 0$ se rezolvă mai întîi în raport cu $f(x)$.

Exemplu. $\sin \left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = n\pi +$

$+ (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$, $n \in Z$, $3x - \frac{\pi}{6} = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4}$;

$$3x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = n \cdot \frac{\pi}{3} +$$

$$+ (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{18}, \quad n \in Z.$$

Scanned with OKEN Scanner

b°). *Ecuații trigonometrice reductibile la ecuații algebrice.*

În ecuația trigonometrică figurează aceeași funcție la diferite puteri întregi. De exemplu, ecuația $2\sin^3 x - \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$ se rezolvă punînd $\sin x = t$ și se obține $2t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0$, cu rădăcinile $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = \frac{1}{2}$ și deci ecuația trigonometrică dată se descompune în ecuațiile trigonometrice simple:

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{2}\,; \quad \sin x = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{2}\,, \quad \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}\,.$$

c°). *Ecuații omogene în sin x și cos x.*

Aceste ecuații se rezolvă împărțind prin $\cos x$ la puterea maximă și punînd $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = t$.

d°). *Ecuația a sin x + b cos x = c.*

Se rezolvă fie folosind unghiul auxiliar dat de relația $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ și ecuația se scrie $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi$, fie înlocuind $\sin x$ și $\cos x$ în funcție de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. În acest caz ecuația se scrie:

$$(b + c) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{x}{2} - (b - c) = 0.$$

Ecuația are soluții reale dacă $a^2 + b^2 \geqslant c^2$. Pentru alte tipuri de ecuații se încearcă transformarea în produs egal cu zero și descompunerea ecuației în mai multe ecuații simple.

Aplicație. Să se rezolve ecuația:

$$4 \sin x \cos x + 2 \sin x - 2 \cos x - 1 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Succesiv:

$$2 \sin x (2 \cos x + 1) - (2 \cos x + 1) = 0;$$
$$(2 \cos x + 1)(2 \sin x - 1) = 0$$

deci:

$$2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad k \in Z,$$

$$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}, \quad x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, \quad n \in Z.$$

Este util să se figureze pe cercul orientat, extremitățile arcelor obținute ca soluții.

e°). *Ecuații în care intervin funcții trigonometrice inverse.*

De obicei, ecuațiile în care figurează una din funcțiile arcsin, arccos, arctg, arcctg, se numesc tot trigonometrice. De exemplu, ecuația:

$$\arcsin \frac{1}{x} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{x} = \operatorname{arctg} \sqrt{3}$$

se rezolvă transformînd-o într-o ecuație algebrică notînd de exemplu, $\left(\text{luînd } v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$:

$$\arcsin \frac{1}{x} = u \Rightarrow \sin u = \frac{1}{x}; \quad \arccos \frac{\sqrt{3}}{x} = v \Rightarrow \cos v =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{x}; \quad \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

$$E = u + v; \quad \sin E = \sin u \cos v + \sin v \cos u,$$

$$\sin E = \frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{3}}{x} + \sqrt{1 - \frac{3}{x^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{x^2} + \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{|x|} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|x|} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{x^2 - 3} \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Se obține $x^4 - 4x^2 = 0$ de unde $x_1 = 2$ (rădăcinile $x_2 = -2$, $x_3 = x_4 = 0$ nu convin, potrivit condițiilor anterioare).

Scanned with OKEN Scanner

f°). *Sisteme trigonometrice.* În general, pentru rezolvarea sistemelor trigonometrice se folosește substituția. Pentru unele cazuri particulare se folosesc transformări, artificii de calcul, etc. Mai des întîlnite sînt două categorii de sisteme:

IV.8.1. Una din ecuații este algebrică și anume se cunoaște suma sau diferența celor două arce necunoscute.

Exemple.

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \pm \sin y = a, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \pm \cos y = a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = a. \end{cases}$$

IV.8.2. Amîndouă ecuațiile cuprind sume sau diferențe, produse sau cîturi de două funcții trigonometrice.

Exemple.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \sin x - \sin y = b, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x - \cos y = b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b. \end{cases}$$

Pentru categoria IV.8.1 se transformă ecuația a doua în produs și se ține seama de prima ecuație. Pentru categoria IV.8.2 de la caz la caz.

De pildă, o cale de rezolvare a sistemului:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b, \end{cases}$$

este următoarea: din ecuația a doua rezultă $\cos x \cos y = \frac{a}{b}$. Sistemul dat se reduce la sistemul:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a \\ \cos x \cos y = \frac{a}{b} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Adunînd și scăzînd ecuațiile noului sistem, obținem:

$$\cos(x-y)=\frac{a(1+b)}{b} \quad \text{deci}\cdot$$

$$x-y=2k\pi\pm\arccos\frac{a(1+b)}{b},\quad k\in Z,$$

$$\cos(x+y)=\frac{a(1-b)}{b} \quad \text{deci}$$

$$x+y=2k'\pi\pm\arccos\frac{a(1-b)}{b},\quad k'\in Z.$$

Cunoscînd suma și diferența celor două arce necunoscute, rezolvarea este imediată.

Atît ecuațiile cît și sistemele trigonometrice au o infinitate de soluții pe mulțimea arcelor reale, atunci cînd ecuațiile (sistemele) sînt posibile.

IV.8.3. *Aplicații.* Să se rezolve sistemele:

a°). $\begin{cases}\arcsin x\,\arcsin y=a\\ \arccos x\,\arccos y=b,\end{cases}$

b°). $\begin{cases}x+y=a\\ \sin^2x+\sin^2y=1-\cos a.\end{cases}$

Soluții. a°). Deoarece:

$$\arccos x+\arcsin x=\frac{\pi}{2},$$

prima ecuație se scrie:

$$\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arccos y\right)=a.$$

Cu substituțiile $u=\arccos x$, $v=\arccos y$, sistemul se scrie:

$$\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=a,$$

$$uv=b$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde, după transformări simple:

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2b}{\pi} - \dfrac{2a}{\pi} \\ uv = b \end{cases}$$

sistem algebric ce se rezolvă în mod obișnuit. Mai departe, $x = \cos u$, $y = \cos v$.

IV.8.4. *Inegalități și inecuații.* Inecuațiile (sau sistemele de inecuații) se reduc, în general, la una din formulele:

$$\sin x \gtrless a$$

$$\cos x \gtrless a$$

$$\operatorname{tg} x \gtrless a$$

$$\operatorname{ctg} x \gtrless a$$

care se rezolvă punînd fie $a = \sin u$ (în primul caz, dacă acest lucru este posibil) $a = \cos u$ (în al doilea) etc., transformîndu-se diferența de sinusuri, cosinusuri, etc., în produs și făcînd discuția în funcție de semnele pe care funcțiile trigonometrice le au în cele patru cadrane.

IV.8.4.1. *Exemplu.* Inecuația:

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \leqslant 0$$

implică, pentru $[0, \pi] - \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$.

$$\frac{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)} \leqslant 0,$$

de unde, avînd în vedere tabelul:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	$+$		1	$+$	0	$-$	
$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	$-$		0	$+$		$+$	

rezultă $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

În categoria inegalităților trigonometrice intră și inegalitățile condiționate (de exemplu, între funcțiile trigonometrice asociate unghiurilor unui triunghi) care vor fi studiate la paragraful referitor la rezolvarea triunghiului.

În general, la discuția ecuațiilor și inecuațiilor vom reține numai intervalul $[0, 2\pi]$.

IV.9.0. Numere complexe.

IV.9.1. *Planul complex.* Numerele de forma $z = x + \mathrm{i}\, y$, unde x și y sînt numere reale iar $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ se numesc numere complexe. Două numere complexe $z_1 = x_1 + \mathrm{i}\, y_1$ și $z_2 = x_2 + \mathrm{i}\, y_2$ sînt egale dacă și numai dacă $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$.

Fie $z = x + \mathrm{i}\, y$ un număr complex și fie xOy un sistem de axe rectangulare. Dat fiindcă există un singur

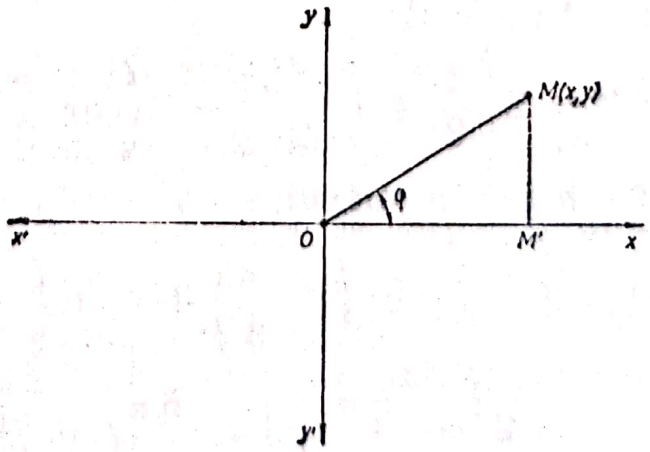


Fig. IV.9.1

punct M din plan care are abscisa x și ordonata y, rezultă că există o corespondență biunivocă între mulțimea numerelor complexe z și mulțimea punctelor $M(x, y)$ din plan, după cum există o corespondență biunivocă între mulțimea punctelor unei drepte și mulțimea numerelor reale.

Punctul $M(x, y)$ reprezintă imaginea geometrică a numărului $z = x + iy$, iar z este *afixul* punctului M; lungimea segmentului OM, notată $|z|$ se numește *modulul* numărului complex z și este egal, potrivit teoremei lui *Pitagora*, cu $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$.

IV.9.2. *Forma trigonometrică a numărului complex.* Dacă notăm cu M' proiecția punctului M pe Ox, din triunghiul $OM'M$ deducem:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho};$$

de unde rezultă:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

și, ca atare, $z = \rho (\cos \rho + i \sin \varphi)$. Această formă se numește *forma trigonometrică* a numărului complex z. Unghiul φ este dat de:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \text{ deci } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Numărul complex $x - i\,y$ se numește *conjugatul* numărului complex $z = x + i\,y$ și se notează cu $\bar{z}$. Rezultă $|\bar{z}| = |z|$, $\arg \bar{z} = 2\pi - \arg z$.

Exemplu. Numărul:

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

are drept conjugat numărul:

$$\bar{z} = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\left[\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

IV.9.3. *Operații cu numere complexe.* Adunarea și înmulțirea numerelor complexe se bucură de aceleași proprietăți ca și adunarea, respectiv înmulțirea numerelor reale. Dacă identificăm prin C mulțimea numerelor complexe atunci dubletele $(C, +)$, $(C - \{0\}, \cdot)$ constituie grupuri comutative. Are loc aceeași lege de distributivitate a înmulțirii față de adunare:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 = z_2z_1 + z_3z_1 = (z_2 + z_3)z_1$$

astfel că, așa cum s-a arătat în capitolul II, tripletul $(C, +, \cdot)$ constituie un inel.

Dacă $z_1 = x_1 + \mathrm{i}\, y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}\, y_2$ atunci:

$$z_1z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}\,(x_1y_2 + x_2y_1)$$

și cum:

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|, \text{ obținem identitatea:}$$

$$(x_1^2 + y_1^2)\,(x_2^2 + y_2^2) = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_2y_1 + x_1y_2)^2,$$

valabilă pentru orice $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$.

Aplicație. Să se arate că produsul a n numere $(n \in N^*)$ de forma $a^2 + b^2$ cu $a, b \in Z$ este un număr întreg de aceeași formă.

Soluție. Raționăm prin inducție completă după n. Fie:

$$z_1 = a_1^2 + b_1^2, \quad z_2 = a_2^2 + b_2^2 \text{ și, în general, } z_i = a_i^2 + b_i^2,\ i = \overline{1,\ n}.$$

Potrivit identității de mai sus:

$$(a_1^2 + b_1^2)\,(a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2,$$

de unde se constată că produsul z_1z_2 este de aceeași formă căci $a_1a_2 - b_1b_2$ și $a_2a_1 + a_1b_2$ sînt numere întregi. Presupunem că produsul oricăror $n - 1$ numere de forma $a^2 + b^2$ este de aceeași formă.

Înmulțind cu un nou număr $u^2 + v^2$ obținem, potrivit identității enunțate, un număr de aceeași formă. Potrivit principiului inducției matematice, afirmația este valabilă pentru orice n.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm z_1 și z_2 scrise sub formă trigonometrică:

$$z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$
$$z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Evident:

$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \rho_1\rho_2[\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \rho_1\rho_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]$ și, în general, dacă:

$$z_k = \rho_k (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k), \quad k = \overline{1, n}$$

atunci:

$$z_1 z_2 \ldots z_n = \rho_1\rho_2 \ldots \rho_n [\cos (\varphi_1 + \ldots + \varphi_n) + i \sin (\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)]$$

ceea ce se demonstrează prin inducție. Dacă:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi, \quad \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n = 1$$

atunci:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Dacă $\varphi = -\alpha$ atunci $(\cos \alpha - i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha - i \sin n\alpha$, adică formulele lui *Moivre*.

IV.9.4. *Aplicație.* Să se calculeze, punîndu-se sub formă trigonometrică:

a°). $\prod_{k=1}^{n} z_k$ unde $z_k = \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}$; $n \in N^*$.

b°). $A = (1 + i)^7 (\sqrt{3} - i)^5$.

Soluție.

a°). Evident $\prod_{k=1}^{n} z_k = \cos \sum_{k=1}^{n} \frac{k\pi}{n} + i \sin \sum_{k=1}^{n} \frac{k\pi}{n} =$

$$= \cos \frac{n(n+1)\pi}{2n} + i \sin \frac{n(n+1)\pi}{2n} = \cos \frac{(n+1)\pi}{2} +$$

$$+ i \sin \frac{(n+1)\pi}{2} = \begin{cases} i \text{ dacă } n = 4t, \\ -1 \text{ dacă } n = 4t + 1, \\ -i \text{ dacă } n = 4t + 2, \\ 1 \text{ dacă } n = 4t + 3. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

b°). $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\right.$

$\left.+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-\right.$

$\left.-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ deci:

$$A=(\sqrt{2})^7\cos\left(\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\cdot 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{6}-\right.$$

$$\left.-i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=(\sqrt{2})^{17}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\ \sin\left(\frac{7\pi}{4}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=(\sqrt{2})^{17}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\ \sin\frac{11\pi}{12}\right).$$

IV.9.5. Din dezvoltarea binomului după *Newton:*

$$(\cos\varphi+i\ \sin\varphi)^n=\cos^n\varphi+i\,C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi+$$
$$+i^2C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+\ldots+i^n\,C_n^n\sin^n\varphi$$

și din formula lui *Moivre:*

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi,$$

obținem:

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+ \tag{1}$$
$$+C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi-\ldots$$

$$\sin n\varphi=C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+ \tag{2}$$
$$+C_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi-\ldots$$

și, prin împărțire:

$$\operatorname{tg}n\varphi=\frac{C_n^1\operatorname{tg}\varphi-C_n^3\operatorname{tg}^3\varphi+C_n^5\operatorname{tg}^5\varphi-\ldots}{1-C_n^2\operatorname{tg}^2\varphi+C_n^4\operatorname{tg}^4\varphi-\ldots} \tag{3}$$

și, de asemenea:

$$\operatorname{ctg}n\varphi=\frac{\operatorname{ctg}^n\varphi-C_n^2\operatorname{ctg}^{n-2}\varphi+C_n^4\operatorname{ctg}^{n-4}\varphi-\ldots}{C_n^1\operatorname{ctg}^{n-1}\varphi-C_n^3\operatorname{ctg}^{n-3}\varphi+C_n^5\operatorname{ctg}^{n-5}\varphi-\ldots} \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

IV.9.6. *Aplicații.* 1°). Să se calculeze $\sin 4x$, $\cos 9x$ în funcție de $\sin x$, respectiv $\cos x$.

2°). Să se arate că:

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4},$$

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

3°). Dacă $n = 4k \pm 1$, $k \in N^*$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ nu poate fi număr rațional,

Soluții. 1°). Potrivit formulei (2):

$$\sin 4x = C_4^1 \cos^3 x \sin x - C_4^3 \cos x \sin^3 x =$$
$$= 4(\sqrt{1 - \sin^2 x})^3 \sin x - 4\sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \sin^3 x;$$

$$\cos 9x = \cos^9 x - C_9^2 \cos^7 x \sin^2 x + C_9^4 \cos^5 x \sin^4 x -$$
$$- C_9^6 \cos^3 x \sin^6 x + C_9^8 \cos x \sin^8 x = \cos^9 x -$$
$$- 36 \cos^7 x (1 - \cos^2 x) + 126 \cos^5 x (1 - \cos^2 x)^2 -$$
$$- 84 \cos^3 x (1 - \cos^2 x)^3 + 9 \cos x (1 - \cos^2 x)^4 =$$
$$= 256 \cos^9 x - 576 \cos^7 x + 432 \cos^5 x - 120 \cos^3 x +$$
$$+ 9 \cos x.$$

2°). După *Moivre*:

$$(1 + \mathrm{i})^n = (\sqrt{2})^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i} \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = \left(\cos \frac{\pi}{4} + \right.$$
$$\left. + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{4} \right)^n (\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{n\pi}{4} \right) =$$
$$= (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4} + \mathrm{i} (\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}$$

iar după *Newton:*

$$(1 + \mathrm{i})^n = C_n^0 + \mathrm{i} C_n^1 + \mathrm{i}^2 C_n^2 + \mathrm{i}^3 C_n^3 + \ldots + \mathrm{i}^n C_n^n =$$
$$= (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots) + \mathrm{i} (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots)$$

și egalînd, părțile reale și cele imaginare, obținem ceea ce trebuia demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

3°). Dacă în formula ce dă tangenta unghiului $n\varphi$ în funcție de $\operatorname{tg}\varphi$ facem $\varphi = \frac{\pi}{n}$ obținem:

$$C_n^1 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} - C_n^3 \operatorname{tg}^3\frac{\pi}{n} + C_n^5 \operatorname{tg}^5\frac{\pi}{n} - \ldots = 0.$$

Fie $n \geqslant 5$. Să arătăm că, în această condiție, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ nu poate fi număr rațional. Presupunem, prin absurd, că ar fi număr rațional, deci există $p, q \in N^*\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} > 0\right)$ astfel ca $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{p}{q}$. În plus, putem presupune că p și q sînt prime între ele; în caz contrar, simplificăm prin cel mai mare divizor comun al lor. Avem:

$$C_n^1 \frac{p}{q} - C_n^3 \frac{p^3}{q^3} + C_n^5 \frac{p^5}{q^5} - \ldots = 0.$$

Dacă $n = 4k + 1$, ultimul termen este $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot C_n^n \frac{p^n}{q^n}$ deci, aducînd la același numitor comun, găsim:

$$p^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^n = -(C_n^1 pq^{n-1} - C_n^3 p^3 q^{n-3} + \ldots) =$$
$$= pq(-C_n^1 q^{n-2} + C_n^3 p^2 q^{n-4} - \ldots)$$

de unde deducem că $p^{n-1} \vdots q$ deci $*(p, q) \neq 1$ contrar ipotezei că cele două numere nu au nici un divizor comun. Deci dacă $n = 4k + 1$, $k \in N^*$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ nu poate fi număr rațional. Folosind formula (4), analog, se arată că $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ nu poate fi rațional nici în celelalte două cazuri căci dacă $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ este rațional atunci și $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ este rațional.

Scanned with OKEN Scanner

IV.9.7. *Rădăcina de ordinul n dintr-un număr complex.*

Fie $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ și $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Ridicînd această egalitate la puterea n, obținem:

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

de unde, identificînd părțile reale și părțile imaginare, obținem:

$$r = \rho^{\frac{1}{n}},\quad \alpha = \frac{2k\pi + \varphi}{n},\quad k = \overline{0,\ n-1}.$$ Deci:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi+\varphi}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}\right);\quad k = \overline{0,\ n-1}.$$

IV.9.7.1. *Aplicație.* Să se calculeze $\sqrt[5]{1+i}$.

Soluție.

$$\sqrt[5]{1+i} = \sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{5} + i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{5}\right) =$$

$$= \sqrt[10]{2}\left[\cos\frac{(8k+1)\pi}{20} + i\sin\frac{(8k+1)\pi}{20}\right],\quad k = \overline{0,\ 4}.$$

Ecuațiile binome de forma $z^n - k = 0$ se rezolvă punînd pe k sub formă trigonometrică, $k = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, astfel că:

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),\quad k = \overline{0,\ n-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

IV.10.0. Calcul vectorial. Vectori în plan. Compunerea și adunarea vectorilor. Proprietăți.

Viteza, accelerația, etc., sînt mărimi vectoriale spre deosebire de masă, lungime care sînt mărimi scalare. Orice mărime vectorială este caracterizată de o direcție, un sens și o poziție a sa în spațiu, de o origine și o extremitate (capetele vectorului). Ne vom opri asupra vectorilor din plan.

Să considerăm un sistem de axe xOy rectangular. Asociem fiecărui vector o reprezentare a sa în sistemul ales. Considerăm ca vectori fundamentali, vectorii situați pe axele de coordonate cu originea în O și de modul 1. Numim acești vectori, *versorii* axelor xx' respectiv yy'. Din regula de compunere a vectorilor (regula paralelogramului):

$\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{AQ}$ și cum $x = AP = A'B'$, $y = AQ = A''B''$ găsim $\overline{AB} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

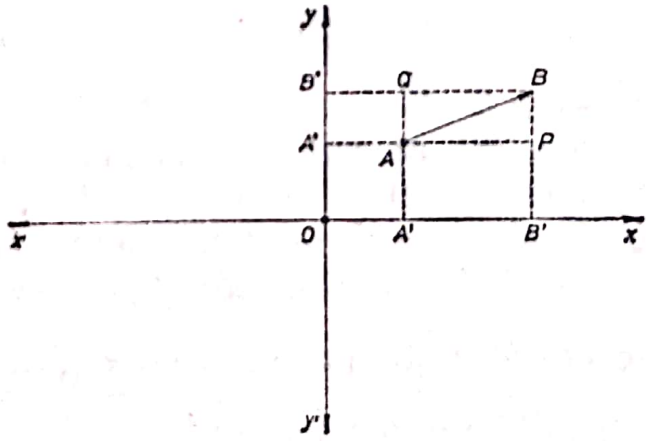


Fig. IV.10.0

Pentru simplificare, asociem vectorului dubletul (x, y). În felul acesta putem identifica un vector după mărimea proiecțiilor lor pe cele două axe. *Lungimea* (sau *norma*) vectorului este, potrivit teoremei lui *Pitagora* aplicată în $\triangle APB$:

$$\rho = \sqrt{AP^2 + AQ^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\vec{V}$, $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ patru vectori în plan, de coordonate (x, y), (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$. Dacă $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ atunci $\vec{V} = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$, ceea ce demonstrează că adunarea vectorilor în plan este comutativă. Trecînd la coordonate în plan, dacă:

$$\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} \quad \text{și} \quad \vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

atunci:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} = (x_2 + x_1)\vec{i} + (y_2 + y_1)\vec{j} = \vec{V}_2 + \vec{V}_1.$$

Se constată că în plus există și proprietățile:

1°). $1 \cdot \vec{V} = \vec{V}$,

2°). $\alpha(\beta\vec{V}) = (\alpha\beta)\vec{V}$,

3°). $(\alpha + \beta)\vec{V} = \alpha\vec{V} + \beta\vec{V}$,

oricare ar fi $\alpha, \beta \in R$.

Ca atare, această operație de adunare a vectorilor este asociativă (am văzut deja că ea este comutativă); se constată că elementul neutru (elementul de efect nul) este vectorul de coordonate (0, 0) și că fiecărui vector $\vec{V}$ de coordonate (x, y) îi corespunde un opus (invers, simetric) $\vec{V}_s$ de coordonate $(-x, -y)$. Cu aceasta, mulțimea vectorilor coplanari constituie un grup în raport cu operația de adunare (operația este internă căci adunarea a doi vectori este tot un vector).

Produsul scalar. Prin definiție, produsul scalar al vectorilor $\vec{V}_1$, de coordonate (x_1, y_1) și $\vec{V}_2$ de coordonate (x_2, y_2) este:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Analizînd poziția lor în plan, se constată că:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2| \cos \alpha,$$

unde α este unghiul dintre cei doi vectori.

Produsul scalar este, după cum se poate imediat constata, comutativ, distributiv față de adunarea vectorilor. De asemenea:

1°). $\alpha[\beta(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)] = (\alpha\beta)\,(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)$

(produsul este asociativ față de produsul a două numere reale) și:

2°). $(\alpha\vec{V}_1)\vec{V}_2 = \alpha(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \vec{V}_1 \cdot (\alpha\vec{V}_2)$

(produsul scalar este asociativ față de înmulțirea cu un scalar).

IV.11.0. Rezolvarea triunghiului.

IV.11.1. *Relații între elementele unui triunghi dreptunghic.* Notații (vezi fig. IV.11.1): a = ipotenuza; b și c = catetele; A = unghiul drept, S = aria.

Au loc formulele:

$b = a \sin B = a \cos C;$

$c = a \sin C = a \cos B;$

$b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{ctg} C;$

$c = b \operatorname{tg} C = b \operatorname{ctg} B;$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

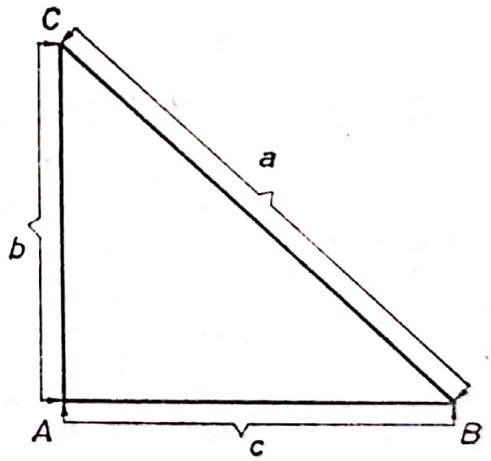


Fig. IV.11.1

IV.11.2. *Relații între elementele unui triunghi oarecare.* Notații: a, b, c = laturile; A, B, C = unghiurile; p = semiperimetrul; S = aria; R = raza cercului circumscris; r = raza cercului înscris; r_a, r_b, r_c = = razele cercurilor exînscrise; h_a, h_b, h_c, = înălțimile; l_a, l_b, l_c = bisectoarele.

Scanned with OKEN Scanner

1°). *Relația sinusului:*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \text{sau}$$

$$a = 2R \sin A,\ b = 2R \sin B,\quad c = 2R \sin C.$$

2°). *Relațiile cosinusului:*

$$\text{I}\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B, \\ b = c\cos A + a\cos C, \\ c = a\cos B + b\cos A, \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \end{cases}$$

3°). *Relațiile lui Neper:*

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}; \qquad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}};$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}}.$$

4°). *Relația lui Mollweide:*

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}; \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}.$$

5°). *Unghiuri în funcție de laturi:*

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}, \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}, \qquad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

6°). *Arii:*

$$S=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{bc\sin A}{2}=\frac{ac\sin B}{2}=\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}=$$

$$=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}=$$

$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

7°). *Raze:*

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}=\frac{abc}{4S};$$

$$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}=$$

$$=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

$$r_a=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{S}{p-a};\qquad r_b=p\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{S}{p-b};$$

$$r_c=p\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{S}{p-c}.$$

8°). *Înălțimi:*

$$h_a=\frac{2S}{a};\quad h_b=\frac{2S}{b},\quad h_c=\frac{2S}{c}.$$

9°). *Bisectoare:*

$$l_a=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A\cos\dfrac{B-C}{2}};\quad l_b=\frac{b\sin A\sin C}{\sin C\cos\dfrac{C-A}{2}};$$

$$l_c=\frac{C\sin A\sin B}{\sin C\cos\dfrac{C-A}{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

IV.R.1. Este posibil ca într-un triunghi oarecare ABC să aibă loc relațiile:

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{1} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{2} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{3}\,?$$

(Concurs, Gazeta Matematică, 1914)

Soluție. Fie A', B', C' punctele de contact ale triunghiului ABC (dacă acesta există) cu cercul înscris, de rază r. Au loc relațiile:

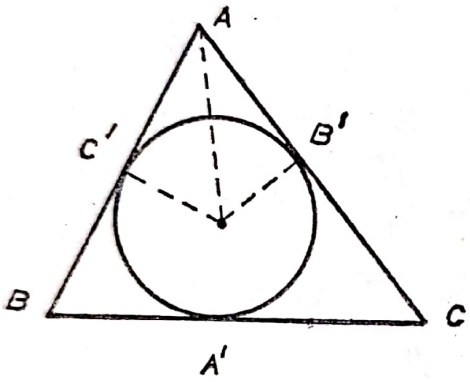


Fig. IV.R.1

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{AC'}{r} = \frac{AB'}{r};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = \frac{BA'}{r} = \frac{BC'}{r};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \frac{CA'}{r} = \frac{CB'}{r};$$

(vezi fig. IV.R.1) și înlocuind în relația dată se obține:

$$\frac{\frac{AC'}{r}}{1} = \frac{\frac{BA'}{r}}{2} = \frac{\frac{CB'}{r}}{3} = \frac{\frac{p}{r}}{6}.$$

Așadar:

$$AC' = AB' = \frac{p}{6};\quad BA' = BC' = \frac{p}{3};\quad CA' = CB' = \frac{p}{2};$$

$$BC = BA' + CA' = \frac{5p}{6},\quad CA = CB' + AB' = \frac{4p}{6};$$

$$AB = AC' + BC' = \frac{3p}{6},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde se vede că laturile sînt ale unui triunghi dreptunghic, căci:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

IV.R.2. Demonstrați identitatea:

$$(1 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots)^2 = 2^n.$$

unde $C_n^k = 0$ pentru $k > n$.

(Matematika v şckole, 1965)

Soluție. În paragraful referitor la numere complexe, am arătat că:

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots = (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots = (\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}$$

de unde, ridicînd ambele identități, membru cu membru, la pătrat și ținînd seama de indentitatea $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, prin adunare obținem identitatea de demonstrat.

IV.R.3. Să se determine $a,b \in N$ și $x \in R$ în ipoteza că $\operatorname{tg} x \in Q$, $\sqrt{6 \operatorname{ctg} x} \in \mathbf{C}_R Q$, $\sqrt{ab} \in \mathbf{C}_R Q$ și:

$$\sqrt{5 \operatorname{tg} x + 2\sqrt{6 \operatorname{ctg} x}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

(Octavian Logofătu, Rev. „514", I. 70)

Soluție. Ridicînd la pătrat și identificînd părțile reale, raționale și respectiv irațională, obținem:

$$5 \operatorname{tg} x = a + b,$$

$$6 \operatorname{ctg} x = ab,$$

de unde, prin înmulțire, avînd în vedere identitatea $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$:

$$(a + b)(ab) = 30,$$

care trebuie rezolvată în numere naturale. Cum $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, dacă $a = 2$ atunci $b = 3$; dacă $a = 3$ atunci $b = 2$; dacă $a = 5$ atunci $b = 1$ (convin pentru b numai soluțiile pozitive). Dacă $a = 1$ atunci $b = 5$.

Scanned with OKEN Scanner

În primul caz, $x = \operatorname{arc\,tg} 1 + k\pi$, $k \in Z$. Analog pentru al doilea caz. În al treilea caz, $x = \operatorname{arc\,tg} \frac{6}{5} + k\pi$, $k \in Z$. Analog pentru al patrulea caz.

IV.R.4. Să se arate că într-un triunghi ABC:

$$4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \sin A + \sin B + \sin C.$$

Soluție. În adevăr:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} +$$

$$+ 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{\pi - C}{2} \cos \frac{A-B}{2} +$$

$$+ 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \left(2 \cos \frac{C}{2}\right) \left(\cos \frac{A-B}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos \frac{\pi - C}{2}\right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A - B + \pi - C}{4} \cdot$$

$$\cdot \cos \frac{A - B - \pi + C}{4} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

IV.R.5. Să se rezolve ecuația:

$$\sin (x + 2a) \sin (x + 2b) = \sin^2 (x + c).$$

Discuție.

Soluție. Cu formula:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos (a - b) - \cos (a + b)]$$

ecuația devine:

$$-\frac{1}{2} [\cos (2x + 2a + 2b) - \cos (2a - 2b)] = \sin^2 (x + c)$$

și cum $\sin^2 (x + c) = \frac{1}{2} [1 - \cos (2x + 2c)]$ obținem:

$$1 - \cos (2x + 2c) = \cos (2a - 2b) - \cos (2x + 2a + 2b)$$

Scanned with OKEN Scanner

adică, altfel scris:

$$-\cos(2x+2a+2b)+\cos(2x+2c)=1-$$
$$-\cos(2a-2b)=2\sin^2(a-b),$$
$$\sin(2x+a+b+c)\sin(a+b-c)=\sin^2(a-b),$$
$$\sin(2x+a+b+c)=\frac{\sin^2(a-b)}{\sin(a+b-c)}.$$

Ca să existe soluții trebuie ca $\sin(a+b-c)\neq 0$ deci $a+b-c\neq k\pi$, $k\in Z$, și:

$$-1\leqslant\frac{\sin^2(a-b)}{\sin(a+b-c)}\leqslant 1.$$

În acest caz:

$$x=\frac{1}{2}\left[(-1)^k\arcsin\frac{\sin^2(a-b)}{\sin(a+b-c)}+k\pi-a-b-c\right].$$

IV.R.6. Fără a utiliza valorile numerice ale funcțiilor trigonometrice, să se demonstreze inegalitatea $\sin 36^\circ > \operatorname{tg} 36^\circ$.

(Tatiana Oțel, G.M.B, 7134)

Soluție. Fie în triunghiul isoscel ABC (vezi fig. IV.R.6), $AB=BC=1$, $\sphericalangle ABC=36^\circ$, $AL\perp BC$; T fiind punctul de concurență al bisectoarelor, $BE\perp BT$, $E\equiv BE\cap AT$.

De aici:

$$\sphericalangle BAD=$$
$$=\frac{1}{2}\sphericalangle BAC=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 72^\circ=36^\circ,$$
$$\sphericalangle ABE=90^\circ+18^\circ=$$
$$=108^\circ,\quad \sphericalangle BEA=$$
$$=180^\circ-(108^\circ+36^\circ)=$$
$$36^\circ \text{ deci } BE=AB=1.$$

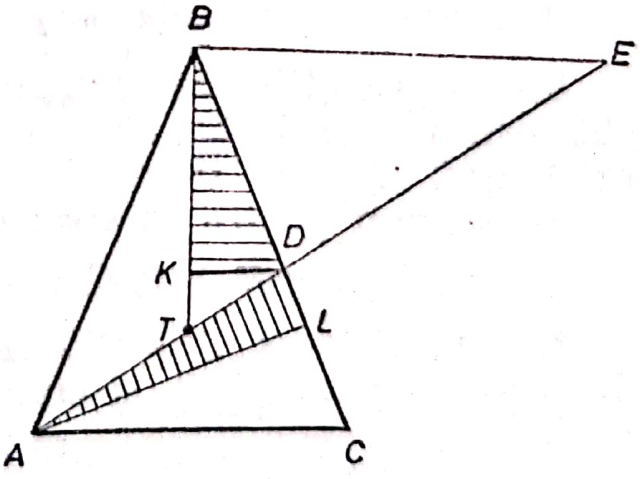


Fig. IV.R.6

Scanned with OKEN Scanner

Din triunghiurile ALB și TBE obținem:

$$BL = \cos 36°, \quad BT = \operatorname{tg} 36°$$

astfel că este suficient să arătăm că $BL > BT$ pentru a demonstra enunțul.

Ducînd $DK \perp BT$, obținem că $\triangle BKD = \triangle ALD$ ($AD = BD$, $\sphericalangle DBK = \sphericalangle DAL = 18°$) deci $DL = DK$ și:

$$\cos 36° = BL = BD + DL = BD + DK,$$

$$\operatorname{tg} 36° = BT = BK + KT.$$

În $\triangle TKD$, $\sphericalangle KDT = 36°$ și $\sphericalangle KTD = 54°$, deci:

$$KD > KT. \qquad (*)$$

În $\triangle BKD$, BD este ipotenuză, deci:

$$BD > BK. \qquad (**)$$

Adunînd inegalitățile stelate obținem:

$$BD + DK > BK + KT$$

și cum $DK = DL$ obținem:

$$BL > BT,$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

IV.R.7. Să se arate că dacă A, B, C, sînt unghiurile unui triunghi oarecare ABC, ascutitunghic, atunci:

$$36 \leqslant 4(\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A) \leqslant 9 + \\ + \operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C.$$

Soluție. Condiția ca triunghiul să nu fie dreptunghic este necesară căci altfel unul din numerele $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$ nu este finit.

Să arătăm pentru început că:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

În adevăr, $A + B + C = \pi$ implică $\operatorname{tg}(A + B) = \operatorname{tg}(\pi - C) = -\operatorname{tg} C$ și cum:

$$\operatorname{tg}(A + B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă, succesiv:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = -\operatorname{tg} C(1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B),$$
$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Cu substituțiile:

$$x = \operatorname{tg} A, \quad y = \operatorname{tg} B, \quad z = \operatorname{tg} C$$

rezultă $x, y, z > 0$ și ipoteza devine:

$$x + y + z = xyz$$

iar concluzia:

$$9 \leqslant xy + yz + zx \leqslant \frac{9 + x^2y^2z^2}{4}.$$

Inegalitatea (vezi III.P 130):

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9$$

se mai scrie, în acest caz:

$$xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9$$

deci:

$$xy + yz + zx \geqslant 9,$$

adică prima parte a inegalității propuse.

Să dovedim și inegalitatea:

$$(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \leqslant xyz. \quad (1)$$

Dacă una dintre paranteze este negativă (sau toate trei) inegalitatea este evidentă.

Dacă două paranteze sînt negative, putem studia acest caz împreună cu al treilea, în care toate parantezele sînt pozitive.

Notăm:

$$-x + y + z = a, \quad (2)$$
$$x - y + z = b, \quad (3)$$
$$x + y - z = c, \quad (4)$$

și, adunînd:

$$x + y + z = a + b + c. \quad (5)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (4) și (5), prin scădere, rezultă:

$$z = \frac{a+b}{2}, \quad x = \frac{b+c}{2}, \quad y = \frac{a+c}{2},$$

astfel că inegalitatea de demonstrat devine:

$$abc \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right). \qquad (1')$$

Dar, evident:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0,$$

pentru $a,\ b \geqslant 0$ deci:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

și analoagele pentru perechile $(b,\ c)$, $(c,\ a)$. Prin înmulțirea acestor inegalități obținem inegalitatea (1'), deci și (1).

Dacă notăm:

$$x + y + z = xyz = p,$$

inegalitatea (1) se scrie succesiv:

$$(p - 2x)(p - 2y)(p - 2z) \leqslant p,$$

$$p^3 - 2(x+y+z)p^2 + 4(xy + yz + zx)p - 8p \leqslant p,$$

$$p^3 - 2p^3 + 4(xy + yz + zx)p \leqslant 9p,$$

$$4(xy + yz + zx) \leqslant 9 + p^2,$$

$$xy + yz + zx \leqslant \frac{9 + x^2y^2z^2}{4},$$

adică a doua parte a inegalității de demonstrat.

Egalitate pentru $x = y = z = \sqrt{3}$ deci pentru triunghiul echilateral.

IV.R.8. Să se arate că au loc egalitățile:

a°). $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}$,

b°). $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Ecuația $\sin 2x + \sin 5x = 0$ se mai scrie:

$$2 \sin \frac{7x}{2} \cos \frac{3x}{2} = 0$$

deci:

$$\frac{7x}{2} = k\pi, \quad k \in Z \text{ adică } x = \frac{2k\pi}{7}; \quad k \in Z$$

și, respectiv:

$$\frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}; \quad k \in Z \text{ adică } x = \frac{(2k+1)\pi}{3}, \quad k \in Z.$$

Folosind relațiile:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin 5x = 16 \sin x^5 - 20 \sin x^3 + 5 \sin x$$

ecuația devine:

$$\sin x(2 \cos x + 16 \sin^4 x - 20 \sin^2 x + 5) = 0$$

sau:

$$\sin x = 0$$

care este verificată pentru:

$$x = k\pi, \quad k \in Z,$$

și:

$$16(1 - \cos^2 x)^2 - 20(1 - \cos^2 x) + 2 \cos x + 5 =$$
$$= 16 \cos^4 x - 12 \cos^2 x + 2 \cos x + 1 = 0$$

care este verificată de:

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Împărțind prin $(2 \cos x - 1)$, obținem:

$$8 \cos^3 x + 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 1 = 0.$$

Ținînd seama de rădăcinile aflate:

$$\cos \frac{2\pi}{7} = \cos \frac{12\pi}{7}; \cos \frac{4\pi}{7} = \cos \frac{10\pi}{7}; \cos \frac{6\pi}{7} = \cos \frac{8\pi}{7};$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că cele trei rădăcini ale ecuației:

$$8y^3 + 4y^2 - 4y - 1 = 0$$

sînt:

$$\cos\frac{2\pi}{7} > 0, \quad \cos\frac{4\pi}{7} < 0, \quad \cos\frac{6\pi}{7} < 0.$$

Folosind relațiile între rădăcini și coeficienți obținem:

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8},$$

adică tocmai relațiile de demonstrat.

Observație. Înmulțind membrul stîng din a°) cu $8\sin\frac{2\pi}{7}$ obținem:

$$E = 8\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7} =$$

$$= 4\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7} = 2\sin\frac{8\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7} =$$

$$= \sin 2\pi + \sin\frac{2\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7}.$$

de unde, prin simplificare. rezultă a°).

Înmulțind membrul stîng din b°) cu $2\sin\frac{2\pi}{7}$ se obține:

$$E = 2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} +$$

$$+ 2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7} +$$

$$+ \sin\frac{8\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7} = -\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7} =$$

$$= -\sin\frac{2\pi}{7} + 2\sin\pi\cos\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{2\pi}{7}.$$

de unde, prin simplificare, rezultă b°).

Scanned with OKEN Scanner

IV.R.9. Să se arate că oricare ar fi unghiul real x:

$$1 \leqslant |\sin x| + |\cos x| \leqslant \sqrt{2},$$

$$0 \leqslant ||\sin x| - |\cos x|| \leqslant 1.$$

Soluție. Cum:

$$|\sin x| + |\cos x| = \sqrt{(|\sin x| + |\cos x|)^2},$$

$$||\sin x| - |\cos x|| = \sqrt{(||\sin x| - |\cos x||)^2},$$

rezultă:

$$|\sin x| + |\cos x| = \sqrt{1 + |\sin 2x|},$$

$$||\sin x| - |\cos x|| = \sqrt{1 - |\sin 2x|}$$

și cum $0 \leqslant |\sin 2x| \leqslant 1$, deci:

$$1 \leqslant 1 + |\sin 2x| \leqslant 2,$$

$$0 \leqslant 1 - |\sin 2x| \leqslant 1,$$

rezultă:

$$1 \leqslant \sqrt{1 + |\sin 2x|} \leqslant \sqrt{2},$$

$$0 \leqslant \sqrt{1 - |\sin 2x|} \leqslant 1,$$

ceea ce demonstrează enunțul.

IV.R.10. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x} = 1.$$

(Gh. Băleanu, Rev. de matematică din Timișoara, nr. 1, 1975)

Soluție. Se constată că fiecare termen poate avea valoarea zero în timp ce celălalt are valoarea 1 astfel încît ecuația să fie satisfăcută.
Fie $u = \sqrt[3]{\sin x}$, $v = \sqrt[3]{\cos x}$ deci $u + v = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad (\forall) x \in R$$

rezultă:

$$u^6 + v^6 = 1$$

deci se obține sistemul:

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^6 + v^6 = 1. \end{cases}$$

Fie $u = 1 - v$. A doua ecuație a sistemului de mai sus devine:

$$2v^6 - 6v^5 + 15v^4 - 20v^3 + 15v^2 - 6v = 0$$

sau:

$$v(v - 1)\,(2v^4 - 4v^3 + 11v^2 - 9v + 6) = 0.$$

Dar:

$$2v^4 - 4v^3 + 11v^2 - 9v + 6 = 2v^2(v - 1)^2 + \\ + (9v^2 - 9v + 6)$$

și cum:

$$2v^2(v - 1)^2 \geqslant 0, \quad (\forall)\, v \in R,$$

$$9v^2 - 9v + 6 \geqslant 0, \quad (\forall)\, v \in R,$$

(aceasta deoarece, în primul caz, avem de-a face cu un produs de numere pozitive, iar în al doilea caz discriminantul este mai mic ca 0 și semnul coeficientului lui v^2 este $+$) și în concluzie ecuația:

$$2v^4 - 4v^3 + 11v^2 - 9v + 6 = 0$$

nu admite rădăcini reale.

Sistemul dă deci:

$$\begin{cases} u = 1 - v \\ v(v - 1) = 0, \end{cases}$$

în ceea ce privește soluțiile reale.

Ca atare, trebuie rezolvate sistemele:

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

respectiv:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

de unde $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z$ și $x = 2k\pi, \quad k \in Z.$

IV.R.11. Să se arate că:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad (\forall) x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Soluție. Să arătăm mai întîi că:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Evident, considerînd $OA = 1$ (vezi fig. IV.R.11.1):

$$\text{aria } \triangle OA_1A = \frac{OA_1 \cdot AA_1}{2} = \frac{\cos x \sin x}{2},$$

$$\text{aria sect } AOB_1 = \frac{x}{2},$$

$$\text{aria } \triangle BOB_1 = \frac{BB_1 \cdot OB_1}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

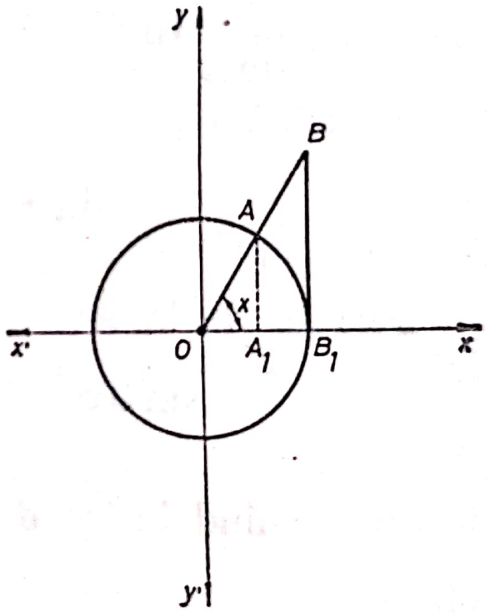


Fig. IV.R.11.1

Este clar că aria $\triangle AOA_1 <$ aria sect $AOB_1 <$ $<$ aria $\triangle BOB_1$, astfel că:

$$\frac{\sin x \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Dar $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ deci $\sin 2x < 2x$ sau, notînd $2x = x_1 \in (0, \pi)$ și cu observația că oricum, $\sin x < x$ pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ obținem ceeace ne-am propus.

De aici:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Cînd x se apropie de 0, se observă că raportul $\frac{x}{\sin x}$ este cuprins între 1 și un număr $\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ care se apropie tot mai mult de 1 deoarece $\cos 0° = 1$, iar pentru $x = 0$ are loc $\sin x = x = \operatorname{tg} x$. Scriem simbolic acest lucru prin:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

și citim „$\frac{x}{\sin x}$ tinde către 1 cînd x tinde către zero".

Să arătăm și:

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}.$$

Pornim de la formula:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

în care punînd în loc de x succesiv $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{3^2}$, ..., $\frac{x}{3^n}$, obținem:

$$3 \sin \frac{x}{3} - \sin x = 4 \sin^3 \frac{x}{3};$$

$$3 \sin \frac{x}{3^2} - \sin \frac{x}{3} = 4 \sin^3 \frac{x}{3^2},$$

.....

$$3 \sin \frac{x}{3^n} - \sin \frac{x}{3^{n-1}} = 4 \sin^3 \frac{x}{3^n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

După ce înmulțim egalitățile membru cu membru: prima cu 1, a doua cu 3, a treia cu 3^2, ... , a n — a cu 3^{n-1} și adunăm, deducem:

$$3^n \sin\frac{x}{3^n} - \sin x = 4\left(\sin^3\frac{x}{3} + 3\sin^3\frac{x}{3^2} + \ldots + 3^{n-1}\sin^3\frac{x}{3^n}\right)$$

sau, sub altă formă:

$$x\cdot\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}} - \sin x = 4\left(\sin^3\frac{x}{3} + 3\sin^3\frac{x}{3^2} + \ldots + 3^{n-1}\sin^3\frac{x}{3^n}\right).$$

Cînd n este foarte mare, $\frac{x}{3^n}$ este foarte mic. Cu alte cuvinte, cînd n tinde către $+\infty$, $u = \frac{x}{3^n}$ tinde către zero deci, așa cum am arătat anterior, $\frac{\sin u}{u}$ tinde către 1 și cum $\sin x < x$, obținem inegalitatea:

$$x - \sin x < 4\left(\frac{x^3}{3^3} + 3\cdot\frac{x^3}{3^6} + \ldots + 3^{n-1}\cdot\frac{x^3}{3^{3n}} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{4x^3}{3^3}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{2n-2}} + \ldots\right) = \frac{4x^3}{27}\cdot\frac{9}{8} = \frac{x^3}{6},$$

de unde:

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6},$$

adică tocmai ce ne-am propus să demonstrăm.

Scanned with OKEN Scanner

IV.T.1. Funcția:

$$f(x) = \sin \frac{(2x-3)}{(3x-2)} \operatorname{tg} \frac{(3x-1)}{(4x-5)}$$

are domeniul maxim de definiție:

a°). $R - \left\{\frac{2-3\pi-k\pi}{2(3-\pi-4k\pi)}\right\}_{k\in Z}$;

b°). $R - \left(\left\{\frac{2k\pi-\pi-1}{\pi-k\pi+1}\right\}_{k\in Z} \cup \{2\}\right)$;

c°). $R - \left(\left\{\frac{2-5\pi-10k\pi}{2(3-2\pi-4k\pi)}\right\}_{k\in Z} \cup \left\{\frac{2}{3}\right\}\right)$.

IV.T.2. Ecuația:

$$\sin 3x = -\sin 5x$$

are mulțimea soluțiilor egală cu:

a°). $\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}_{k\in Z} \cup \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in Z}$;

b°). $\left\{\frac{k\pi}{4}\right\}_{k\in Z} \cup \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in Z}$;

c°). $\left\{\frac{k\pi}{8}\right\}_{k\in Z} \cup \{k\pi\}_{k\in Z}$.

IV.T.3. Funcția:

$$f(x) = \sin x^2 - \sin x$$

este:

a°). pară;
b°). impară;
c°). nici pară, nici impară.

Scanned with OKEN Scanner

IV.T.4. Expresia:

$$\frac{\cos 100^\circ \cos 140^\circ}{\cos 20^\circ(\cos 100^\circ + \cos 140^\circ)} +$$

$$+ \frac{\cos 20^\circ \cos 140^\circ}{\cos 100^\circ(\cos 20^\circ + \cos 140^\circ)} +$$

$$+ \frac{\cos 20^\circ \cos 100^\circ}{\cos 140^\circ(\cos 20^\circ + \cos 100^\circ)} +$$

$$+ \frac{\cos^3 20^\circ \cos^3 100^\circ + \cos^3 20^\circ \cos^3 140^\circ + [illegible] \cos^3 100^\circ \cos^3 140^\circ}{\cos^2 20^\circ \cos^2 100^\circ \cos^2 140^\circ}$$

are valoarea:

a°). zero; b°). $\operatorname{tg} 100^\circ$; c°). $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 100^\circ \operatorname{tg} 140^\circ$.

IV.T.5. Expresia:

$$\sec 0^\circ \sec 1^\circ + \sec 1^\circ \sec 2^\circ + \ldots + \sec n^\circ \sec (n+1)^\circ$$

are valoarea:

a°). zero; b°). $\operatorname{tg} \frac{(n+1)^\circ}{\sin 1^\circ}$; c°). $\operatorname{tg} (n+1)^\circ \cos 1^\circ$.

IV.T.6. Dacă $0^\circ \leqslant x \leqslant 12^\circ$ și:

$$E = \sin (5x - 30^\circ) \cos (5x + 60^\circ)$$

atunci:

a°). $E \geqslant -1$ și $E \leqslant 0$; b°). $E \geqslant 3$ și $E \leqslant 4$; c°). $E \geqslant 4$ și $E \leqslant 5$.

IV.T.7. Ecuația:

$$16x^2 - 16x + 1 = 0$$

admite drept soluție:

a°). $\sin 22^\circ 30'$; b°). $\sin^2 15^\circ$; c°). $\cos^2 65^\circ$.

Scanned with OKEN Scanner

IV.T.8. Dacă α și β sînt arce reale, pot fi întotdeauna echivalente afirmațiile:

$$A \equiv \sin \alpha = \operatorname{tg} \beta,$$

$$B \equiv \sin (\alpha + \beta) = 2 \sin \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2} \ ?$$

a°). Da; b°). Nu.

IV.T.9. Care număr este mai mare:

$$A = \operatorname{tg} 15^\circ; \quad B = \cos 15^\circ?$$

a°). primul; b°). al doilea; c°). sînt egale.

IV.T.10. Fie x_i, $i = 1, 2, 3$, rădăcinile reale ale ecuației:

$$a^2(b - c)\, x^3 + b^2(c - a)\, x^2 + c^2(b - a)\, x + (a - b) \cdot$$

$$\cdot (b - c)\, (a - c) = 0,\ a, b, c \in R - \{0\},\ a \neq b \neq c \neq a.$$

Atunci suma:

$$\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 + \operatorname{arctg} x_3$$

a°). depinde de a, b, c;
b°). nu depinde nici de a, nici de b, nici de c;
c°). depinde numai de a și b.

IV.T.11. Funcția $f: D \subset [0, 2\pi] \to R$ definită prin:

$$f(x) = \frac{\cos x + \operatorname{ctg} x}{\sin x + \operatorname{tg} x}$$

pentru valorile din domeniul maxim D de definiție:
a°). este întotdeauna pozitivă sau zero; b°). este întotdeauna negativă; c°). ia și valori strict pozitive și valori strict negative.

IV.T.12. Expresia:

$$\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin (2n - 1)\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos (2n - 1)\alpha}$$

pentru valorile lui $n \in N^*$ și $\alpha \in R$ pentru care există, are valoarea:

a°). $\dfrac{1}{\cos n\alpha \cos \alpha}$; b°). $\operatorname{tg} n\alpha$; c°). $\operatorname{ctg} n\alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

IV.T.13. Egalitatea:

$$\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= (2 \cos \alpha - 1) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

cu $\alpha \neq k\pi, \quad k \in Z,$

a°). este identitate pentru:

$$\alpha \in R - \left(\{k\pi\}_{k \in Z} \cup \left\{2k\pi - \frac{\pi}{3}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} - 2k\pi\right\}_{k \in Z}\right);$$

b°). este verificată pentru un număr finit de valori ale lui α;

c°). nu este verificată pentru nici un $\alpha \in R$.

IV.T.14. Dacă:

$$\operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} a_2 + \operatorname{tg} a_3 = \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 \operatorname{tg} a_3, \; a_i \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$k \in Z, \quad i = 1, 2, 3, \text{ atunci:}$$

a°). $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in Z;$

b°). $a_1 + a_2 + a_3 = k\pi, \quad k \in Z;$

c°). $a_1 + a_2 + a_3 = k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in Z.$

IV.T.15. Se consideră:

$E = \operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 2° \cdot \operatorname{tg} 3° \ldots \operatorname{tg} 87° \cdot \operatorname{tg} 88° \cdot \operatorname{tg} 89°.$

Se cere să se precizeze dacă:

a°). $E > 0$; b°). $E < 1$; c°). $E > 1$; d°). $E = 1$.

IV.T.16. Să se precizeze dacă numerele:

$$x_1 = \sin \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \sin \frac{2\pi}{3}, \quad x_3 = \sin \frac{3\pi}{3},$$

$$x_4 = \frac{4\pi}{3}, \quad x_5 = \frac{5\pi}{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

pot fi rădăcinile ecuației:

a°). $x^5 + 3x^4 + 2x^2 + x + 1 = 0$,

b°). $x^5 - 700x^3 + 800x^2 - 1000 = 0$,

c°). $16x^5 - 24x^3 + 9x = 0$.

IV.T.17. Se consideră expresia:

$$E = \cos x \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \sec x \cdot \operatorname{cosec} x$$

și se cere să se precizeze dacă pentru $x \in (0,\ 90°)$:

a°). $\max\ E = 1$;

b°). $\min\ E = -1$;

c°). $\max\ E < 1$;

d°). $\min\ E > -1$.

IV.T.18. Triunghiul ABC se proiectează pe dreapta Ax care face cu latura AC unghiul u.

Se obține:

$$c \cdot \cos(A + u) + a \cdot \cos(C - u) = b \cdot \cos u.$$

Să se precizeze dacă se obține relația:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

înlocuind unghiul A prin:

a°). $u = \frac{\pi}{3}$; b°). $u = \frac{\pi}{2}$; c°). $u = 2\pi$.

IV.T.19. Să se precizeze dacă expresia:

$$E = 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

pentru $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ satisface condiția:

a°). $E > 2$; b°). $E = 2$; c°) $E \in [0,\ 1]$.

IV.T.20. Să se precizeze dacă expresia:

$$E = 1 + \cos x + \cos^2 x + \ldots + \cos^{n-1} x$$

poate avea valoare maximă pentru:

a°). $x = \pi$; b°). $x = 2\pi$; c°). $x = \frac{\pi}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

RĂSPUNSURI

IV.T.1. c°). **IV.T.2.** b°). **IV.T.3.** c°). **IV.T.4.** a°). **IV.T.5.** b°). **IV.T.6.** a°). **IV.T.7.** b°). **IV.T.8.** b°). **IV.T.9.** b°). **IV.T.10.** b°). **IV.T.11.** c°). **IV.T.12.** b°). **IV.T.13.** a°). **IV.T.14.** b°). **IV.T.15.** a°), d°). **IV.T.16.** Nici a°), nici b°), nici c°). **IV.T.17.** c°), d°). **IV.T.18.** b°). **IV.T.19.** c°). **IV.T.20.** b°).

PROBLEME PROPUSE

IV.P.1[1]. Să se arate că ecuația:

$$x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$$

admite rădăcina $x = \operatorname{tg} 20°$.

(Adina Florea, Rev. „514", II. 59)

IV.P.2[1]. a°). Punînd în evidență că cos $n\alpha$ (n natural) este un polinom în cos α să se deducă de aici că pentru $x \in [-1, 1]$:

$$P_n(x) = \cos (n \arccos x)$$

este un polinom în x de gradul n, care are coeficientul lui x^n egal cu 2^{n-1}.

b°). Să se rezolve ecuația:

$$\cos (n \arccos x) = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Să se verifice că această ecuație are numai n rădăcini și să se precizeze poziția lor pe axa Ox.

c°). Să se determine valorile lui $x \in [-1, 1]$ pentru care P_n este maxim sau minim.

d°). Să se verifice identitatea:

$$2 \cos (n \arccos x) = (x + i\sqrt{1 - x^2})^n + (x - i\sqrt{1 - x^2})^n.$$

Scanned with OKEN Scanner

e°). Să se deducă identitatea:

$$P_{n+1}(x) - 2x\,P_n(x) + P_{n-1}(x) = 0.$$

f°). Să se verifice rezultatele obținute pentru $n = 6$.

(Admitere, Fac. Matematică — Mecanică, București, 1965)

IV.P.3[2]**.** Să se determine maximul funcției:

$$U = \sin^2(x + y)\cos(x - y) + \sin^2(x - y)\cos(x + y)$$

unde:

$$\sin^2 x + \sin^2 y = m, \quad m \in R, \text{ constant.}$$

(Matematika v škole)

IV.P.4. Să se determine x pentru care:

$$a \sin x + b \cos x = c, \quad a, b, c \in R.$$

Discuție.

IV.P.5[1]**.** Fie $x, y \in [-1, 1]$. Să se arate că:

$$E_1 = \pm xy \pm \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} \in [-1, 1],$$

$$E_2 = \pm x\sqrt{1 - x^2} \pm y\sqrt{1 - y^2} \in [-1, 1],$$

$$E_3 = \pm x\sqrt{1 - y^2} \pm y\sqrt{1 - x^2} \in [-1, 1],$$

semnele + și — luîndu-se în toate modurile posibile.

Să se studieze cazurile cînd expresiile de mai sus iau valori la capetele intervalelor.

IV.P.6. Să se calculeze:

a°). $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin(n - 1)\varphi$;

b°). $1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos(n - 1)\varphi$;

c°). $\sin\varphi + \sin(\varphi + \alpha) + \sin(\varphi + 2\alpha) + \ldots + \sin[\varphi + (n - 1)\alpha]$;

d°). $\cos\varphi + \cos(\varphi + \alpha) + \cos(\varphi + 2\alpha) + \ldots + \cos[\varphi + (n - 1)\varphi]$.

IV.P.7[1]**.** Să se arate că dacă $0° \leqslant x \leqslant 5°$, atunci:

$$\cos(40° - 2x)\sin(70° - 2x) \geqslant \sin(40° + 4x)\cos(10° + 4x).$$

(C. Ionescu-Țiu, G.M.B, 6224)

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.8[1]. Să se demonstreze că identitatea:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x$$

are loc pentru orice n număr natural și pentru orice x real, diferit de $\frac{\pi\lambda}{2^k}$ ($k = \overline{0, n}$ și λ întreg).

(Olimpiada Internațională de Matematică)

IV.P.9. Să se arate că:

$$ab \cos C + bc \cos A + ca \cos B > 0$$

unde a, b, c sînt laturile unui triunghi oarecare ABC.

IV.P.10[1]. Să se arate că dacă $f: R \to R$ dată de $f(x) = \sin x + \cos \alpha x$ este o funcție periodică, atunci α este un număr rațional.

(Admitere I.P.B., 1973)

IV.P.11. Să se arate că nu există nici un număr real λ, $\lambda \in R - \{-1, 0, 1\}$, astfel ca ecuația:

$$(1 - \lambda^2) \sin 3x + 2\lambda \cos 3x = (1 + \lambda^2)^2$$

să aibă soluție reală.

IV.P.12[1]. Să se calculeze, fără tabele trigonometrice, expresia:

$$E = \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}.$$

(Concurs, U.R.S.S.)

IV.P.13. Dacă $a \geqslant -\frac{7}{8}$ atunci:

$$\sin^4 x + \cos^4 x - \cos^2 x + 1 + a \geqslant 0, \quad (\forall)\, x \in R.$$

IV.P.14. a°). În ce condiții numerele:

$$\sin (x - k), \sin x, \sin (x + k)$$

sînt în progresie aritmetică? b°). Dar geometrică?

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.15. Dacă $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ atunci:

$$2 \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \leqslant \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta.$$

IV.P.16[3]. Fie x un arc fixat și k un număr natural. Dacă numărul $\operatorname{ctg} \frac{x}{2^k}$ este rațional, atunci și numărul $\cos x$ este rațional. Este valabilă afirmația și pentru numărul $\sin x$?

IV.P.17[1]. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^7 x + \cos^7 x = \operatorname{tg}^7 x + \operatorname{ctg}^7 x.$$

Generalizare.

IV.P.18. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare ABC, are loc următoarea relație:

$$E = \frac{a \sin \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{b \sin \frac{C-A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{c \sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = 0.$$

(Admitere, I.P. Galați, 1970)

IV.P.19. Să se demonstreze că triunghiul în care:

$$\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$$

este dreptunghic sau isoscel.

(Admitere, I.P. Galați, 1970)

IV.P.20. Se consideră expresia:

$$E = \sqrt{\sin x + \cos 2x}.$$

Pentru ce valori ale lui $x \in [0, 2\pi]$, expresia este reală?

(Admitere, I.P. Petroșani, 1970)

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.21*. Fie a_1, a_2, a_3, ..., a_n constante reale, x o variabilă și:

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + \ldots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^n}.$$

Să se demonstreze că dacă $f(x_1) = f(x_2) = 0$, atunci $x_1 - x_2 = m\pi$, m fiind un număr întreg.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

IV.P.22[1]. În orice triunghi ABC:

$$\sum \sin A \sin B \cos C > 0.$$

IV.P.23. Cum trebuie să fie numărul natural n astfel ca $y = \cos n\varphi$ să se exprime printr-o funcție rațională de $x = \sin \varphi$?

Să se arate apoi că nu există valori $n \in N^*$ astfel ca $z = \operatorname{tg} n\varphi$ să se exprime rațional în funcție de $x = \sin \varphi$.

(Admitere, I.P.B., 1973)

IV.P.24*. Să se arate că dacă $f(\operatorname{tg} x) = g(\cos 2x)$, f și g fiind funcții, atunci:

a°). $f\left(\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\right) = g(\sin 2x)$;

b°). $f(\sin x) = g\left(\dfrac{1}{2\operatorname{tg}^2 x + 1}\right)$;

c°). $f(\cos x) = g\left(\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x}\right)$;

d°). $f(\sec x) = g\left(\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x + 1}\right)$;

e°). $f(\operatorname{ctg} x) = g(-\cos 2x)$;

f°). $f\left(\sqrt{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}\right) = g(\operatorname{tg} x)$.

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.25[1]. Să se rezolve în numere naturale ecuația:

$$\operatorname{arctg}\frac{1!}{x}+\operatorname{arctg}\frac{2!}{y}=\operatorname{arctg}\frac{3!}{x+y}.$$

(Matematika v škole)

IV.P.26[1]. Dacă $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ și $0\leqslant\beta<\frac{\pi}{2}$ atunci:

$$2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\leqslant\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta.$$

(Olimpiada de Matematică, R. P. Polonă)

IV.P.27. Să se demonstreze că dacă:

$$\cos A=\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos B=\cos\beta\sin\gamma;$$
$$\cos C=\cos\gamma\sin\alpha$$

și:

$$A+B+C=\pi$$

atunci:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1.$$

(Journal de mathématiques élémentaires)

IV.P.28. Să se rezolve inecuația:

$$3\operatorname{ctg}x-\sqrt{3}\operatorname{tg}x\geqslant 3-\sqrt{3}.$$

(Concurs de Matematică, R.P. Chineză, 1965)

IV.P.29. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\cos a+\cos 5a+\cos 9a}{\sin a+\sin 5a+\sin 9a}=\operatorname{ctg}5a.$$

dacă $\alpha\neq\frac{k\pi}{5}$, $k\in Z$ și $\cos 4\alpha\neq-\frac{1}{2}$.

IV.P.30. Să se rezolve ecuația trigonometrică:

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+\frac{1}{2}=0.$$

(Admitere, Fac. Matematică, Cluj-Napoca, 1973)

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.31. Să se transforme în produs următoarea sumă:

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x + \sin 3x + \cos 3x.$$

IV.P.32. Dacă $A \in (0°, 90°)$, $B \in (0°, 90°)$ și $A + B = 150°$, atunci:

$$\cos (A - B) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(Dorel Miheț, G.M.B, 15210)

IV.P.33*. Să se calculeze:

$$\left[\pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n}\right]_*, \quad \left[\sqrt{n\pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n}}\right]_*, \quad n \in N, \ n \geqslant 2.$$

IV.P.34. Dacă $A - C \neq 0$ și analoagele, atunci:

$$\frac{1}{4R^2} \sum \frac{ab}{\sin (C - A) \sin (C - B)} = 1,$$

notațiile fiind cele obișnuite într-un triunghi ABC.

IV.P.35[1]**.** Să se calculeze:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sec 2^k x}{\operatorname{ctg} 2^{k-1} x}$$

unde $x \neq \frac{\pi}{2^{t_1}} (2t_2 + 1)$, $(\forall)\, t_1 \in N$, $t_2 \in Z$.

IV.P.36[2]**.** Să se arate că:

$$\cos \frac{\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} + \cos \frac{7\pi}{13} + \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{11\pi}{13} = -\frac{1}{2}$$

și să se calculeze:

$$\cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{3\pi}{13} \cos \frac{5\pi}{13} \cos \frac{7\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13} \cos \frac{11\pi}{13}.$$

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.37². Se dă:

$$\frac{a_1}{\sin\varphi} = \ldots = \frac{a_7}{\sin 7\varphi}, \quad a_i \in R, \ \varphi \neq \frac{k\pi}{i}, i \in \overline{1,7}, \ k \in Z.$$

Să se determine o relație între $a_1, a_2, \ldots, a_7$, independentă de φ.

Generalizare.

IV.P.38*. Să se arate că:

a°). $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$;

b°). $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$;

c°). $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$;

$n \in N^* - \{1\}$.

IV.P.39. a°). Să se stabilească identitatea:

$$E = \sin(4x - 10°)\cos(4x - 30°) + \sin(11x + 40°) \cdot \cos(11x + 60°) = \sin(15x - 150°)\sin(7x - 20°).$$

b°). Dacă $x \in [12°, 20°]$ atunci $E \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$.

c°). Când are loc egalitatea?

IV.P.40. Să se găsească toate numerele reale x din intervalul $[0, 2\pi]$ care satisfac inegalitățile:

$$2\cos x \leqslant \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqslant \sqrt{2}.$$

(Olimpiada Internațională de Matematică)

IV.P.41. Să se demonstreze că:

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

(Olimpiada Internațională de Matematică)

IV.P.42. Se se rezolve ecuația:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

(Olimpiada Internațională de Matematică)

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.43*. Dacă:

$$x^3 + ax^2 + bx + a = (x - \operatorname{tg} A)(x - \operatorname{tg} B)(x - \operatorname{tg} C),$$

unde $b \neq 1$, să se arate că oricare ar fi x real și a, b parametri:

a°). $S = \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$ nu depinde de a.

b°). Dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi ascuțitunghic, atunci sînt necesare și condițiile $a < 0$, $b > 1$, $a^2 \geqslant 27$.

(Concurs Matematică, etapa finală, 1970)

IV.P.44*. Să se arate că:

$$\operatorname{tg} 10° + \operatorname{tg} 70° + \operatorname{tg} 130° = -3 \operatorname{tg} 10° \operatorname{tg} 70° \operatorname{tg} 130° = \sqrt{3}.$$

IV.P.45. Printre valorile reale ale expresiei:

$$E = \sqrt[5]{1 + i\sqrt{3}} + \sqrt[5]{1 - i\sqrt{3}}$$

se găsește și $\sqrt[5]{2}$?

(Concurs Matematică, 1971, enunț reformulat).

IV.P.46. Se consideră funcția f definită prin:

$$f(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}.$$

a°). Să se arate că f se poate scrie $f(x) = A \sin(\alpha + x)$ unde A este o constantă iar α un arc pozitiv mai mic decît $\frac{\pi}{2}$.

b°). Să se arate că putem scrie:

$$\frac{f(x)}{f(-x)} = \operatorname{tg} mx + \sec mx$$

unde m este un număr natural.

c°). Să se rezolve ecuația:

$$f(x) + (2 + \sqrt{3}) f(-x) = 0.$$

(Admitere, I.P.B., 1971)

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.47*. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} = 0,\ n \in N^*.$$

IV.P.48. Să se arate că în orice triunghi ABC:

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

IV.P.49*. Să se arate că:

$$\cos \frac{\pi}{2k+1} + \cos \frac{2\pi}{2k+1} + \cos \frac{3\pi}{2k+1} - \ldots + \\ + \cos \frac{k\pi}{2k+1} = -\frac{1}{2}.$$

IV.P.50. Să se găsească o relație algebrică între unghiurile x, y, z astfel încît să aibă loc relația trigonometrică:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{z}{2} + \operatorname{tg} \frac{z}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1.$$

(Admitere, Fac. Matematică, Cluj-Napoca, 1962)

IV.P.51. Să se rezolve ecuația:

$$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = \sin 3x + 5$$

IV.P.52*. Să se arate că dacă:

$$xy + yz + zx = 1$$

atunci:

$$\frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2} + \frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2} \leqslant \frac{x}{1+x^2} + \\ + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}.$$

IV.P.53*. Să se găsească maximul expresiei:

$$z = x - y$$

Scanned with OKEN Scanner

în ipotezele:

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} y = 3.$$

IV.P.54. Să se calculeze fără tabele:

$$\frac{\operatorname{cosec} 10^\circ}{2} - 2 \sin 70^\circ.$$

IV.P.55. Să se arate că între elementele unui triunghi oarecare ABC există relațiile:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos (C + 60^\circ) = b^2 + c^2 -$$
$$- 2bc \cos (A + 60^\circ) = c^2 + a^2 - 2ca \cos (B + 60^\circ).$$

IV.P.56*. Să se arate că oricare ar fi x și y reali:

$$\cos (x + y) + \sin x + \sin y \leqslant \frac{3}{2}.$$

IV.P.57. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\cos^2 2x + \cos^2 (x - y) - 2 \cos (x + y) \cos (x - y) \cos 2x}{\sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y \cos (x - y)} = 1,$$
$$x + y \neq k\pi,\ k \in Z.$$

IV.P.58[3]**.** Să se dovedească egalitatea:

$$\sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24} = \frac{1}{16}.$$

IV.P.59[2]**.** Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:

$$E = \operatorname{tg} (a + 2b - 3c) + \operatorname{tg} (b + 2c - 3a) + \operatorname{tg} (c + 2a - 3b).$$

IV.P.60[1]**.** Să se rezolve în R ecuația:

$$x^2 + 2x \sin (xy) + 1 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.1[1]. Se folosește formula după care se calculează tangenta unghiului triplu.

IV.P.2[1]. Se folosește formula lui *Moivre*.

IV.P.3[2]. Se transformă expresia.

IV.P.4. Se folosește unghiul auxiliar α astfel încît $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$.

IV.P.5[1]. Se notează $x = \sin \alpha$, $y = \sin \beta$ și se transformă expresia.

IV.P.6. Se folosesc numerele complexe.

IV.P.7[1]. Se transformă produsele în sume.

IV.P.8[1]. Se consideră diferența a două puteri succesive pentru $\operatorname{ctg} x$.

IV.P.9. Se folosește relația între laturi și un unghi (relația cosinusului).

IV.P.10[1]. Se ține seama de faptul că funcția este periodică.

IV.P.11. Se scrie $\lambda = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

IV.P.12[1]. Se exprimă $\sin^4 x$ în funcție de $\cos 2x$ și $\cos 4x$.

IV.P.13. Se exprimă totul în funcție de $\cos^2 x$.

IV.P.14. Se au în vedere proprietățile progresiilor.

IV.P.15. Se transformă expresiile în funcție de $\cos(\alpha + \beta)$ și $\cos(\alpha - \beta)$.

IV.P.16[3]. Se ține seama de relația între $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ și $\cos \alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.17[1]. Se folosește faptul că $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$.

IV.P.18. Se exprimă prin funcții trigonometrice laturile în funcție de unghiuri sau unghiurile în funcție de laturi.

IV.P.19. Se fac transformări trigonometrice.

IV.P.20. Se folosesc proprietățile trinomului de gradul al doilea.

IV.P.21. Se fac transformări pentru a ajunge la expresii de forma:

$$A_1 \cos x_1 + B_1 \sin x_1 = 0,\ A_2 \cos x_2 - B_2 \sin x_2 = 0.$$

IV.P.22[1]. A se vedea IV.P.9.

IV.P.23. Se folosește formula lui *Moivre*.

IV.P.24*. Se folosesc transformări trigonometrice ca, de pildă $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$.

IV.P.25[1]. Se aplică tangenta.

IV.P.26[1]. Se scrie $x = \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$, $y = \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2}$ și se ajunge la o inegalitate.

IV.P.27. Se folosește formula $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$.

IV.P.28. Se împarte prin $\sqrt{3}$.

IV.P.29. Se face o grupare de termeni și o transformare în produs.

IV.P.30. Se fac transformări trigonometrice în funcție de $\sin 2x$.

IV.P.33*. A se vedea IV.R.11.

IV.P.34. Se are în vedere relația sinusului.

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.35[1]. Se folosește diferența a două puteri succesive ale lui tg x.

IV.P.36[2]. Se pleacă de la ecuația:

$$\cos 7x + \cos 6x = 0.$$

IV.P.37[2]. Se folosesc transformări trigonometrice.

IV.P.38*. Se folosește ecuația $x^{2n} - 1 = 0$.

IV.P.39. Se fac transformări și regrupări de termeni.

IV.P.40. Expresiile de sub radicali sînt pătrate perfecte.

IV.P.41. Se înmulțește cu $2 \sin \frac{\pi}{7}$.

IV.P.42. Se exprimă în funcție de arcul dublu și apoi se fac grupări.

IV.P.43*. tg A, tg, B tg C, sînt rădăcinile polinomului.

IV.P.44*. Se observă că $130° + 10° = 2 \cdot 70°$.

IV.P.45. Se folosește $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, unde a și b sînt cei doi radicali sau se exprimă trigonometric numerele complexe.

IV.P.46. Se folosește $\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b) \sin(a-b)$.

IV.P.47*. A se vedea IV.P.2.

IV.P.48. Se folosește trinomul de gradul al doilea.

IV.P.49*. Se folosește egalitatea $\frac{x^{k+1}-1}{x-1} = x^k + x^{k-1} + \ldots + 1$.

IV.P.50. Se folosește tangenta sumei.

IV.P.51. Se fac transformări trigonometrice.

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.52*. Se folosește: $x = \operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $y = \operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $z = \operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

IV.P.53*. Se folosesc proporții derivate.

IV.P.54. Se poate folosi identitatea $2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$ în care $x = 10°$ și $y = 20°$.

IV.P.55. Se folosește relația sinusului.

IV.P.56*. Transformări trigonometrice pentru a ajunge la sumă de pătrate.

IV.P.57. Se ține seama că $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$.

IV.P.58[3]. Se fac grupări de factori pentru transformare în diferențe.

IV.P.59[2]. A se calcula suma celor trei argumente ale tangentelor.

IV.P.60[1]. Se cercetează existența sinusului în condiția $x \neq 0$.

SOLUȚII

IV.P.1[1]. Ecuația se mai poate scrie:

$$\sqrt{3} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}.$$

Dacă în formula ce exprimă pe $\operatorname{tg} 3\alpha$ în funcție de $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Scanned with OKEN Scanner

se face $\alpha = 20°$, se obține, succesiv:

$$\sqrt{3} = \frac{3\operatorname{tg} 20° - \operatorname{tg}^3 20°}{1 - 3\operatorname{tg}^2 20°};$$

$$3\operatorname{tg} 20° - \operatorname{tg}^3 20° = \sqrt{3} - 3\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 20°,$$

$$\operatorname{tg}^3 20° - 3\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 20° - 3\operatorname{tg} 20° + \sqrt{3} = 0,$$

ceea ce probează că, în adevăr, ecuația propusă admite rădăcina $x_1 = \operatorname{tg} 20°$.

IV.P.2[1]. a°). Formula lui *Moivre* dă:

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2}\alpha \sin^2\alpha + C_n^4 \cos^{n-4}\alpha \sin^4\alpha - \ldots$$

sau:

$$\cos n\alpha = (1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots)\cos^n \alpha - (C_n^2 + 2C_n^4 + \\ + \ldots)\cos^{n-2}\alpha + \ldots$$

deci $\cos n\alpha = P(\cos \alpha)$, P fiind un polinom. Coeficientul lui $\cos^n \alpha$ este egal cu 2^{n-1} (vezi III.P.135).

Să notăm $\arccos x = \alpha$. Rezultă:

$$P_n(x) = \cos(n \arccos x) = \cos n\alpha = 2^{n-1}\cos^n \alpha - \\ - (C_n^2 + 2C_n^4 + \ldots)\cos^{n-2}\alpha + \ldots$$

Dar $\cos \alpha = x$ deci:

$$P_n(x) = 2^{n-1}x^n - (C_n^2 + 2C_n^4 + \ldots)x^{n-2} + \ldots,$$

ceea ce demonstrează afirmația enunțului.

b°). Din:

$$\cos(n \arccos x) = 0$$

rezultă:

$$n \arccos x = (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z,$$

deci:

$$\arccos x = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k \in Z$$

sau:

$$x = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$$

în care $k = 1, \ldots, n$ căci P_n este de gradul n.

Scanned with OKEN Scanner

Evident, cele n rădăcini sînt reale și cuprinse între -1 și 1. Deoarece $0 < \frac{2(k-1)\pi}{2n} < \pi$ rezultă că pe măsură ce numărul k ia valori mai mari, x descrește.

c°). P_n este maxim cînd $x = \cos \frac{2k\pi}{n}$ și anume maximul este 1. În adevăr, dacă avem $\cos(n \arccos x) = 1$ atunci $n \arccos x = 2k\pi$ deci $\arccos x = \frac{2k\pi}{n}$ și $x = \cos \frac{2k\pi}{n}$ unde $k = 1, \ldots, n$. Valoarea minimă a lui P_n este -1 și se realizează pentru acei x pentru care $\cos(n \arccos x) = -1$ adică atunci cînd $n \arccos x = (2k-1)\pi$ deci cînd $x = \cos \frac{(2k-1)\pi}{n}$ unde $k = 1, \ldots, n$.

d°). Cu notația $x = \cos \alpha$, identitatea de demonstrat devine:

$$2 \cos n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n + (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n$$

care este evidentă (folosind formulele lui *Moivre*).

e°). Prin definiție:

$$P_{n+1}(x) = \cos(n+1)\alpha = \cos(n\alpha + \alpha),$$

$$P_{n-1}(x) = \cos(n-1)\alpha = \cos(n\alpha - \alpha).$$

Adunînd, obținem:

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2 \cos \alpha \cos n\alpha = 2xP_n(x),$$

adică tocmai ceea ce era de demonstrat.

f°). Pentru $n = 6$:

1°). $P_6(x) = \cos(6 \arccos x) = \cos 6\alpha = 2^5 \cos^6 \alpha - 48 \cos^4 \alpha + 18 \cos^2 \alpha - 1 = 2^{6-1}x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$.

2°). $P_6(x) = 0$ implică, necesar, $6 \arccos x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$ de unde rezultă $x = \cos \frac{(2k-1)\pi}{12}$, unde $k = 1, \ldots, 6$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluțiile sînt:

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad x_2 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x_3 = \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \qquad x_4 = \cos\frac{7\pi}{12} = -\cos\frac{5\pi}{12},$$

$$x_5 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_6 = \cos\frac{11\pi}{12} = -\cos\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

care verifică ecuația.

3°). Maximul lui P_6 este 1 și se realizează pentru

$$x = \cos\frac{2k\pi}{6} = \cos\frac{k\pi}{3}, \text{ unde } k = 1, \ldots, 6,$$

rezultate care verifică.

Minimul lui P_6 este -1 și se atinge pentru

$$x = \cos\frac{(2k-1)\pi}{6}, \text{ unde } k = 1, \ldots, 6,$$

rezultate care, de asemenea, verifică.

4°). Are loc relația:

$$2\cos 6\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^6 + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^6$$

sau:

$$2\cos 6\alpha = (\cos 6\alpha + i\sin 6\alpha) + (\cos 6\alpha - i\sin 6\alpha)$$

ceea ce este evident.

5°). Încă:

$$\cos 7\alpha - 2\cos\alpha\cos 6\alpha + \cos 5\alpha = 0$$

căci:

$$2\cos\frac{7\alpha+5\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha-5\alpha}{2} - 2\cos\alpha\cos 6\alpha = 0$$

ceea ce este evident.

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.3². Efectuînd calculele, găsim, pentru U expresia:

$$U = 2 \cos x \cos y (\sin^2 x + \sin^2 y) = 2m \cos x \cos y$$

maximă odată cu expresia $\cos x \cos y$. Dar:

$$\cos^2 x + \cos^2 y = 2 - (\sin^2 x + \sin^2 y) = 2 - m$$

este constant deci maximul expresiei U va fi atins pentru $(m \in (0, 2))$;

$$\cos x = \cos y = \sqrt{\frac{2 - m}{2}}$$

și deci:

$$\max U = m(2 - m).$$

IV.P.4. *Soluția I.* Ținînd cont că $a, b \in R$ putem considera că aceste valori, a și b, reprezintă coordonatele unui punct din planul xOy.

Făcînd notațiile ca în figura IV.P.4 rezultă:

$$\frac{a}{t} = \cos \varphi; \qquad a = t \cos \varphi;$$

$$\frac{b}{t} = \sin \varphi; \qquad b = t \sin \varphi.$$

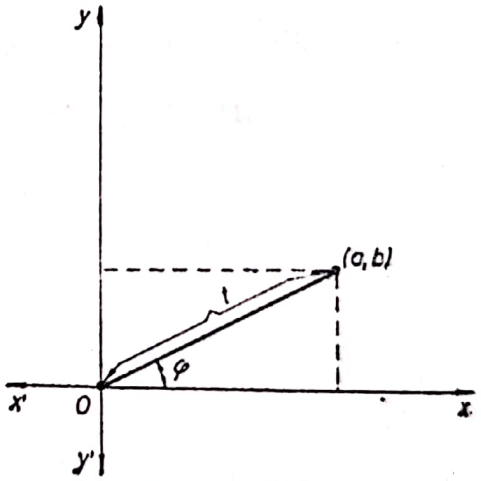


Fig. IV.P.4

Înlocuind în ecuația din enunț, găsim:

$$t \cos \varphi \sin x + t \sin \varphi \cos x = c$$

sau:

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{t}$$

de unde:

$$x = \arcsin \frac{c}{t} - \varphi.$$

Dar $\sqrt{a^2 + b^2} = t$, $\varphi = \arcsin \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ deci:

$$x = \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca x să fie real trebuie ca:

$$-1 \leqslant \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1,$$

adică:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leqslant c \leqslant \sqrt{a^2+b^2}.$$

Inegalitățile:

$$-1 \leqslant \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1$$

sînt evidente.

Soluția a II-a. Ecuația se mai scrie:

$$\sin x = \frac{c - b\cos x}{a}$$

Ridicînd la pătrat și ținînd seama de identitatea:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \quad (\forall)\ a \in R,$$

obținem:

$$1 - \cos^2 x = \frac{c^2 - 2bc\cos x + b^2\cos^2 x}{a^2},$$

$$(a^2+b^2)\cos^2 x - 2bc\cos x + c^2 - a^2 = 0.$$

Deducem:

$$\cos x = \frac{bc \pm \sqrt{b^2c^2 - (a^2+b^2)\ (c^2-a^2)}}{a^2+b^2} \text{ etc.}$$

IV.P.5[1]. Cum $x, y \in [-1, 1]$, putem scrie $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$ și expresiile devin:

$$E_1 = \pm\sin\alpha\sin\beta \pm \cos\alpha\cos\beta = \pm\cos(\alpha \pm \beta),$$

$$E_2 = \pm\sin\alpha\cos\alpha \pm \sin\beta\cos\beta = \frac{1}{2}(\pm\sin 2\alpha \pm \sin 2\beta),$$

$$E_3 = \pm\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta = \pm\sin(\alpha \pm \beta),$$

astfel că apartenența lor la intervalul $[-1, 1]$ este evidentă.

IV.P.6. Fie:

$$S_n = \cos\varphi + \cos(\varphi + \alpha) + \ldots + \cos[\varphi + (n-1)\alpha],$$

$$\sigma_n = \sin\varphi + \sin(\varphi + \alpha) + \ldots + \sin[\varphi + (n-1)\alpha].$$

Succesiv:

$$S_n + i\sigma_n = [\cos\varphi + i\sin\varphi] + [\cos(\varphi + \alpha) + i\sin(\varphi + \alpha)] + \ldots + [\cos(\varphi + (n-1)\alpha) + i\sin(\varphi + (n-1)\alpha)] =$$

$$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)\ [(1 + (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 + \ldots + (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{n-1}] = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\frac{1 - (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)}{1 - (\cos\alpha + i\sin\alpha)} = (\cos\varphi + i\sin\varphi) :$$

$$\cdot \frac{2\sin^2\frac{n\alpha}{2} - 2i\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = (\cos\varphi + i\sin\varphi) :$$

$$\cdot \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{n\alpha}{2} - i\cos\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} - i\cos\frac{\alpha}{2}} = (\cos\varphi + i\sin\varphi) :$$

$$\cdot \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right) : \left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \left[\cos\left(\varphi + \frac{(n-1)\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\varphi + \frac{(n-1)\alpha}{2}\right)\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin identificare obținem:

$$\sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha) + \ldots + \sin(\varphi+(n-1)\alpha) =$$

$$= \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sin\left(\varphi + \frac{n-1}{2}\alpha\right),$$

$$\cos\varphi + \cos(\varphi+\alpha) + \ldots + \cos(\varphi+(n-1)\alpha) =$$

$$= \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \cos\left(\varphi + \frac{n-1}{2}\alpha\right)$$

deci c°) și d°).

Pentru $\varphi = 0$ obținem expresiile de la punctele a°) și b°).

IV.P.7[1]**.** Transformînd produsele în sume, inegalitatea propusă devine:

$$\sin(110^\circ - 4x) > \sin(50^\circ + 8x)$$

sau încă:

$$\sin(70^\circ + 4x) > \sin(50^\circ + 8x).$$

Se vede că ambele arce din paranteze (avem în vedere condiția $0^\circ \leqslant x \leqslant 5^\circ$) se află în cadranul I și cum funcția sinus este, pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, crescătoare, obținem:

$$\sin(70^\circ + 4x) \geqslant \sin(50^\circ + 8x)$$

căci:

$$70^\circ + 4x \geqslant 50^\circ + 8x.$$

Egalitate cînd $x = 5^\circ$.

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.8[1]. Evident:

$$\operatorname{ctg} 2^{k-1}x - \operatorname{ctg} 2^k x = \frac{\cos 2^{k-1}x}{\sin 2^{k-1}x} - \frac{\cos 2^k x}{\sin 2^k x} =$$

$$= \frac{\sin 2^k x \cos 2^{k-1}x - \cos 2^k x \sin 2^{k-1}x}{\sin 2^{k-1}x \sin 2^k x} =$$

$$= \frac{\sin 2^{k-1}x}{\sin 2^{k-1} x \sin 2^k x} = \frac{1}{\sin 2^k x}$$

pentru $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$, $\lambda \in Z$, $k \in N$.

Sumînd, obținem:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{ctg} 2^{k-1}x - \operatorname{ctg} 2^k x) =$$

$$= \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x$$

ceea ce trebuia demonstrat.

IV.P.9. Formulele:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

adunate, ne dau:

$$\sum bc \cos A = \frac{1}{2} \sum a^2 > 0$$

ceea ce trebuia demonstrat.

IV.P.10[1]. Prin ipoteză, există $t \neq 0$ astfel ca:

$$f(x) = f(x + t), \quad (\forall)\ x \in R$$

adică:

$$\sin x + \cos \alpha x = \sin (x + t) + \cos \alpha(x + t), \quad (\forall)\ x \in R.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x = 0$ respectiv $x = -t$ găsim:

$$\sin t + \cos \alpha t = 1 \quad \text{și} \quad -\sin t + \cos \alpha t = 1$$

de unde:

$$\sin t = 0$$

adică:

$$t = k_1\pi, \quad k_1 \in Z, \quad k_1 \neq 0 \text{ și:}$$

$$\cos \alpha t = 1$$

adică:

$$\alpha t = 2k_2\pi, \quad k_2 \in Z.$$

Așadar:

$$\alpha = \frac{2k}{k_1} \in Q$$

ceea ce trebuia demonstrat.

IV.P.11. Fie $\lambda = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Rezultă:

$$\cos \alpha \sin 3x + \sin \alpha \cos 3x = 1 + \lambda^2$$

sau:

$$\sin (\alpha + 3x) = 1 + \lambda^2 > 1,$$

și deci imposibil.

IV.P.12[1]**.** Ținînd seama că:

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

în care substituind x cu $\frac{\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}$; $\frac{7\pi}{8}$ și adunînd rezultatele, membru cu membru, obținem:

$$E = 4 \cdot \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}\right) +$$

$$+ \frac{1}{8}\left(\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{5\pi}{2} + \cos \frac{7\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.13. Succesiv:

$$\sin^4 x + \cos^4 x - \cos^2 x + 1 + a \geqslant 0,$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x + 1 + a \geqslant 0,$$

$$1 - 2(1 - \cos^2 x)\cos^2 x - \cos^2 x + 1 + a \geqslant 0,$$

$$2 - 3\cos^2 x + 2\cos^4 x + a \geqslant 0.$$

Notînd $\cos^2 x = t$ obținem:

$$2t^2 - 3t + 2 + a \geqslant 0.$$

Discriminantul expresiei $2t^2 - 3t + 2 + a$ este:

$$\triangle = 9 - 8(2 + a) = -7 - 8a.$$

Dacă $\triangle \leqslant 0$ deci $-7 - 8a \leqslant 0$ atunci $a \geqslant -\frac{7}{8}$; inegalitatea este valabilă pentru orice t real deci și pentru orice x real.

IV.P.14. Dacă $\sin(x - k)$, $\sin x$, $\sin(x + k)$ ar forma o progresie aritmetică atunci, succesiv:

$$\sin(x - k) + \sin(x + k) = 2\sin x,$$

$$2\sin x \cos k = 2\sin x,$$

$$2\sin x(1 - \cos k) = 0$$

de unde $k = 2k_1\pi$ sau $x = k_1\pi$, $k_1 \in Z$. Dacă $\sin(x - k)$, $\sin x$, $\sin(k + x)$ ar forma o progresie geometrică atunci:

$$\sin(x - k)\sin(x + k) = \sin^2 x,$$

adică, succesiv:

$$2\sin(x - k) \cdot \sin(x + k) = 2\sin^2 x,$$

$$\cos 2k - \cos 2x = 1 - \cos 2x,$$

$$\cos 2k = 1,$$

$$2k = 2k_1\pi,$$

de unde $k = k_1\pi$, $k_1 \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.15. Succesiv:

$$2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant \sin^2\alpha + \sin^2\beta,$$

$$\frac{1-\cos(\alpha+\beta)}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2}\right);$$

$$1-\cos(\alpha+\beta) \leqslant 1 - \frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{\cos 2\beta}{2}$$

sau:

$$\cos(\alpha+\beta) \geqslant \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

adică:

$$\cos(\alpha+\beta)\,[1-\cos(\alpha-\beta)] \geqslant 0.$$

Cum, evident, $1-\cos(\alpha-\beta) \geqslant 0$ rămîne de arătat că și $\cos(\alpha+\beta) \geqslant 0$.

Dar, potrivit enunțului:

$$\alpha,\ \beta \in \left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$$

deci:

$$\alpha+\beta \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right],$$

astfel că și $\cos(\alpha+\beta) \geqslant 0$, cu aceasta demonstrînd și enunțul.

IV.P.16[3]**.** Prin ipoteză, există $p, q \in Q$, $*(p, q) = 1$ astfel ca să avem $\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k} = \frac{p}{q}$ adică, folosind formula:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}},$$ putem scrie, succesiv:

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{x}{2^{k-1}}}{1-\cos\frac{x}{2^{k-1}}}} = \frac{p}{q},\qquad \frac{1+\cos\frac{x}{2^{k-1}}}{1-\cos\frac{x}{2^{k-1}}} = \frac{p^2}{q^2};$$

$$\cos\frac{x}{2^{k-1}} = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} \in Q.$$

Rezultă și:

$$\sin\frac{x}{2^{k-1}} = \pm\sqrt{1-\cos^2\frac{x}{2^{k-1}}} = \pm\frac{2|pq|}{p^2+q^2} \in Q.$$

Deci:

$$\frac{\cos\dfrac{x}{2^{k-1}}}{\sin\dfrac{x}{2^{k-1}}} = \operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k-1}} \in Q.$$

În felul acesta obținem că și $\sin\frac{x}{2^{k-2}}$, $\cos\frac{x}{2^{k-2}}$, $\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k-2}}$, $\sin\frac{x}{2^{k-3}}$, $\cos\frac{x}{2^{k-3}}$, $\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k-3}}$, ..., $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ctg} x \in Q$, ceea ce demonstrează enunțul.

IV.P.17[1]. Să considerăm cazul general în care trebuie studiată ecuația:

$$\sin^n x + \cos^n x = \operatorname{tg}^n x + \operatorname{ctg}^n x,\ n \in N^*.$$

Cum $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$ avem cu atît mai mult $-1 \leqslant \sin^n x \leqslant 1$, $-1 \leqslant \cos^n x \leqslant 1$ deci $-2 \leqslant \sin^n x + \cos^n x \leqslant 2$.

Dar nu putem avea egalitate (studiem a doua parte a inegalității, pentru prima discuția fiind analoagă), căci aceasta ar presupune $\sin x = \cos x = 1$, cînd n este impar, fie $\sin x = 1$, $\cos x = 1$, fie $\sin x = -1$, $\cos x = 1$, fie $\sin x = 1$, $\cos x = -1$, fie $\sin x = -1$, $\cos x = -1$ cînd n este par, care în toate cazurile conduce la $\sin^2 x + \cos^2 x = 2$, absurd. Deci în toate cazurile:

$$-2 < \sin^n x + \cos^n x < 2.$$

Pe de altă parte, dacă în inegalitățile:

$a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, dacă $a > 0$ și:

$-2 \geqslant a + \frac{1}{a}$, dacă $a < 0$, facem:

$$a = \operatorname{tg}^n x$$

obținem:

$$-2 \geqslant \operatorname{tg}^n x + \operatorname{ctg}^n x \geqslant 2.$$

Rezultă deci că ecuația propusă nu are soluții.

Pentru $n = 7$ regăsim ecuația din enunț care se poate scrie:

$$\sin^{14} x(\cos^7 x - 1) + \cos^{14} x(\sin^7 x - 1) = 0,$$

egalitate care ar fi adevărată numai pentru $\cos x = \sin x = 1$, ceea ce este imposibil.

IV.P.18. *Soluția I.* Exprimăm laturile în funcție de R și unghiuri și ajungem la (vezi IV.11.2):

$$E = 2R\left[2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2} + \right.$$

$$\left. + 2\cos\frac{C+A}{2}\sin\frac{C-A}{2} + 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right] =$$

$$= 2R[\sin C - \sin B + \sin A - \sin C + \sin B -$$

$$- \sin A] = 0.$$

Soluția a II-a. Succesiv:

$$\sin\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{p(p-a)\ (p-c)^2}{a^2bc}} - \sqrt{\frac{p(p-a)\ (p-b)^2}{a^2bc}} =$$

$$= \frac{p-c}{a}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} - \frac{p-b}{a}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$$

astfel că:

$$\frac{a\sin\dfrac{B-C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}} = b - c$$

și celelalte prin permutări circulare astfel că, sumînd, găsim $E = 0$.

IV.P.19. Relația o scriem:

$$\sin B + \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin C + \sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$$

sau:

$$2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(C - \frac{\pi}{4}\right)$$

și de aici sau:

$$B - \frac{\pi}{4} = C - \frac{\pi}{4}$$

deci $B = C$ și triunghiul este isoscel sau:

$$B - \frac{\pi}{4} = -\left(C - \frac{\pi}{4}\right)$$

și triunghiul este dreptunghic, cu unghiul drept în A.

IV.P.20. Pentru ca E să fie reală trebuie ca:

$$\sin x + \cos 2x \geqslant 0$$

sau:

$$-2 \sin^2 x + \sin x + 1 \geqslant 0.$$

Rădăcinile ecuației:

$$-2 \sin^2 x + \sin x + 1 = 0$$

fiind $\sin x = -\frac{1}{2}$ și $\sin x = 1$ trebuie ca:

$$-\frac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant 1$$

adică, judecînd, potrivit convenției făcute, pe intervalul $[0, 2\pi]$:

$$x \in \left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.21*. Succesiv:

$$f(x) = \cos a_1 \cos x - \sin a_1 \sin x + \frac{\cos a_2 \cos x - \sin a_2 \sin x}{2} + \ldots +$$

$$+ \frac{\cos a_n \cos x - \sin a_n \sin x}{2^{n-1}} = \left(\cos a_1 + \frac{\cos a_2}{2} + \ldots + \frac{\cos a_n}{2^{n-1}}\right) \cos x - \left(\sin a_1 + \frac{\sin a_2}{2} + \frac{\sin a_3}{2^2} + \ldots + \frac{\sin a_n}{2^{n-1}}\right) \sin x = A \cos x - B \sin x$$

unde:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos a_k}{2^{k-1}}; \qquad B = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin a_k}{2^{k-1}}.$$

Prin ipoteză:

$$f(x_1) = A \cos x_1 - B \sin x_1 = 0,$$
$$f(x_2) = A \cos x_2 - B \sin x_2 = 0.$$

Egalitățile de mai sus sînt satisfăcute cînd $A = B = 0$ sau $x_1 - x_2 = m\pi$, $m \in Z$, deoarece $\operatorname{tg} x_1 = \frac{A}{B}$, $\operatorname{tg} x_2 = \frac{A}{B}$ adică $\operatorname{tg} x_1 = \operatorname{tg} x_2$ sau $x_1 - x_2 = m\pi$, $m \in Z$, așa cum arătam înainte.

Să arătăm că A și B nu pot fi simultan nule. Fie, prin absurd:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos a_k}{2^{k-1}} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin a_k}{2^{k-1}} = 0$$

adică:

$$\cos a_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\cos a_k}{2^{k-1}} = 0$$

$$\sin a_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\sin a_k}{2^{k-1}} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, înmulțind prima egalitate cu $\cos a_1$, iar a doua cu $\sin a_1$ și adunînd:

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\cos (a_1 - a_k)}{2^{k-1}} = 0.$$

Dar:

$$\left| 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\cos (a_1 - a_k)}{2^{k-1}} \right| \geqslant 1 - \sum_{k=2}^{n} \left| \frac{\cos (a_1 - a_k)}{2^{k-1}} \right| \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 0$$

adică, în definitiv, A și B nu pot fi simultan nule.

IV.P.22[1]**.** În soluția problemei IV.P.9 am arătat că:

$$\sum bc \cos A = \frac{1}{2} \sum a^2 > 0.$$

Dacă înlocuim aici:

$$a = 2R \sin A$$
$$b = 2R \sin B$$
$$c = 2R \sin C$$

obținem:

$$4R^2 \sum \sin B \sin C \cos A > 0$$

de unde:

$$\sum \sin B \sin C \cos A > 0$$

ceea ce trebuia demonstrat.

IV.P.23. Știm că (vezi IV.9.5):

$$\sin n\varphi = C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \ldots +$$
$$+ (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1} \varphi \sin^{2k+1} \varphi + \ldots$$
$$\cos n\varphi = C_n^0 \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \ldots +$$
$$+ (-1)^k C_n^{2k} \cdot \cos^{n-2k} \varphi \sin^{2k} \varphi + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece:

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$$

rezultă că numai pentru puterile pare ale lui $\cos \varphi$, $\cos n\varphi$ se poate exprima rațional în funcție de $x = \sin \varphi$. Deci $n = 2p$, $p \in N^*$.

Analog, pentru $\sin n\varphi$, care se exprimă numai pentru puterile impare ale lui $\cos \varphi$ ca o funcție rațională de $x = \sin \varphi$ deci, în acest caz, $n = 2p + 1$, $p \in N$.

Pentru ca $\operatorname{tg} n\varphi$ să se exprime rațional în funcție de $x = \sin \varphi$ ar trebui ca n să fie simultan și par și impar, absurd.

IV.P.24*. Succesiv:

a°). $f\left(\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\right) = f\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\right) = g\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)\right) = g(\sin 2x)$.

b°). Putem scrie $\sin x = \operatorname{tg} \varphi$ și atunci:

$$f(\sin x) = f(\operatorname{tg} \varphi) = g(\cos 2\varphi) = g\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}\right) =$$

$$= g\left(\frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x}\right) = g\left(\frac{\cos^2 x}{2 \sin^2 x + \cos^2 x}\right) =$$

$$= g\left(\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x + 1}\right).$$

c°). Acum putem pune $\cos x = \operatorname{tg} \varphi$ deci:

$$f(\cos x) = f(\operatorname{tg} \varphi) = g(\cos 2\varphi) = g\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}\right) =$$

$$= g\left(\frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x}\right) = g\left(\frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}\right) =$$

$$= g\left(\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

d°). Fie $\sec x = \operatorname{tg} \varphi$. Atunci:

$$f(\sec x) = f(\operatorname{tg} \varphi) = g(\cos 2\varphi) = g\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}\right) =$$

$$= g\left(\frac{1 - \sec^2 x}{1 + \sec^2 x}\right) = g\left(\frac{1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}}{1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}}\right) = g\left(\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x + 1}\right).$$

e°). $f(\operatorname{ctg} x) = f\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = g\left(\cos\left(\pi - 2x\right)\right) =$

$= g\left(-\cos 2x\right)$.

f°). Punem $\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \operatorname{tg} \varphi$ și atunci:

$$f\left(\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}\right) = f(\operatorname{tg} \varphi) = g(\cos 2\varphi) =$$

$$= g\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}\right) = g\left(\frac{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}\right) =$$

$$= g\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + x\right)\right) = g(\operatorname{tg} x).$$

IV.P.25[1]. Aplicînd tangenta în ambii membri, obținem:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right) : \left(1 - \frac{2}{xy}\right) = \frac{6}{x + y}$$

sau, după efectuarea calculelor:

$$y^2 - 3xy + 2x^2 + 12 = 0$$

ce trebuie rezolvată în numere întregi. Deducem:

$$y = \frac{3x \pm \sqrt{x^2 - 48}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie ca:

$$x^2 - 48 = m^2$$

unde m este un număr întreg și pozitiv, sau, altfel scris:

$$(x - m)\ (x + m) = 48$$

de unde sistemele:

$$1°).\ \begin{cases} x + m = 24 \\ x - m = 2 \end{cases} \qquad 2°).\ \begin{cases} x + m = 12 \\ x - m = 4 \end{cases}$$

$$3°).\ \begin{cases} x + m = 8 \\ x - m = 6 \end{cases}$$

cu soluțiile:

1°). $x = 13$ $(m = 11)$, $y_{1,2} = \dfrac{39 \pm 11}{2}$, $y_1 = 14$, $y_2 = 25$.

2°). $x = 8$ $(m = 4)$, $y_{1,2} = \dfrac{24 \pm 4}{2}$, $y_1 = 14$, $y_2 = 10$.

3°). $x = 7$ $(m = 1)$, $y_{1,2} = \dfrac{21 \pm 1}{2}$, $y_1 = 11$, $y_2 = 10$.

IV.P.26[1]. Trebuie dovedit că:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}\right)$$

sau, notînd $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = x$ și $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = y$, x și y fiind numere pozitive, rezultă succesiv:

$$\frac{x + y}{1 - xy} \leqslant \frac{x}{1 - x^2} + \frac{y}{1 - y^2}, \qquad (1)$$

$$(x+y)\ (1-x^2)\ (1-y^2) \leqslant (1-xy)\ [x(1-y^2) + y(1-x^2)],$$

$$(x + y)\ (1 - x^2)\ (1 - y^2) \leqslant (1 - xy)^2 (x + y).$$

Scanned with OKEN Scanner

Avînd în vedere că dacă $\alpha = \beta = 0$, deci $x = y = 0$, are loc egalitate putem împărți cu $x + y \neq 0$:

$$(1 - x^2)(1 - y^2) \leqslant (1 - xy)^2.$$

Deoarece $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}$ rezultă $0 \leqslant$

$\leqslant \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4}$, $0 \leqslant \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{4}$ deci $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < 1$

deci am putut elimina numitorii în inegalitatea (1). Dar:

$(x - y)^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geqslant 2xy \Rightarrow -x^2 - y^2 \leqslant -2xy.$

Adunînd ambilor membri cantitatea $1 + x^2y^2$ obținem:

$$1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 \leqslant 1 + x^2y^2 - 2xy$$

sau, grupînd:

$$(1 - x^2)\ (1 - y^2) \leqslant (1 - xy)^2$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

IV.P.27. Pentru a demonstra relația din enunț trebuie să stabilim relația dintre funcțiile unghiurilor α, β, φ și deci vom elimina pe $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ în identitatea:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

condiționată de $A + B + C = \pi$ și deci:

$$\cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha =$$
$$= 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

sau, prin împărțirea egalității la $\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma$:

$$\operatorname{tg}^2 \beta \sec^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \gamma \sec^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \sec^2 \beta =$$
$$= \sec^2 \alpha \sec^2 \beta \sec^2 \gamma - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \varphi$$

sau:

$$\operatorname{tg}^2 \beta(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma) + \operatorname{tg}^2 \gamma(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \operatorname{tg}^2 \alpha(1 + \operatorname{tg}^2 \beta) =$$
$$= (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)\ (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)\ (1 + \operatorname{tg}^2 \gamma) - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$$

de unde:

$$(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma) + (\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \gamma +$$
$$+ \operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha) = 1 + (\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma) +$$
$$+ (\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha) +$$
$$+ \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \gamma - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \varphi$$

Scanned with OKEN Scanner

sau:

$$\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + 1 = 0$$

deci:

$$(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma - 1)^2 = 0$$

și prin urmare:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = 1.$$

IV.P.28. Împărțind cu $\sqrt{3}$, inegalitatea devine, în condiția $\operatorname{tg} x \neq 0$:

$$\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} x} - \operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3} - 1.$$

Fie:

$$f(x) = (1 - \operatorname{tg} x) + \sqrt{3}\,\frac{1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} =$$

$$= (1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sqrt{3}\operatorname{ctg} x)$$

și să studiem semnul funcției f definită de legea anterioară pe intervalul $[0, 2\pi]$, avînd în vedere că funcția este periodică, de perioadă π. Avînd în vedere că $f(x) = 0$ în intervalul considerat pentru $x' = \frac{\pi}{4}$, $x'' = \frac{5\pi}{4}$ și $x''' = \frac{2\pi}{3}$, $x^{IV} = \frac{5\pi}{3}$ și că f ia valoare infinită în $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \pi$, $x_4 = 2\pi$, $x_5 = \frac{3\pi}{2}$, obținem tabelul de variație (pe intervalul $[0, \pi]$):

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f(x)$	$\|$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$\|$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$\|$

În intervalul $(0, \pi)$, f este pozitivă numai în intervalele $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ și $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Inegalitatea se mai poate scrie și sub forma:

$$\frac{(1 - \operatorname{tg} x)(\sqrt{3} + \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \geqslant 0.$$

IV.P.29. Se folosește formula care transformă suma de cosinusuri în produs și se obține:

$$\frac{\cos 5a(2 \cos 4a + 1)}{\sin 5a(2 \cos 4a + 1)} = \operatorname{ctg} 5a.$$

IV.P.30. Ecuația se scrie succesiv:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + \frac{1}{2} = 0,$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x + \sin 2x + \frac{1}{2} = 0,$$

$$1 - \frac{\sin^2 2x}{2} + \sin 2x + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\frac{3}{2} - \frac{\sin^2 2x}{2} + \frac{2 \sin 2x}{2} = 0,$$

$$(\sin 2x - 3)(\sin 2x + 1) = 0$$

deci $\sin 2x = 3$, inacceptabil, și $\sin 2x = -1$ care dă $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

IV.P.31. Avem de-a face cu un caz particular al problemei IV.P.6.

IV.P.32. $A + B = 150°$ implică imediat $\cos(A + B) = \cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ deci $-\cos(A + B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Trebuie demonstrat deci:

$$\cos(A - B) > -\cos(A + B)$$

Scanned with OKEN Scanner

adică, succesiv:

$$\cos(A-B)+\cos(A+B)>0,$$

$$2\cos\frac{A-B+A+B}{2}\cos\frac{A-B-A-B}{2}>0,$$

$$\cos A\cos(-B)>0,$$

$$\cos A\cos B>0,$$

evident, căci $A,\ B\in(0,\ 90^\circ)$.

IV.P.33*. Se știe că:

$$x>\sin x>x-\frac{x^3}{6} \tag{1}$$

(vezi IV.R.11) pentru $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Cum $10>\pi^2$ și $n\geqslant 3$:

$$\frac{3}{4}>\frac{\pi^2}{6n}$$

și pentru $n\geqslant 3$:

$$\frac{n}{n+1}\geqslant\frac{3}{4}$$

deci succesiv:

$$\frac{n}{n+1}\geqslant\frac{\pi^2}{6n}>\frac{\pi^2}{6n^2},$$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}>\frac{\pi^2}{6n^3},$$

$$\frac{\pi}{n}-\frac{\pi^3}{6n^3}>\frac{\pi}{n+1}. \tag{2}$$

Dacă punem în (1) $x=\frac{\pi}{n}$ obținem:

$$\frac{\pi}{n}>\sin\frac{\pi}{n}>\frac{\pi}{n}-\frac{\pi^3}{6n^3}, \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar din inegalitățile (2) și (3) deducem:

$$\frac{\pi}{n} > \sin\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n+1}$$

adică:

$$n + 1 > \pi \operatorname{cosec}\frac{\pi}{n} > n$$

de unde:

$$\left[\pi \operatorname{cosec}\frac{\pi}{n}\right]_* = n$$

și:

$$(n+1)^2 > n(n+1) \geqslant n\pi \operatorname{cosec}\frac{\pi}{n} \geqslant n^2$$

adică, după extragerea radicalului:

$$n + 1 > \sqrt{n\pi \operatorname{cosec}\frac{\pi}{n}} \geqslant n$$

adică, în fond:

$$\left[\sqrt{n\pi \operatorname{cosec}\frac{n}{\pi}}\right]_* = n.$$

IV.P.34. Cu relația:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(vezi IV.II.2.1°)) egalitatea devine:

$$\sum \frac{\sin A \sin B}{\sin (C-A)\sin (C-B)} = \frac{\sin A \sin B}{\sin (C-A)\sin (C-B)} +$$

$$+ \frac{\sin C}{\sin (B-A)} \cdot \frac{\sin A \sin (A-C) - \sin B \sin (B-C)}{\sin (B-C)\sin (A-C)} =$$

$$= \frac{\sin A \sin B}{\sin (C-A)\sin (C-B)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin C}{\sin (B-A)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\cos (2A-C) - \cos C + \cos C - \cos (2B-C)}{\sin (B-C)\sin (A-C)} =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \frac{\sin A \sin B}{\sin (C-A) \sin (C-B)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin C}{\sin (B-A)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\cos (2A-C) - \cos (2B-C)}{\sin (B-C) \sin (A-C)} = \frac{\sin A \sin B}{\sin (C-A) \sin (C-B)} -$$

$$+ \frac{\sin C}{\sin (B-A)} \cdot \frac{\sin (A+B-C) \sin (A-B)}{\sin (B-C) \sin (A-C)} =$$

$$= \frac{\sin A \sin B - \sin C \sin (A+B-C)}{\sin (C-A) \sin (C-B)} = \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \frac{-\cos(A+B)+\cos(A-B)+\cos(A+B)-\cos(A+B-2C)}{\sin (C-A) \sin (C-B)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos (A-B) - \cos (A+B-2C)}{\sin (C-A) \sin (C-B)} =$$

$$= \frac{\sin (C-A) \sin (C-B)}{\sin (C-A) \sin (C-B)} = 1.$$

IV.P.35[1]. Dacă în identitatea:

$$\operatorname{tg} 2^{k+1}x - \operatorname{tg} 2^k x = \frac{\sec 2^{k+1}x}{\operatorname{ctg} 2^k x},$$

$$x \neq \frac{\pi}{2^{t_1}} (2t_2 + 1),\ t_1 \in N,\ t_2 \in Z$$

facem $k = 0, \ldots, n-1$ și adunăm, obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sec 2^k x}{\operatorname{ctg} 2^{k-1} x} = \operatorname{tg} 2^n x - \operatorname{tg} x.$$

IV.P.36[2]. Considerăm ecuația:

$$\cos 7x + \cos 6x = 0$$

adică:

$$2 \cos \frac{13x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$$

care are soluțiile:

$$x = \frac{\pi}{13} + \frac{2k\pi}{13},\ k \in Z,$$

și:

$$x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Cum însă:

$$\cos 7x = 64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x,$$

$$\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$$

adunînd, găsim ecuația echivalentă:

$$64\cos^7 x + 32\cos^6 x - 112\cos^5 x - 48\cos^4 x + 56\cos^3 x + 18\cos^2 x - 7\cos x - 1 = 0.$$

ecuație care deci dă soluțiile (pentru ecuația obținută, notînd $\cos x = y$):

$$y = \cos\frac{(2k-1)\pi}{13}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Împărțind prin $y + 1$ obținem o ecuație de gradul 6 care admite aceleași rădăcini, cu excepția rădăcinii $y = -1$. Aplicînd relațiile dintre rădăcini și coeficienți, găsim egalitatea dată. Expresia propusă are valoarea $-\frac{1}{64}$.

IV.P.37². Tratăm cazul general, extinzînd condiția la n numere $a_1, \ldots, a_n$:

$$\frac{a_1}{\sin\varphi} = \frac{a_2}{\sin 2\varphi} = \ldots = \frac{a_n}{\sin n\varphi}.$$

Evident:

$$\sin(k-1)\varphi \sin(k+1)\varphi = \frac{1}{2}[-\cos 2k\varphi + \cos 2\varphi] =$$

$$= \frac{1}{2}[1 - \cos 2k\varphi - (1 - \cos 2\varphi)] = \sin^2 k\varphi - \sin^2\varphi$$

deci:

$$\sin(k-1)\varphi \sin(k+1)\varphi + \sin^2\varphi = \sin^2 k\varphi.$$

Făcînd $k = 2, 3, \ldots, n-1$ și adunînd relațiile astfel obținute, găsim:

$$\sin\varphi \sin 3\varphi + \sin 2\varphi \sin 4\varphi + \ldots + \sin(n-2)\varphi \sin n\varphi + (n-2)\sin^2\varphi = \sin^2 2\varphi + \sin^2 3\varphi + \ldots + \sin^2(n-1)\varphi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de proprietățile proporțiilor:

$$\frac{\sin^2\varphi}{a_1^2} = \frac{\sin^2 2\varphi}{a_2^2} = \ldots = \frac{\sin^2 n\varphi}{a_n^2} = \frac{(n-2)\sin^2\varphi}{(n-2)\,a_1^2} =$$

$$= \frac{\sin\varphi\sin 3\varphi}{a_1\,a_3} = \frac{\sin 2\varphi\sin 4\varphi}{a_2\,a_4} = \ldots = \frac{\sin(n-2)\,\varphi\sin n\varphi}{a_{n-2}\,a_n} =$$

$$= \frac{(n-2)\sin^2\varphi + \sin\varphi\sin 3\varphi + \ldots + \sin(n-2)\varphi\sin n\varphi}{(n-2)a_1^2 + a_1a_3 + a_2a_4 + \ldots + a_{n-2}\,a_n} =$$

$$= \frac{\sin^2 2\varphi + \sin^2 3\varphi + \ldots + \sin^2(n-1)\varphi}{a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{n-1}^2}.$$

Avînd în vedere relația precedentă, găsim:

$$(n-2)a_1^2 + a_1a_3 + a_2a_4 + \ldots + a_{n-2}a_n = a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{n-1}^2,$$

adică relația cerută.

Pentru $n = 7$ obținem cazul particular al problemei.

IV.P.38*. Ecuația:

$$x^{2n} = 1$$

admite soluțiile:

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n},\ k = 1, \ldots, 2n. \qquad (1)$$

Fie:

$$\bar{x}_k = \cos\frac{k\pi}{n} - \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n},\ k = 1, \ldots, 2n \qquad (2)$$

astfel că x_k și $\bar{x}_k$, $k = 1, \ldots, n-1$, împreună cu $x' = 1$ și $x'' = -1$, sînt rădăcinile ecuației:

$$x^{2n} - 1 = 0.$$

Dar:

$$(x - x_k)\ (x - \bar{x}_k) = x^2 - (x_k + \bar{x}_k)x + x_k\bar{x}_k =$$

$$= x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1$$

și astfel:

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$$

pe care, simplificînd-o prin $x^2 - 1$ o putem scrie:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right) = 1 + x^2 + \ldots + x^{2n-2}. \quad (3)$$

Dacă facem aici $x = 1$ obținem:

$$x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 = 2\left(1 - \cos \frac{k\pi}{n}\right) = 2^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}$$

deci:

$$2^{2n-2} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2 \frac{\pi k}{2n} = 1 + (n - 1) = n$$

deci rezultă a°).

Dacă în (3) punem $x = -1$, analog, obținem relația b°).

Înmulțind relația de la punctul a°) cu cea de la punctul b°) obținem relația de la punctul c°).

IV.P.39. a°). Succesiv:

$$2E = \sin (8x - 40°) + \sin 20° + \sin (22x + 100°) -$$
$$- \sin 20° = \sin (8x - 40°) + \sin (22x - 260°) =$$
$$= 2 \sin (15x - 150°) \cos (-7x + 110°) =$$
$$= 2 \sin (15x - 150°) \sin (7x - 20°)$$

de unde, împărțind la 2:

$$E = \sin (15x - 150°) \sin (7x - 20°).$$

b°). Pentru $12° \leqslant x \leqslant 20°$:

$$30° \leqslant 15x - 150° \leqslant 150°,$$
$$60° \leqslant 7x - 20° \leqslant 120°$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$\sin (15x - 150°) \geqslant \frac{1}{2},$$

$$\sin (7x - 20°) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

și înmulțind:

$$E \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

c°). Pentru $x = 20°$:

$$E = \sin 150° \sin 120° = \sin 30° \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

IV.P.40. Fie:

$$E = |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}|.$$

Această expresie este reală deoarece $-1 \leqslant \sin 2x \leqslant 1$. Dar:

$$E = |\sqrt{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x} -$$

$$- \sqrt{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}| =$$

$$= ||\cos x + \sin x| - |\cos x - \sin x||.$$

Valorile lui E depind de semnele expresiilor $\cos x + \sin x$ și $\cos x - \sin x$ ceea ce impune fracționarea intervalului $[0, 2\pi]$ prin punctele:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

a°). În intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$:

$$E = |\cos x + \sin x + \sin x - \cos x| = 2 \sin x$$

așa că relațiile din enunț devin:

$$2 \cos x \leqslant 2 \sin x \leqslant \sqrt{2}.$$

Se observă că prima inegalitate este posibilă doar pentru $x = \frac{\pi}{4}$, iar a doua este satisfăcută de orice x din intervalul considerat.

b°). În intervalul $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ obținem:

$$E = |\cos x + \sin x - \sin x + \cos x| = 2|\cos x|$$

astfel că relațiile din enunț devin:

$$2\cos x \leqslant 2|\cos x| \leqslant \sqrt{2}$$

care sînt verificate. Relația din stînga este satisfăcută cu semnul egal în intervalul $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ și cu semnul $<$ în intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

c°). În intervalul $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ obținem:

$$E = |-\sin x - \cos x - \sin x + \cos x| = 2|\sin x|$$

astfel că relațiile din enunț devin:

$$2\cos x \leqslant 2|\sin x| \leqslant \sqrt{2}$$

care sînt satisfăcute cu semnul $<$.

d°). În intervalul $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ se obține:

$$E = |-\sin x - \cos x - \cos x + \sin x| = 2|\cos x|$$

astfel că relațiile din enunț devin:

$$2\cos x \leqslant 2|\cos x| \leqslant \sqrt{2}$$

care sînt verificate, cea din stînga cu semnul $<$ în intervalul $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$ și cu semnul egal în intervalul $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

e°). În intervalul $\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ se obține:

$$E = |\sin x + \cos x - \cos x + \sin x| = 2|\sin x|$$

astfel că relațiile din enunț se scriu:

$$2\cos x \leqslant -2\sin x \leqslant \sqrt{2}$$

care nu sînt verificate.

IV.P.41. Succesiv:

$$E = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7},$$

$$2E\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} +$$

$$+ 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7} +$$

$$+ \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}$$

deci $E = \frac{1}{2}$.

IV.P.42. Evident:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} =$$

$$= 1 + \cos x \cos 3x$$

astfel că ecuația devine:

$$2\cos x \cos 2x \cos 3x = 0$$

care se descompune în:

a°). $\cos x = 0$, cu soluțiile $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$,

b°). $\cos 2x = 0$, cu soluțiile $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $k \in Z$,

c°). $\cos 3x = 0$, cu soluțiile $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$, $k \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

Însă soluțiile a°) sînt conținute în soluțiile c°) pentru $k = 3k' + 1$ deci soluțiile distincte sînt:

$$x_1 = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \quad k \in Z.$$

IV.P.43*. a°). Din identitatea dată rezultă că polinomul:

$$x^3 + ax^2 + bx + a$$

are rădăcinile $x_1 = \operatorname{tg} A$, $x_2 = \operatorname{tg} B$, $x_3 = \operatorname{tg} C$ și deci au loc relațiile:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = -a, \\ &\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A = b, \\ &\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = -a. \end{aligned} \tag{1}$$

Dar:

$$S = \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 A}{1 + \operatorname{tg}^2 A} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 B}{1 + \operatorname{tg}^2 B} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 C}{1 + \operatorname{tg}^2 C}.$$

Să formăm ecuația care are ca rădăcini pe $\operatorname{tg}^2 A$, $\operatorname{tg}^2 B$, $\operatorname{tg}^2 C$.

Din prima relație (1):

$$\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C = a^2 - 2b.$$

Ridicînd la pătrat a doua relație și ținînd seama de celelalte două obținem:

$$\operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C + \operatorname{tg}^2 C \operatorname{tg}^2 A = b^2 - 2a^2$$

și:

$$\operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B \operatorname{tg}^2 C = a^2$$

astfel că ecuația căutată este:

$$y^3 - (a^2 - 2b)y^2 + (b^2 - 2a^2)y - a^2 = 0. \tag{2}$$

Să formăm ecuația în z care are ca rădăcini $\cos 2A$, $\cos 2B$, $\cos 2C$.

Scanned with OKEN Scanner

Știm că rădăcina z satisface relația:

$$z = \frac{1 - y}{1 + y}, \tag{3}$$

y fiind rădăcina ecuației (2). Eliminînd pe y între (2) și (3) obținem ecuația în z:

$$(b-1)^2z^3 + (b^2 + 2b - 3)z^2 - (b^2 - 2b - 3 - 4a^2)z + 4a^2 - (b+1)^2 = 0 \tag{4}$$

și suma rădăcinilor acestei ecuații este tocmai:

$$S = -\frac{b^2 + 2b - 3}{(b-1)^2} = -\frac{b+3}{b-1} \quad (b \neq 1)$$

care nu depinde de a.

b°). Dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi ascuțitunghic atunci tangentele lor sînt numere pozitive și deci suma lor este pozitivă adică $-a > 0$ deci $a < 0$.

Suma:

$$S = \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$$

are și forma:

$$S = 2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) - 3$$

care, am văzut, este egală cu:

$$-\frac{b+1}{b-1}$$

și ținînd seama de relația:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

găsim că:

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{2(b-1)}.$$

Produsul din stînga este pozitiv, așa că trebuie ca $b > 1$.

Pe de altă parte, cum $\operatorname{tg} A, \operatorname{tg} B, \operatorname{tg} C > 0$:

$$\frac{1}{3}(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) \geqslant (\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C)^{\frac{1}{3}}$$

adică:

$$-\frac{a}{3} \geqslant \sqrt[3]{-a}$$

$(-a > 0)$ deci $a^3 \leqslant 27a$ și cum $a < 0$, rezultă $a^2 \geqslant 27$ adică $(a - 3\sqrt{3})(a + 3\sqrt{3}) \geqslant 0$ deci $a \leqslant -3\sqrt{3}$.

IV.P.44*. Avem în vedere că:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x + 60°) + \operatorname{tg}(x + 120°) = -3 \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x + 60°) \operatorname{tg}(x + 120°) = 3 \operatorname{tg} 3x, \quad (\forall)\ x \in R -$$

$$-\left(\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}_{k\in Z} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}_{k\in Z} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}_{k\in Z}\right).$$

Pentru $x = 10°$ se obține relația din enunț.

IV.P.45. Notînd $a = \sqrt[5]{1 + i\sqrt{3}}$ și $b = \sqrt[5]{1 - i\sqrt{3}}$, $a + b = x$, avînd în vedere că:

$$(a + b)^5 = a^5 + b^5 + 5ab(a^3 + b^3) + 10a^2b^2(a + b) \quad (1)$$

și:

$$a^5 + b^5 = 2,$$

$$ab = \sqrt[5]{1 + 3} = \sqrt[5]{2^2},$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = x^3 - 3\sqrt[5]{2^2}\, x,$$

$$a^2b^2 = \sqrt[5]{2^4}$$

obținem:

$$x^5 = 2 + 5\sqrt[5]{2^2}(x^3 - 3\sqrt[5]{2^2}\, x) + 10\sqrt[5]{2^4}\, x$$

iar pentru $x = \sqrt[5]{2}$:

$$2 = 2 + 5\sqrt[5]{2^5} - 15\sqrt[5]{2^5} + 10\sqrt[5]{2^5}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Altfel:

$$\frac{E}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[5]{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \sqrt[5]{\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ} + \sqrt[5]{\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ} =$$

$$= 2 \cos \frac{360^\circ \cdot k + 60^\circ}{5}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Pentru $k = 4$ se obține valoarea cerută.

IV.P.46. a°). Avem:

$$\sin^2 a - \sin^2 b = (\sin a + \sin b)\ (\sin a - \sin b) =$$

$$= 4 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} =$$

$$= \sin (a+b) \sin (a-b).$$

Deci:

$$\sin^2 \left(\frac{3\pi}{8} - x\right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

astfel că:

$$f(x) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + x\right),$$

Domeniul maxim de definiție al funcției este

$$R - \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}_{k \in Z}.$$

Ca atare, $A = \sqrt{2}$ și $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

b°). Succesiv, ținînd seama de a°), putem scrie:

$$\frac{f(x)}{f(-x)} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg} 2x + \sec 2x$$

deci $m = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

c°). Ecuația ia și forma:

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sqrt{2}(2+\sqrt{3})\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$$

sau:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+(2+\sqrt{3})\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0;$$

$$\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=-2-\sqrt{3},$$

de unde $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$ și deci $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$, $k\in Z$.

Verificarea este imediată.

Observație. De la început trebuie văzut ca $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ și $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ să fie de semne contrare. Cum pentru:

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+x<2k\pi+\pi \text{ sau } 2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+$$

$$+x<2k\pi+2\pi$$

este îndeplinită condiția, rezultă că este necesar:

$$\text{sau } x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right),\ k\in Z$$

$$\text{sau } x\in\left(2k\pi+\frac{5\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right)k\in Z.$$

IV.P.47*. În soluția problemei IV.P.2 s-a arătat că ecuația:

$$2^{n-1}x^n-(C_n^2+2C_n^4+\ldots)x^{n-2}+\ldots=0$$

admite soluțiile:

$$x_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd relațiile între rădăcini și coeficienți obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} = 0.$$

IV.P.48. Inegalitatea se mai poate scrie:

$$1 - 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geqslant 0,$$

$$1 - 4 \sin \frac{A}{2} \left[\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right] \geqslant 0,$$

și cum $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$, rezultă:

$$1 - 4 \sin \frac{A}{2} \left[\cos \frac{B-C}{2} - \sin \frac{A}{2} \right] \geqslant 0.$$

Trinomul:

$$T(x) = 4x^2 - 4x \cos \frac{B-C}{2} + 1.$$

este pozitiv pentru orice $x \in R$ și orice B, C arce reale deoarece discriminantul este $\Delta_T = 16 \cos^2 \frac{B-C}{2} - 16 = -16 \sin^2 \frac{B-C}{2} \leqslant 0$.

Punînd $x = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ obținem inegalitatea de demonstrat (punînd și condiția $A + B + C = \pi$).

Egalitatea are loc pentru $A = B = C$.

IV.P.49*. Rădăcinile ecuației:

$$x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + 1 = \frac{x^{2k+1} - 1}{x - 1} = 0$$

sînt:

$$x_t = \cos \frac{2t\pi}{2k+1} + i \sin \frac{2t\pi}{2k+1}, \quad t = \overline{1,\ 2k}.$$

Dar cum:

$$(x-x_t)\,(x-x_{2k+1-t}) = x^2+1-2x\cos\frac{2t\pi}{2k+1},\quad t=\overline{1,\ 2k}$$

cu notația $x^2+1=y$ obținem:

$$x^{2k}+x^{2k-1}+\ldots+x+1=$$

$$=\left(y-2x\cos\frac{2\pi}{2k+1}\right)\left(y-2x\cos\frac{4\pi}{2k+1}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(y-2x\cos\frac{2k\pi}{2k+1}\right).$$

Dezvoltînd și egalînd coeficienții lui x^{2k-1} ajungem la relația:

$$\cos\frac{\pi}{2k+1}+\cos\frac{2\pi}{2k+1}+\ldots+$$

$$+\cos\frac{k\pi}{2k+1}=-\frac{1}{2}.$$

IV.P.50. 1°). Din:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right)=$$

$$=\frac{1-\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}+\operatorname{tg}\frac{z}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}+\operatorname{tg}\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}}$$

rezultă:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right)=0$$

și deci:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2};$$

$$x+y+z=(2k+1)\pi,\quad k\in Z.$$

Scanned with OKEN Scanner

2°). Se știe că:

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right)=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}-$$

$$-\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}-\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}\cos\frac{x}{2}-$$

$$-\sin\frac{z}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}$$

$$\left[1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}-\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{z}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right].$$

În cazul de față:

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}\right)=0$$

și deci:

$$x+y+z=(2k+1)\pi,\quad k\in Z.$$

IV.P.51. Dacă ecuația se aduce la forma: $64\sin^8 x-96\sin^6 x+36\sin^4 x+4\sin^3 x-3\sin x-$ $-3\sin x-5=0$, este greu de rezolvat.

Dacă notăm $y=(\cos 4x-\cos 2x)^2$ și stabilim mulțimea valorilor lui y constatăm că $y\in[0,4]$.

În același timp expresia $\sin 3x+5$ are valori cuprinse în intervalul $[4,6]$. Ca atare, egalitatea din enunț conduce la ecuațiile:

$$(\cos 4x-\cos 2x)^2=4;\quad \sin 3x+5=4 \text{ etc.}$$

IV.P.52*. Notăm:

$$x=\operatorname{tg}\frac{A}{2},\quad y=\operatorname{tg}\frac{B}{2},\quad z=\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

și avînd în vedere rezultatele obținute în IV.P.50, putem considera că A, B, C sînt unghiurile unui triunghi; inegalitatea devine:

$$\sum\sin 2A\leqslant\sum\sin A.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

(vezi IV.P.48). Prin înmulțirea acesteia cu:

$$32\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

obținem:

$$4\sin A\sin B\sin C\leqslant 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Dar, în orice triunghi (vezi V.2.6.9.13°)):

$$4\sin A\sin B\sin C=\sum\sin 2A$$ și:

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\sum\sin A$$

(vezi V.2.6.9.9°)) și astfel inegalitatea este demonstrată.

IV.P.53*. Din:

$$\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}y}=3,$$

rezultă, succesiv:

$$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}=\frac{3+1}{3-1}=2,$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=2.$$

Deoarece $-\frac{\pi}{2}\leqslant x-y\leqslant\frac{\pi}{2}$ și pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ funcția f definită de $f(x)=\sin x$ este crescătoare rezultă că maximul funcției $z=x-y$ se va realiza odată cu maximul lui $\sin(x-y)$. Rezultă din egalitatea de mai sus că $\sin(x-y)$ este

Scanned with OKEN Scanner

maxim cînd $\sin(x+y)=1$ adică pentru $x+y=\frac{\pi}{2}$ astfel că $\sin(x-y)=\frac{1}{2}$ deci $x-y=\frac{\pi}{6}$ de unde $x=\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{6}$.

IV.P.54. Dacă în identitatea:

$$2\cos y \sin x = \sin(x+y)+\sin(x-y)$$

facem $x=10°$ și $y=20°$, deducem:

$$2\cos 20° \sin 10° = \sin 30° - \sin 10°$$

de unde:

$$\frac{1}{2\sin 10°} = 1+2\cos 20° = 1+2\sin 70°.$$

Astfel, expresia dată se scrie:

$$\frac{1}{2\sin 10°} - 2\sin 70° = \frac{\operatorname{cosec} 10°}{2} - 2\sin 70° = 1 +$$

$$+2\cos 20° - 2\cos 20° = 1.$$

IV.P.55. Fie:

$$E = a^2+b^2-2ab\cos(C+60°) = a^2+b^2 -$$

$$-2ab[\cos C\cos 60° - \sin C\sin 60°] = a^2+b^2 -$$

$$-ab\cos C + \sqrt{3}ab\sin C,$$

$$2E = 2a^2+2b^2-2ab\cos C+2\sqrt{3}ab\sin C = 2a^2 +$$

$$+2b^2-(a^2+b^2-c^2)+2\sqrt{3}\,2R\sin A\cdot 2R\sin B\sin C =$$

$$= a^2+b^2+c^2+8\sqrt{3}R^2\sin A\sin B\sin C.$$

Prin permutări circulare se obțin celelalte părți ale egalităților cerute.

Scanned with OKEN Scanner

S-au folosit relațiile:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ și analoagele.

IV.P.56*. Presupunem adevărată inegalitatea dată și o transformăm după cum urmează:

$$2\cos(x+y) + 2\sin x + 2\sin y - 3 \leqslant 0,$$

$$3 - 2\cos(x+y) - 2\sin x - 2\sin y \geqslant 0,$$

$$1 + 2[1 - \cos(x+y)] - 2(\sin x + \sin y) \geqslant 0,$$

$$1 + 2 \cdot 2\sin^2\frac{x+y}{2} - 4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \geqslant 0,$$

$$1 + 4\sin^2\frac{x+y}{2} - 4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \geqslant 0,$$

$$\left(2\sin\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\right)^2 - \cos^2\frac{x-y}{2} +$$

$$+ \cos^2\frac{x-y}{2} + \sin^2\frac{x-y}{2} \geqslant 0,$$

$$\left(2\sin\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{x-y}{2} \geqslant 0$$

ceea ce este evident.

Observație. Încă: $E = 3 - 2\cos(x+y) - 2\sin x -$

$$- 2\sin y = 3 - 2\left(1 - 2\sin^2\frac{x+y}{2}\right) -$$

$$- 4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 4\sin^2\frac{x+y}{2} -$$

$$- 4\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} + 1$$

și cu notația $\sin\frac{x+y}{2} = t$, $t \in [0, 1]$,

se obține:

$$E = 4t^2 - 4\left(\cos\frac{x-y}{2}\right)t + 1,$$

trinom al cărui discriminant este:

$$\Delta = -16\sin^2\frac{x-y}{2} \leqslant 0,$$

deci oricare ar fi $t \in [-1, 1]$, $E \geqslant 0$.

IV.P.57. Pentru a demonstra egalitatea se folosește identitatea:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

IV.P.58[3]**.** Notînd cu E primul membru, putem scrie succesiv:

$$E = \frac{1}{4}\left(-2\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\right)\left(-2\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{16}.$$

Observație. Fie $A = 16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}\sin\frac{11\pi}{42}$.

Expresia A se mai poate scrie:

$$A = 4\left(2\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}\right)\left(2\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\right) =$$

$$= 4\left(\cos\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 2\left(2\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{3} = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

IV.P.59². Dacă notăm:

$$u = a + 2b - 3c, \quad v = c + 2a - 3b, \quad t = b + 2c - 3a$$

se obține:

$$u + y + t = 0$$

și în acest caz:

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} t = \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v \cdot \operatorname{tg} t,$$

care arată că:

$$E = \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v \cdot \operatorname{tg} t.$$

IV.P.60¹. Ecuația nu admite soluția $x = 0$. În consecință putem scrie:

$$\sin(xy) = -\frac{x^2 + 1}{2x}$$

și deci, pentru a avea soluții trebuie ca:

$$-1 \leqslant -\frac{x^2 + 1}{2x} \leqslant 1. \qquad (c)$$

De aici:

a°). $-1 \leqslant -\dfrac{x^2 + 1}{2x}$ adică $\dfrac{x^2 + 1}{2x} \leqslant 1$ sau încă

$\dfrac{(x-1)^2}{2x} \leqslant 0$, valabilă pentru $x < 0$ și $x = 1$.

b°). $-\dfrac{x^2 + 1}{2x} \leqslant 1$ sau $-1 \leqslant \dfrac{x^2 + 1}{2x}$ sau

$$\frac{(x+1)^2}{2x} \geqslant 0,$$

valabilă pentru $x > 0$ și $x = -1$.

Ca atare, condiția (c) este satisfăcută pentru $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

De aici se ajunge la ecuațiile $\sin y = -1$, $\sin(-y) = 1$, corespunzătoare rădăcinilor x_1 și x_2, deci la una și aceeași ecuație și deci:

$$y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Scanned with OKEN Scanner

GEOMETRIE SINTETICĂ

V.1.0. Transformări geometrice.

V.1.1. *Translația.* Transformările geometrice joacă un rol important în geometrie, ele au drept scop simplificarea unor raționamente, stabilirea unor noi metode de investigație și cercetare ale unor fapte clasice. Unele dintre demonstrațiile date problemelor propuse se vor baza pe ele.

Ideea de bază este aceea a *corespondenței punctuale* dintre figuri.

Translația este o transformare determinată de un vector $\vec{v}$ din plan. Dat fiind un punct M, ducem prin M un segment care are lungimea, direcția mărimea și sensul vectorului $\vec{v}$; celălalt capăt, M', al segmentului se numește *transformatul prin translație* sau, mai simplu, *translatatul* punctului M.

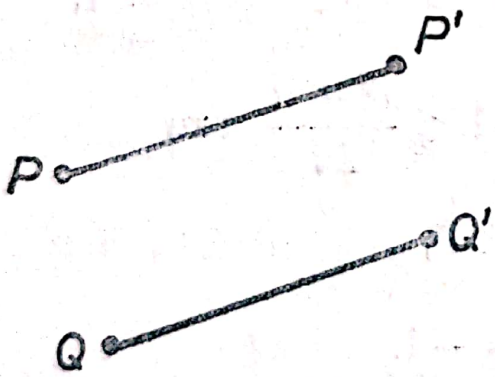


Fig. V.1.1

Fie P și Q două puncte și P', Q' translatatele lor, transformarea fiind determinată de vectorul $\vec{v}$ (vezi fig. V.1.1).

Cum segmentul PP' este egal și paralel cu segmentul QQ' rezultă că figura $PP'Q'Q$ este un paralelogram și de aici rezultă, cu necesitate, că segmentul PQ este egal și paralel cu $P'Q'$.

Rezultă deci că *translația păstrează distanțele și unghiurile* (deoarece în al doilea caz, laturile lor rămîn paralele).

Scanned with OKEN Scanner

Fie P un punct și P' translatatul său, translația fiind determinată de vectorul $\vec{v}$. Potrivit construcției anterioare, dacă P este mobil pe o dreaptă (d), P' se „plimbă" tot pe o dreaptă, fie aceasta (d'), *translatata* dreptei (d) (și paralelă cu ea).

Faptul precedent nu arată altceva decît că, prin translație, *o dreaptă* (d) *se transformă într-o dreaptă* (d') *paralelă cu* (d) și, în general, *o linie* (l) *se transformă într-o linie* (l'), *paralelă cu ea* astfel încît distanța dintre două puncte *omoloage* este aceeași.

Faptul precedent arată deci că două paralele pot fi puse într-o *corespondență punctuală* prin translație.

V.1.2. *Rotația.* Rotația este tot o transformare geometrică determinată de un centru O, numit *centru de rotație* și de un unghi α, $\alpha \in [0, 2\pi]$.

M fiind un punct arbitrar, transformatul lui prin rotația caracterizată de datele anterioare este un punct M' pentru care (vezi fig. V.1.2. a):

$$OM' = OM, \quad \sphericalangle MOM' = \alpha.$$

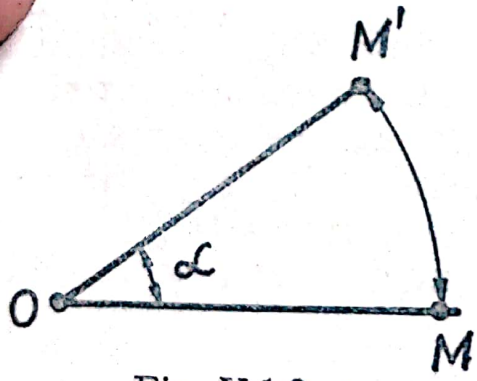


Fig. V.1.2. a

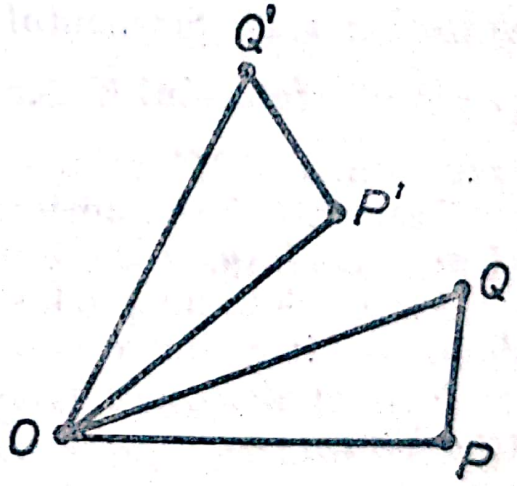


Fig. V.1.2. b

Cînd punctul M descrie o linie l, locul geometric al punctului M' este tot o linie l', *transformata prin rotație* a liniei l.

Fie P, Q două puncte și P', Q' transformatele lor prin rotația considerată (vezi fig. V.I.2.b). Deoarece:

$$\sphericalangle POP' = \sphericalangle QOQ'$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că:

$$\sphericalangle POQ = \sphericalangle P'OQ'.$$

Dar $OP' = OP$, $OQ' = OQ$ deci triunghiurile OPQ, $OP'Q'$ sînt egale deci $P'Q' = PQ$.

Rezultă deci că *rotația păstrează distanțele*. Se deduce ușor că *ea păstrează și unghiurile*.

V.1.3. *Simetria*. Simetria în raport cu un punct este o rotație de două unghiuri drepte, în jurul acelui punct iar simetria față de o dreaptă (d) se definește ca fiind simetria în raport cu piciorul perpendicularei coborîtă pe dreapta (d) din punctul (sau punctele) căruia vrem să-i aflăm simetricul.

V.1.4. *Deplasări*. Fie M un punct și τ oricare din transformările introduse pînă acum. Fie, de exemplu, τ o translație determinată de vectorul $\vec{v}$. Fie γ o altă translație determinată de vectorul $\vec{v}'$. Prin τ, M se transformă în M', iar M', prin γ, în M''. Fie $\vec{K}$ suma vectorilor $\vec{v}, \vec{v}'$. Segmentul MM'' are direcția, mărimea și sensul vectorului $\vec{K}$ deci putem ajunge de la M la transformatul M'' printr-o translație β de vector $\vec{K}$.

Translația β se numește *produsul* translațiilor τ și γ și deci *produsul a două translații este tot o translație*.

Analog definim produsul dintre două rotații, dintre două simetrii, dintre o rotație și o translație.

Numim *deplasare* produsul unei rotații și a unei translații.

V.1.5. *Omotetie*. Fie O un punct în planul π pe care îl numim *centru de omotetie* și un număr k pe care îl numim *modul de omotetie*.

Omotetia nu este altceva decît transformarea geometrică determinată de punctul O și scalarul k care duce un punct M într-un punct M' situat pe dreapta OM astfel încît (vezi fig. V.1.5. a, V.1.5. b, V.1.5. c):

$$OM' = k\,OM.$$

Scanned with OKEN Scanner

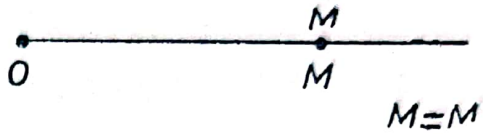
Considerăm și cazul în care $M \equiv O$ și atunci $M' \equiv$ $\equiv M \equiv O$ și încă atunci cînd $k = 1$, caz în care $M \equiv M'$.

Să considerăm N și N' o altă pereche de puncte *omotetice* (omotetia fiind determinată de același centru și același modul), nesituate pe dreapta OM (vezi fig. V.1.5. d). Din definiție:

$$ON' = k\,ON$$

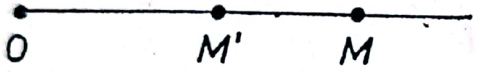
$k>1$

Fig. V.1.5. a



$k=1$

Fig. V.1.5. b



$0<k<1$

Fig. V.1.5. c

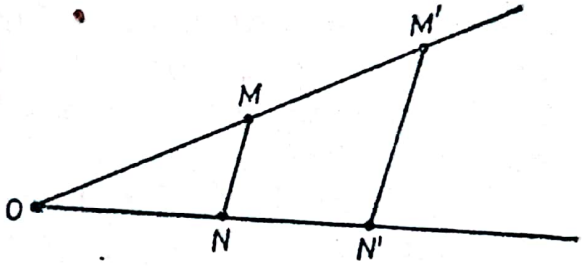


Fig. V.1.5. d

și cum triunghiurile OMN și $OM'N'$ au un unghi comun și laturile proporționale, rezultă că ele sînt asemenea în raportul k deci:

$$M'N' = kMN$$

adică *într-o omotetie raportul distanțelor este constant.*

Cum însă unghiurile OMN și $OM'N'$ sînt egale rezultă $MN \parallel M'N'$ și dacă M (deci și M') este fix, iar N este mobil pe o dreaptă dusă prin M, cum $\sphericalangle OM'N' = \sphericalangle OMN =$ constant, rezultă că N' descrie o dreaptă, dusă prin M' și paralelă dreptei (d) date, *omotetica* dreptei (d).

Reținem și aici definiția potrivit căreia *două figuri sînt omotetice dacă elementele omoloage* (laturi, etc.) *se pot deduce unele din altele printr-o omotetie.*

V.1.6. *Inversiune.* Inversiunea este o transformare determinată de un punct O numit *centru* (sau *pol*) *de inversiune* și un număr real k numit *modul de inversiune.*

Scanned with OKEN Scanner

Inversul unui punct M este un punct M' situat pe dreapta OM pentru care:

$$OM \cdot OM' = k^2. \tag{1}$$

Numărul k^2 este numit *puterea de inversiune.*

Fie N, N' o pereche de puncte omoloage în inversiunea de centru O și modul k deci:

$$ON \cdot ON' = k^2. \tag{2}$$

Rezultă din relațiile (1) și (2):

$$OM \cdot OM' = ON \cdot ON'$$

deci că triunghiurile OMN, $OM'N'$ (vezi fig. V.1.6. a) cu un unghi comun și două perechi de laturi proporționale sînt asemenea deci $\sphericalangle ONM = \sphericalangle OM'N'$ de unde rezultă că patrulaterul $MNN'M'$ este inscriptibil adică *4 puncte, omoloage două cîte două într-o inversiune, sînt conciclice.*

Deducem de aici valoarea segmentelor MN, $M'N'$ în funcție de $M'N'$, k, OM', ON' respectiv MN, k, OM, ON:

$$MN = k^2 \frac{M'N'}{OM' \cdot ON'}$$

respectiv MN, k, OM, ON:

$$M'N' = k^2 \frac{MN}{OM \cdot ON}$$

deoarece din asemănarea triunghiurilor OMN și $OM'N'$:

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{ON'}{OM} = \frac{ON' \cdot ON}{OM \cdot ON} = \frac{k^2}{OM \cdot ON}.$$

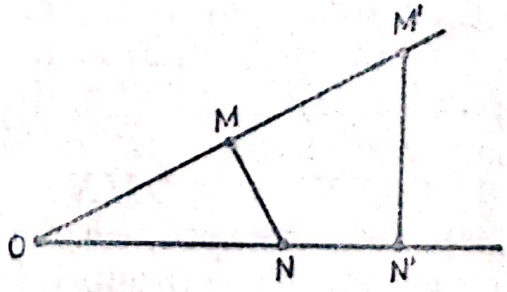


Fig. V.1.6. a

Cînd punctul M descrie o linie l, locul geometric al punctelor M' este o linie l', *inversa* liniei l.

Inversa unei drepte (d) dusă prin centrul O este dreapta însăși iar inversa unei drepte care nu trece prin centrul de inversiune este un cerc care trece prin

Scanned with OKEN Scanner

centrul de inversiune căci dacă T este proiecția centrului O pe dreapta u (vezi fig. V.1.6. b) iar M este mobil pe u și, în fine, T' și M' sînt inversele punctelor T, M atunci:

$$\sphericalangle OM'T' = \sphericalangle OTM = \frac{\pi}{2}$$

și dat fiind că O și T' sînt fixe, M' descrie cercul u' de diametru OT' (vezi fig. V.1.6. b).

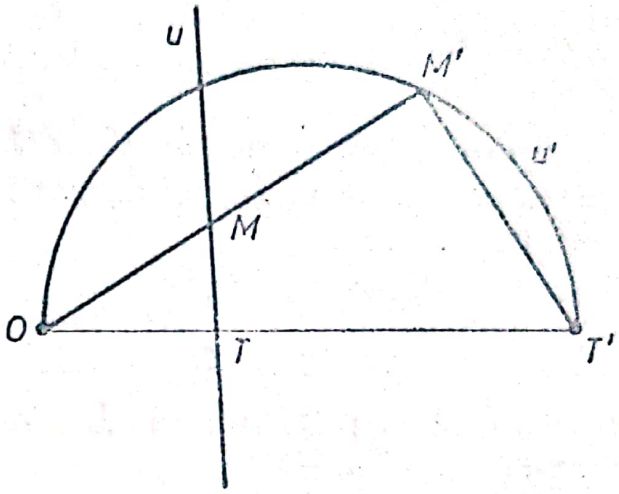


Fig. V.1.6. b

Datorită simetriei relației dintre punctele inverse rezultă și reciproca, anume că *inversul unui cerc care trece prin centrul de inversiune este o dreaptă.*

Reținem și aici definiția potrivit căreia o figură F' este *inversa* figurii F dacă este formată din inversele punctelor lui F.

Reținem, de asemenea, că *două figuri inverse unei a treia F, în raport cu același centru, sînt omotetice una față de alta.*

În adevăr, fie M un punct al lui F, M' și M_1' punctele care îi corespund în cele două inversiuni avînd centrul O comun și puterile k^2 respectiv k_1^2. Atunci:

$$OM \cdot OM' = k^2$$
$$OM \cdot OM_1' = k_1^2$$

deci, împărțind:

$$\frac{OM'}{OM_1'} = \left(\frac{k}{k_1}\right)^2$$

și afirmația este dovedită.

V.1.7. *Polara unghiulară.* Pentru a prezenta această noțiune vom face apel la cîteva noțiuni legate de *diviziunea armonică.*

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm 4 puncte, A, B, C, D, astfel încît C și D divid segmentul AB în același raport, unul interior și celălalt exterior adică, ținînd seama de orientarea segmentelor: $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$.

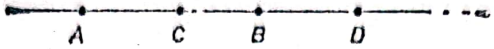


Fig. V.1.7.

Spunem că punctele C și D sînt *conjugate armonic* în raport cu A și B; deoarece relația de mai sus o mai putem scrie:

$$\frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB}$$

rezultă că și punctele A, B sînt conjugate armonic în raport cu C și D.

Spunem că punctele A, B, C, D formează o *diviziune armonică*.

În general, numim *raport anarmonic* al punctelor A, B, C, D expresia: $u = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$.

În particular, dacă $u = -1$ atunci avem de-a face cu *raportul armonic* al acestor puncte.

Numim *fascicul armonic* oricare 4 drepte concurente care sînt tăiate în raport armonic de o dreaptă.

Considerăm un punct M și un unghi xOy. O secantă mobilă dusă prin punctul M taie laturile acestui unghi în X și Y. Fie P conjugatul armonic al punctului M în raport cu X și Y. Dreapta OP o numim *conjugata* dreptei OM în unghiul xOy care se observă că este fixă.

Ca atare, *locul geometric al conjugatului unui punct M față de punctele de intersecție ale unei secante mobile duse prin M cu laturile unui unghi dat este o dreaptă care trece prin vîrful unghiului.*

Această dreaptă este numită *polara unghiulară* a punctului M în raport cu laturile unghiului.

Fie acum un punct M și un cerc c ($M \in c$). O secantă mobilă dusă prin M taie cercul în M_1 și M_2 și fie P conjugatul punctului M în raport cu M_1 și M_2.

Scanned with OKEN Scanner

Este clar că atunci cînd secanta variază punctul P variază.

Fie N mijlocul segmentului MP. Prin ipoteză, punctele M, P, M_1, M_2 formează o diviziune armonică deci:

$$MN^2 = NM_1 \cdot NM_2. \qquad (1)$$

În adevăr, din relația inițială, fără a ține seama de orientarea segmentelor:

$$MM_1 \cdot PM_2 = PM_1 \cdot MM_2$$

se obține:

$$(NM+NM_1)\,(NM_2-NP) = (NP-NM_1)\,(MN+NM_2)$$

și cum $NM = NP$ după simplificări rezultă tocmai relația (1).

Membrul al doilea al relației (1) este puterea punctului N (exterior cercului c) în raport cu cerul c, iar NM^2 este puterea aceluiași punct la cercul de rază nulă, redus la punctul M. Ca atare, N are puteri egale față de cercul c și față de punctul M. Pe de altă parte, punctul N este exterior punctelor conjugate M_1, M_2. Locul geometric al punctului este *axa radicală* a celor două cercuri deci o dreaptă perpendiculară pe diametrul care trece prin punctul M. Deoarece $MP = 2MN$, punctele P și N se corespund în omotetia de centru M și modul 2. Punctul P descrie ca atare omotetica dreptei precedente adică o paralelă cu ea. Rezultă de aici imediat: că locul geometric al conjugatului punctului M față de punctele de intersecție cu un cerc ale unei secante mobile care trece prin M este o dreaptă perpendiculară pe diametrul ce trece prin M, dreaptă care este numită *polara* punctului M. Invers, punctul M este *polul* acestei drepte.

Cu aceste noțiuni, putem trece acum la abordarea unor chestiuni legate de geometria triunghiului, a patrulaterului, a corpurilor de rotație etc.

Multe din faptele cunoscute din manual vor fi omise, manualele fiind însăși puncte de referință pentru a înțelege mai bine aceste lucruri.

Scanned with OKEN Scanner

Faptele expuse — în special teoremele — sînt însoțite în general de numele autorilor lor, constituind în felul acesta, credem, o mai utilă prezentare.

Problemele rezolvate ori propuse spre rezolvare, vor fi alese din cele mai importante teoreme în scopul de a face mai bine cunoscută partea clasică a geometriei.

Desigur că abstractizarea cu care sîntem confruntați astăzi și care a produs profunde mutații în matematică — și nu numai în matematică — solicită o altă prezentare. Să nu uităm însă că toate descoperirile mari ale Omenirii s-au făcut pe baza fundamentelor.

V.2.0. Geometria triunghiului.

V.2.1.0. *Relații metrice într-un triunghi.* În afară de formulele expuse în capitolul IV reținem, de asemenea:

V.2.1.1. *Teorema lui Pitagora.* Într-un triunghi dreptunghic pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor;

V.2.1.2. *Propoziție.* Într-un triunghi dreptunghic înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este medie proporțională între segmentele determinate de aceasta pe ipotenuză;

V.2.1.3. *Teorema lui Stewart.* Fiind dat un triunghi ABC și un punct D pe BC, situat între B și C, are loc (vezi fig. V.2.1.3):

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

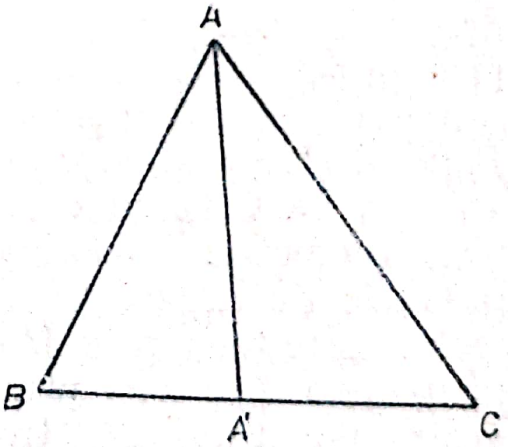


Fig. V.2.1.3

V.2.2.0. *Transversale.*

V.2.2.1. *Definiție.* Dat fiind un triunghi ABC și o dreaptă d, spunem că d este *transversală* dacă ea intersectează laturile triunghiului (sau prelungirile lor).

Scanned with OKEN Scanner

V.2.2.2. *Teorema lui Menelau.* Dacă o transversală (d) taie laturile unui triunghi ABC în A_1, B_1, C_1 atunci (vezi fig. V.2.2.2):

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1.$$

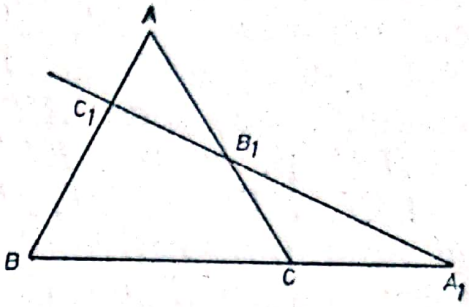


Fig. V.2.2.2

V.2.3.0. *Ceviene.*

V.2.3.1. *Definiție.* Fie ABC un triunghi și M un punct în planul triunghiului. Dreptele AM, BM, CM se mai numesc și *ceviene* în triunghiul ABC și în legătură cu acestea are loc (vezi fig. V.2.3.1):

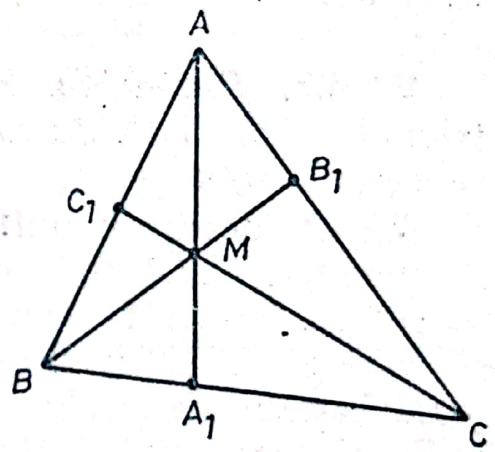


Fig. V.2.3.1

V.2.3.2. *Teorema lui Ceva.* Fie A_1, B_1, C_1 trei puncte situate pe laturile triunghiului ABC. Dacă dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente, atunci, ținînd seama de orientarea segmentelor:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = -1.$$

V.2.4.0. *Puncte importante în triunghi.*

V.2.4.1. *Definiție.* Numim *ortocentru* al triunghiului ABC, punctul de intersecție al înălțimilor.

În legătură cu aceasta au loc următoarele:

V.2.4.2. *Propoziție.* Simetricele ortocentrului unui triunghi ABC față de laturi sînt situate pe cercul circumscris triunghiului.

În adevăr, dacă A' este piciorul înălțimii dusă din A (vezi fig. V.2.4.2), H ortocentrul și L intersecția înălțimii AA' cu cercul circumscris:

$$\sphericalangle LBC = \sphericalangle LAC = \sphericalangle CBB'$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece unghiurile LBC și LAC au aceeași măsură iar laturile unghiurilor LAC și CBB' sînt perpendiculare; triunghiurile HBA', $A'BL$ sînt egale, avînd latura BA' comună, de unde $A'L = HA'$ și, analog, $HC' = C'N$, $HB' = B'M$, M și N fiind intersecțiile dreptelor BB', CH cu cercul iar C' piciorul perpendicularei din C.

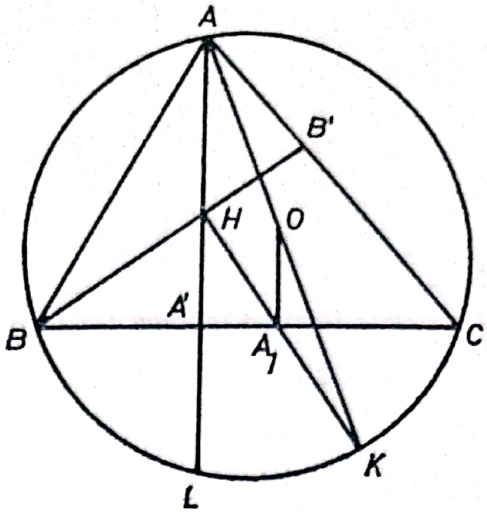


Fig. V.2.4.2

V.2.4.3. *Propoziție.* Simetricele ortocentrului unui triunghi ABC față de mijloacele laturilor sînt situate pe cercul circumscris.

Aceasta deoarece, notînd prin K diametralul vîrfului A (vezi fig. V.2.4.2) în cercul circumscris, $\sphericalangle ACK = \pi/2$ (ca înscris în semicercul AMK) adică $BB' \| CK$ și analog $BK \| CH$ deci patrulaterul $BKHC$ este un paralelogram de unde A_1, mijlocul laturii BC, este mijlocul segmentului HK.

Din figura V.2.4.2 rezultă, de asemenea:

V.2.4.4. *Propoziție.* Distanța de la un vîrf la ortocentru într-un triunghi ABC este dublul distanței de la centrul cercului circumscris la latura opusă (deoarece OA_1 este linie mijlocie în triunghiul AHK).

Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, CA, AB și D, E, F mijloacele segmentelor cuprinse între vîrfurile A, B, C și ortocentru (vezi fig. V.2.4.4). Să considerăm în omotetia de centru H și modul $\frac{1}{2}$ punctul M și omoteticul său N; dacă M ocupă pozițiile A, B, C, punctul N ocupă succesiv pozițiile D, E, F, care sînt deci situate pe omoteticul cercului circumscris, cu centrul de omotetie H și modul $\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum însă simetricele ortocentrului H față de laturi și față de mijloacele laturilor sînt situate pe cercul circumscris, rezultă că punctele $A', B', C', A_1, B_1, C_1$ sînt situate pe omoteticul cercului circumscris, în aceeași omotetite, anume un cerc cu centrul în mijlocul O' al segmentului OH și raza $R' = \frac{1}{2} R$, R fiind raza cercului circumscris. Deci:

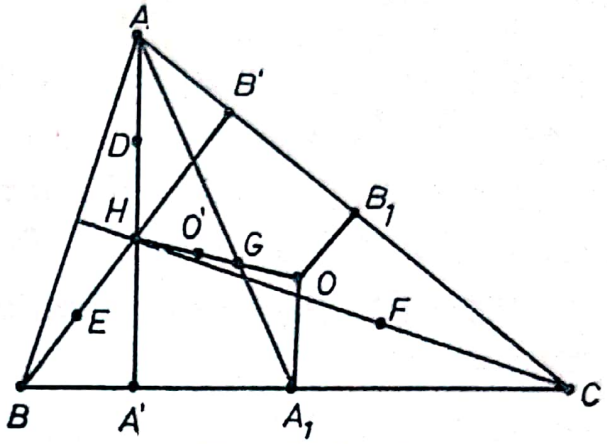


Fig. V.2.4.4

V.2.4.5. *Teoremă (Euler).* Într-un triunghi, mijloacele laturilor, picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor cuprinse între vîrfuri și ortocentru sînt nouă puncte pe un cerc cu centrul în mijlocul segmentului care unește centrul cercului circumscris cu ortocentrul și avînd ca rază, jumătate din raza cercului circumscris.

Cercul astfel construit mai poartă denumirea de *cercul lui Euler* sau *cercul celor nouă puncte.*

V.2.4.6. *Definiție.* Numim puncte *izotomice* orice pereche de puncte simetrice față de centrul unei laturi a unui triunghi ABC.

V.2.4.7. *Definiție.* Numim *centrul de greutate* al unui triunghi, punctul de intersecție al medianelor.

Afirmațiile:

V.2.4.8. *Teoremă (Gergonne).* Dreptele care unesc vîrfurile unui triunghi cu contactele cercului înscris pe laturile opuse sînt concurente;

V.2.4.9. *Teoremă (Nagel).* Dreptele care unesc vîrfurile unui triunghi cu contactele cercurilor exînscrise pe laturile opuse corespunzătoare sînt concurente;

V.2.4.10. *Simedianele* unui triunghi sînt concurente;

V.2.4.11. *Cercurile adjuncte* $A\bar{B}$, $B\bar{C}$, $C\bar{A}$ ale unui triunghi ABC au un punct comun;

Scanned with OKEN Scanner

V.2.4.12. Cercurile adjuncte $B\bar{A}, C\bar{B}, A\bar{C}$ au un punct comun pentru un triunghi ABC, introduc puncte noi, anume punctul *Gergonne* (V.2.4.8), punctul *Nagel* (V.2.4.9), punctul *Lemoine* sau *centrul simedian* (V.2.4.10), punctele *Brocard* (V.2.4.11 și V.2.4.12).

Pentru a înțelege mai bine teoremele enunțate, care de altfel sînt și propuse spre rezolvare, dăm următoarele definiții:

V.2.4.13. *Definiție.* Numim *izogonale*, două ceviene care sînt egal înclinate pe prima bisectoare;

V.2.4.14. *Definiție.* Numim *simediane*, izogonalele medianelor;

V.2.4.15. *Definiție.* Numim *cerc adjunct* al unui triunghi, un cerc care trece printr-un vîrf al triunghiului și este tangent în alt vîrf, laturii opuse.

Se notează, de obicei, cu $A\bar{B}$ cercul adjunct care trece prin A și este tangent în B laturii BC etc.

V.2.4.16. *Definiție.* Numim *puncte conciclice* oricare puncte situate pe aceeași circumferință (pe același cerc).

V.2.4.17. *Teoremă (Carnot).* Dacă un cerc c taie laturile unui triunghi ABC în punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 atunci (vezi fig. V.2.4.17):

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=1.$$

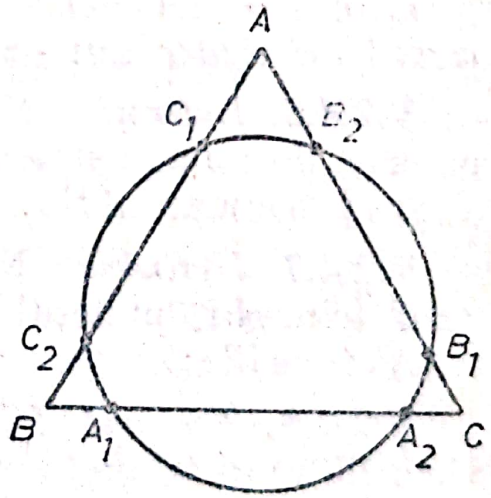


Fig. V.2.4.17

Demonstrație. Scriem puterea vîrfului A în raport cu cercul c:

$$AB_1\cdot AB_2 = AC_1\cdot AC_2$$

și analoagele astfel că relația de demonstrat este evidentă.

Scanned with OKEN Scanner

V.2.5.0. *Clasificarea triunghiurilor.*
Există mai multe tipuri de triunghiuri, determinate de proprietățile particulare ale acestora. Astfel avem:

V.2.5.1. *Triunghiul echilateral* adică triunghiul care are toate laturile egale între ele (deci și unghiurile);

V.2.5.2. *Triunghiul isoscel* adică triunghiul care are două laturi egale (în particular, triunghiul echilateral este isoscel);

V.2.5.3. *Triunghiul oarecare* care poate fi sau isoscel sau echilateral sau de nici un astfel de fel; există însă și:

V.2.5.4. *Triunghiuri ortologice* care sînt grupate în perechi și pentru care perpendicularele din vîrfurile unui triunghi pe laturile celuilalt sînt concurente (de aici se poate demonstra că în acest caz și perpendicularele din vîrfurile triunghiului al doilea pe laturile primului sînt concurente, punctele de concurență fiind numite *centre de ortologie*);

V.2.5.5. *Triunghiul ortic* al unui triunghi ABC, obținut prin unirea picioarelor înălțimilor, A_1, B_1, C_1 situate pe laturile BC, AC, AB;

V.2.5.6. *Triunghiul antiortic* al unui triunghi ABC ca fiind triunghiul ortic al triunghiului ortic al triunghiului ABC;

V.2.5.7. *Triunghiul podar* al unui punct M din planul triunghiului ABC ca fiind triunghiul obținut prin unirea proiecțiilor lui M pe laturile triunghiului ABC;

V.2.5.8. *Triunghiul dreptunghic*, cu un unghi de 90°;

V.2.5.9. *Triunghiul nul*, redus la un punct.

V.2.6.0. *Considerații finale.*

V.2.6.1. *Propoziție.* În orice triunghi, bisectoarele interioare sînt concurente în centrul cercului înscris triunghiului.

Scanned with OKEN Scanner

V.2.6.2. *Propoziție.* În orice triunghi, mediatoarele laturilor sînt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului.

V.2.6.3. *Propoziție.* Două triunghiuri oarecare sînt egale cînd are loc una din situațiile:

1°). au cîte o latură egală și cele două unghiuri alăturate acestora respectiv egale;

2°). au cîte un unghi egal cuprins între două laturi respectiv egale;

3°). au toate laturile egale.

V.2.6.4. *Propoziție.* Două triunghiuri dreptunghice sînt egale cînd are loc una din situațiile:

1°). au ipotenuzele egale și cîte un unghi ascuțit egal (primul caz de egalitate);

2°). au ipotenuzele egale și cîte o catetă egală (al doilea caz de egalitate);

La aceste cazuri, evident, se adaugă și cele trei de la punctul precedent.

V.2.6.5. *Propoziție.* În orice triunghi, o latură este mai mică decît suma celorlalte două.

V.2.6.6. *Propoziție.* În orice triunghi, o latură oarecare este mai mare decît modulul diferenței celorlalte două.

V.2.6.7. *Definiție.* Fie ABC un triunghi și $B' \in AC$, $C' \in AB$. Dacă $\measuredangle AB'C' = \measuredangle ABC$, dreapta $B'C'$ se numește *antiparalelă* cu BC.

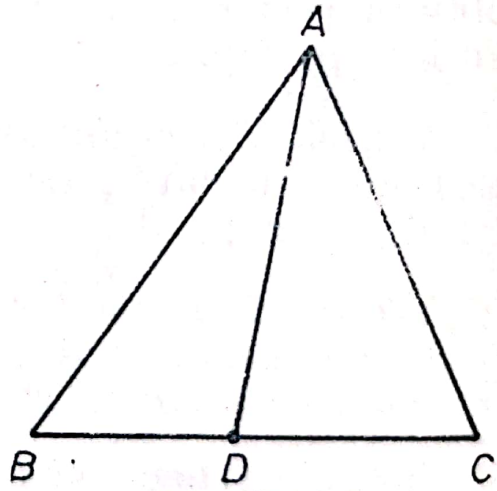


Fig. V.2.6.8

V.2.6.8. *Teorema bisectoarei.* Fie ABC un triunghi și AD bisectoarea corespunzătoare unghiului A, $D \in BC$ (vezi fig. V.2.6.8). Atunci:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

Scanned with OKEN Scanner

V.2.6.9. Fie ABC un triunghi. Notînd cu G centrul de greutate, H ortocentrul, O centrul cercului circumscris de rază R, p semiperimetrul, A, B, C unghiurile, h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor, S aria, r lungimea razei cercului înscris, A_h, B_h, C_h picioarele înălțimilor, I centrul cercului înscris, m_a, m_b, m_c lungimile medianelor, au loc:

1°). $p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$;

2°). $h_a = 2R \sin B \sin C$, $h_b = 2R \sin A \sin C$, $h_c = 2R \sin A \sin B$;

3°). $AH = 2R \cos A$, $BH = 2R \cos B$, $CH = 2R \cos C$;

4°). $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$;

5°). $HA_h = 2R \cos B \cos C$, $HB_h = 2R \cos A \cos C$, $HC_h = 2R \cos A \cos B$;

6°). $OI = R \sqrt{1 - 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$;

7°). $m_a = R \sqrt{\sin^2 A + 4 \cos A \sin B \sin C}$;

$m_b = R \sqrt{\sin^2 B + 4 \cos B \sin C \sin A}$;

$m_c = R \sqrt{\sin^2 C + 4 \cos C \sin A \sin B}$;

8°). $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$;

9°). $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$;

10°). $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$;

11°). $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$;

12°). $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$;

13°). $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$;

14°). $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A = 1 + \sec A \sec B \sec C$;

Scanned with OKEN Scanner

15°). $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C =$
$= -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$;

16°). $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C =$
$= 1 + 2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C$;

17°). $\operatorname{tg} 2A + \operatorname{tg} 2B + \operatorname{tg} 2C = \operatorname{tg} 2A \operatorname{tg} 2B \operatorname{tg} 2C$;

18°). $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} =$
$= 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$;

19°). $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$;

20°).

$$\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 4 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{A}{4} \right) \cos \frac{B}{4} \cos \frac{C}{4},$$

$$\cos \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} = 4 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{4} \right) \cos \frac{A}{4} \cos \frac{C}{4},$$

$$\cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} = 4 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{C}{4} \right) \cos \frac{A}{4} \cos \frac{B}{4};$$

21°).

$$\sin A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{\pi - B}{4} \cos \frac{\pi - C}{4},$$

$$\sin B + \cos C + \cos A = 4 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{\pi - C}{4} \cos \frac{\pi - A}{4},$$

$$\sin C + \cos A + \cos B = 4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{\pi - A}{4} \cos \frac{\pi - B}{4};$$

22°). $\cos^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 + 2 \cos A \sin B \sin C$,
$\cos^2 B + \sin^2 C + \sin^2 A = 1 + 2 \cos B \sin C \sin A$.
$\cos^2 C + \sin^2 A + \sin^2 B = 1 + 2 \cos C \sin A \sin B$;

23°).

$$-\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = -\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2},$$

$$-\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} = -\operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

$$-\operatorname{ctg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} = -\operatorname{ctg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2};$$

Scanned with OKEN Scanner

24°). $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=$

$=1+\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B}{2}\operatorname{cosec}\frac{C}{2}$;

25°). $\operatorname{tg} 2A \operatorname{tg} 2B+\operatorname{tg} 2B \operatorname{tg} 2C+\operatorname{tg} 2C \operatorname{tg} 2A=$

$=1-\sec 2A \sec 2B \sec 2C$;

26°). $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=$

$=1+4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}\right)$.

V.3.0. Conice.

V.3.1.0. *Cercul.*

V.3.1.1. *Definiție.* Fie un plan π. Locul geometric al punctelor din planul π egal depărtate de un punct fix O, se numește *cerc*. Punctul O se numește *centrul* cercului.

Fie (c) un cerc (vezi fig. V.3.1.1. a) și A, B două puncte *diametrale* adică puncte ce se obțin intersectînd o dreaptă ce trece prin O, centrul cercului, cu cercul. Numim oricare din segmentele care au lungimea $OA(=OB)$ și extremitățile în O și pe circumferință, *rază* iar segmentul AB *diametru*.

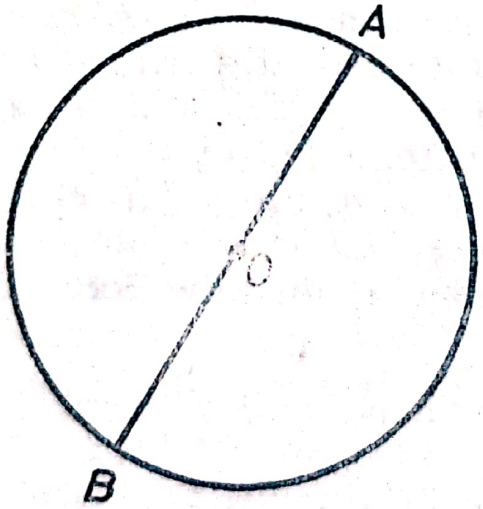


Fig. V.3.1.1. a

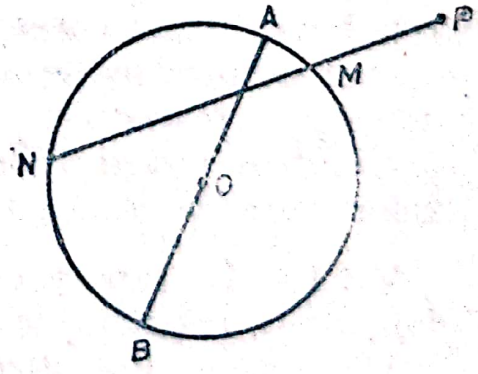


Fig. V.3.1.1. b

V.3.1.2. *Definiție.* Se numește *putere* a unui punct P în raport cu cercul (c) produsul segmentelor determinate pe o secantă arbitrară ce trece prin P, determinate de cerc (adică $PM \cdot PN$, pe cercul din figura V.3.1.1. b).

Scanned with OKEN Scanner

Fie M, N punctele determinate de această secantă pe cerc. Atunci cînd punctele M și N se confundă, secanta devine tangentă la cerc.

Fie c_1, c_2 două cercuri de centre O_1, O_2 și raze r_1, r_2. Are loc în acest caz următoarea:

V.3.1.3. *Teoremă.* Locul geometric al punctelor M, fie exterioare, fie interioare ambelor cercuri, care au aceleași puteri în raport cu cercurile c_1 și c_2 este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor, dreaptă numită *axa radicală* a cercurilor.

În adevăr, trebuie ca, din definiția puterii unui punct față de cerc:

$$MC_1^2 - MC_2^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

r_1 și r_2 fiind razele cercurilor considerate iar C_1, C_2 centrele lor.

Dar, notînd prin M' proiecția lui M pe C_1C_2:

$$MC_2^2 = M'M^2 + M'C_2^2, \quad MC_1^2 = M'M^2 + M'C_1^2$$

deci:

$$MC_1^2 - MC_2^2 = M'C_1^2 - M'C_2^2 = (M'C_1 + M'C_2)(M'C_1 + M'C_2 - 2M'C_2) = C_1C_2(C_1C_2 - 2M'C_2),$$

de unde deducem că $M'C_2$ este constant adică locul geometric este o dreaptă deci de aici afirmația.

Considerînd acum trei cercuri c_1, c_2, c_3 și a_1, a_2, a_3 axele lor radicale corespunzătoare, avînd în vedere că punctul de intersecție al axelor a_2, a_3 are puteri egale față de c_1, c_2 respectiv c_1, c_3 deci și față de c_3, c_2 obținem așa-numitul *centru radical*, punctul de intersecție al axelor radicale a_1, a_2, a_3.

V.3.1.4. În raport cu poziția pe care o ocupă în plan, două cercuri pot fi:

1°). *secante* (au două puncte comune);

2°). *tangente* (au un punct comun), exterior sau interior;

3°). *exterioare* (nu au nici un punct comun);

4°). *unul interior celuilalt* (nu au nici un punct comun dar unul dintre ele este în interiorul celuilalt).

Scanned with OKEN Scanner

V.3.1.5. *Definiție.* Dacă în oricare din punctele comune a două cercuri secante tangentele duse relativ la fiecare sînt perpendiculare atunci cercurile se numesc *ortogonale.*

Rezultă imediat că pentru două cercuri ortogonale, tangenta în unul din punctele comune la unul din cercuri trece prin centrul celuilalt căci fiecare tangentă este perpendiculară pe raza cercului corespunzător.

V.3.1.6. *Definiție.* Toate cercurile care au aceeași axă radicală formează un *fascicul* de cercuri. Axa radicală comună este *axa fasciculului* și linia centrelor este *baza fasciculului.*

Fasciculul este de *genul întîi* cînd axa este exterioară tuturor cercurilor. Dacă toate cercurile fasciculului trec prin două puncte date, el este de *genul al doilea.*

V.3.1.7. *Definiție.* Mulțimea cercurilor care au același centru radical se numește *rețea.*

V.3.1.8. *Definiție.* Fie AD, AD' ($D' \in BC$) bisectoarele unghiurilor exterior și interior din A, în triunghiul ABC. Numim cercul descris pe segmentul DD' ca diametru *cercul Apoloniu* relativ la vîrful A. Avem, în legătură cu aceste lucruri, cîteva propoziții importante:

V.3.1.9. *Propoziție.* Cercurile *Apoloniu* ale unui triunghi fac parte din același fascicul, punctele comune constituind *punctele dinamice* ale triunghiului.

V.3.1.10. *Propoziție.* Picioarele a trei antiparalele egale sînt situate pe un cerc *(cercul Tucker).*

V.3.1.11. *Propoziție.* Paralelele duse la laturile unui triunghi prin centrul simedian taie laturile în 6 puncte situate pe un cerc *(primul cerc Lemoine).*

V.3.1.12. *Propoziție.* Picioarele antiparalelelor duse prin centrul simedian sînt situate pe un cerc *(al doilea cerc Lemoine).*

V.3.1.13. *Propoziție.* Proiecțiile picioarelor înălțimilor unui triunghi pe laturile adiacente sînt 6 puncte pe un cerc *(cercul Taylor).*

Scanned with OKEN Scanner

La aceste cercuri adăugăm *cercul Euler* (al celor 9 puncte), *cercurile adjuncte* și *cercul Brocard*, cercul pe care sînt situate punctele *Brocard*.

V.3.2.0. *Elipsa.*

V.3.2.1. *Definiție.* Fie F, F' două puncte în plan. Locul geometric al punctelor M pentru care:

$$MF + MF' = \text{constant} \tag{1}$$

se numește *elipsă* (vezi fig. V.3.2.1).

Punctele F, F' se numesc în acest caz *focarele* elipsei. Distingem aici, notînd constanta din (1) cu $2a$ și $F'F = 2c$:

1°). *axa mare* a elipsei, adică segmentul AA';

2°). *axa mică* a elipsei, adică segmentul BB';

3°). punctul O, *centrul* elipsei;

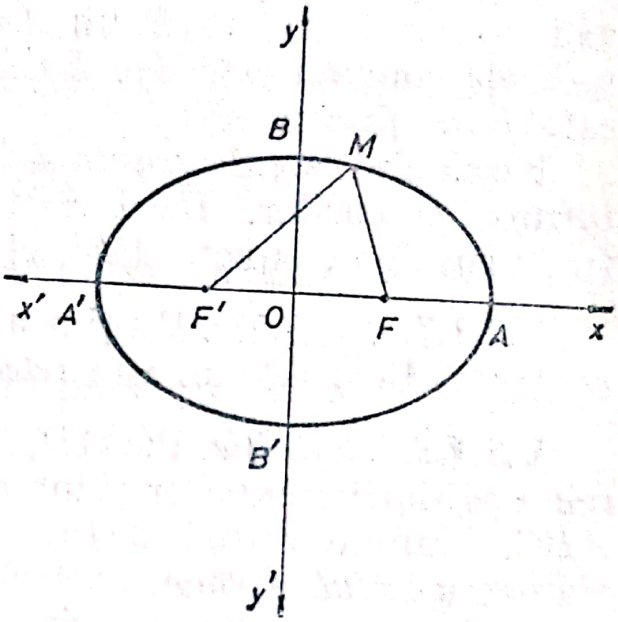


Fig. V.3.2.1

4°). *excentricitatea* e a elipsei:

$$e = \frac{OF}{OA} = \frac{c}{a};$$

5°). *razele vectoare* ale elipsei:

$$MF = r,\ MF' = r';$$

6°). *interiorul* elipsei ca fiind regiunea punctelor M din plan pentru care:

$$MF' + MF < 2a;$$

7°). *aria* elipsei:

$$A = \pi ab,$$

notînd $OA = a$, $OB = b$.

Scanned with OKEN Scanner

V.3.3.0. *Hiperbola.*

V.3.3.1. *Definiție.* Hiperbola este locul geometric al punctelor M (vezi fig. V.3.3.1) pentru care diferența distanțelor la două puncte fixe F, F' este constantă:

$$MF' - MF = \text{constant}. \tag{1}$$

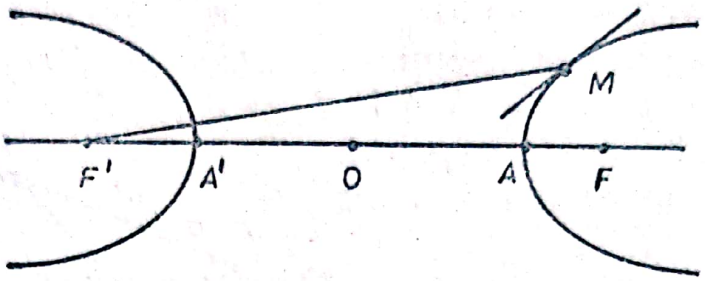


Fig. V.3.3.1

Adoptînd o terminologie analoagă, F și F' sînt numite *focarele* hiperbolei.

Notînd constanta din (1) cu $2a$, $FF' = 2c$ și:

$$c^2 - a^2 = b^2$$

obținem imediat că $a < c$. În cazul cînd $a = b$, hiperbola este *echilateră*.

V.3.4.0. *Parabola.*

V.3.4.1. *Parabola* este locul geometric (vezi fig. V.3.4.1) al punctelor egal depărtate de un punct F numit *focarul* parabolei, și o dreaptă d, numită *directoarea* parabolei.

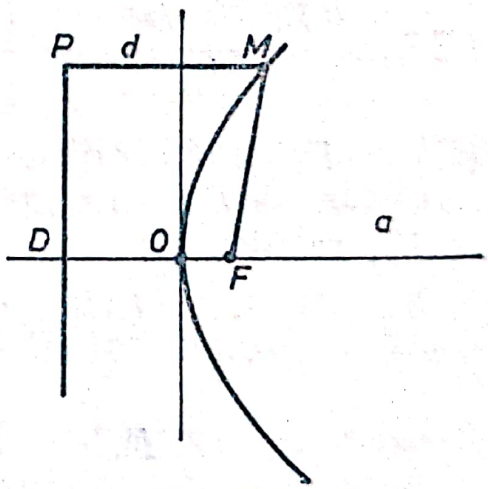


Fig. V.3.4.1

V.4.0. Geometria patrulaterului.

V.1.1. *Definiție.* Patrulaterele pot fi:

1°). *oarecare*, dacă nu se precizează proprietăți particulare;

2°). *dreptunghiuri*, dacă au laturile paralele și un unghi drept;

3°). *trapeze*, dacă au două laturi paralele și două neparalele;

4°). *pătrate* dacă au toate laturile egale și un unghi drept;

5°). *romburi* dacă au toate laturile egale;

6°). *paralelograme* dacă au laturile paralele două cîte două.

Considerăm un patrulater $ABCD$ în care, pentru simplificarea notațiilor, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Fie, de asemenea, $AC = e$, $BD = f$ diagonalele sale (vezi fig. V.4.1).

Formula ce exprimă lungimea medianei într-un triunghi ABC:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

(a, b, c fiind laturile triunghiului iar m_a mediana corespunzătoare laturii a) dă (vezi fig. V.4.1):

$$EF^2 = \frac{BE^2 + DE^2}{2} - \frac{DB^2}{4}$$

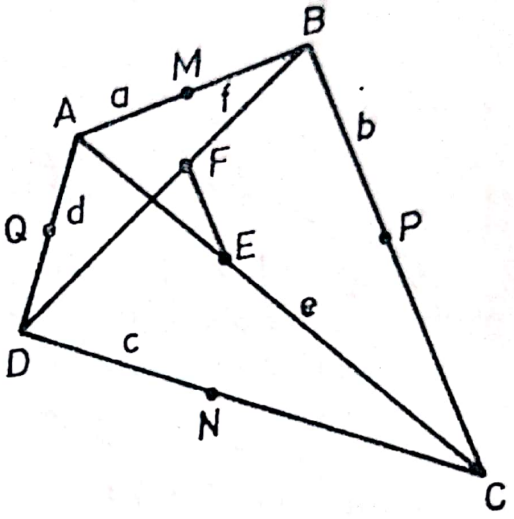


Fig. V.4.1

(E și F fiind mijloacele segmentelor AC, BD) și cum DE și BE sînt mediane în triunghiurile ACD și ABC, rezultă și:

$$BE^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{e^2}{4},$$

$$DE^2 = \frac{c^2 + d^2}{2} - \frac{e^2}{4}$$

de unde:

V.4.2. *Propoziție (Euler).* În orice patrulater (cu notațiile din V.4.1):

$$4EF^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2.$$

Un tip special de patrulater este patrulaterul *complet.*

V.4.3. *Definiție.* Fie $ABCD$ un patrulater. Prelungim laturile acestuia care se intersectează în E și F (vezi V.4.3. a). Obținem în felul acesta *patrulaterul*

Scanned with OKEN Scanner

complet $ABCDEF$ cu șase vîrfuri, A, B, C, D, E, F, patru laturi, ABE, DCE, CBF, DAF, trei diagonale, EF, AC, BD.

Triunghiul EFG este triunghiul *diagonal* al patrulaterului.

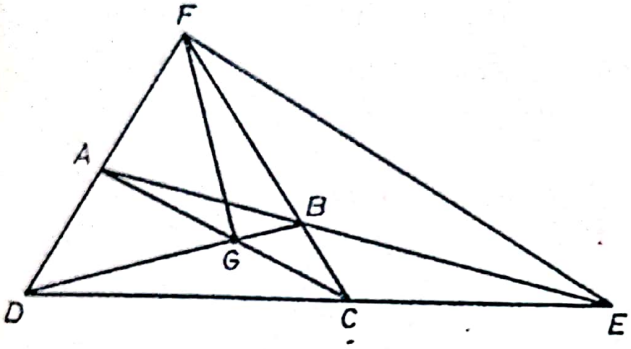


Fig. V.4.3 a

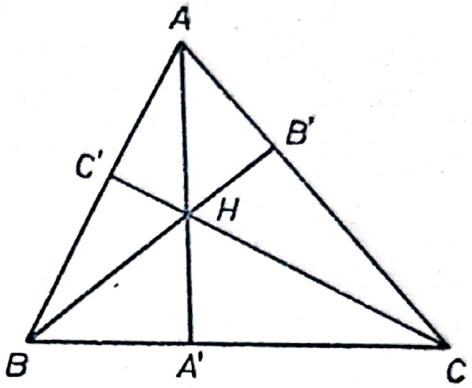


Fig. V.4.3 b

Fie ABC un triunghi și H ortocentrul său. Notînd prin A', B', C', picioarele înălțimilor duse respectiv din A, B, C, observăm că în triunghiul BHC înălțimile sînt (vezi fig. V.4.3.b) HA', BC', CB', concurente în A, deci A este ortocentrul acestui triunghi, proprietate care este analogă și pentru celelalte triunghiuri, AHB, AHC. Rezultă deci că dacă H este ortocentrul unui triunghi ABC, oricare din punctele A, B, C, H este ortocentrul triunghiului format cu celelalte trei puncte.

V.4.4. *Definiție.* Spunem că punctele A, B, C, H considerate în secțiunea precedentă formează un *patrupunct ortocentroidal.*

Acest patrupunct nu este un patrulater, dar multe din proprietățile sale pot fi considerate ale patrulaterului.

În afară de clasificarea făcută la V.4.1 mai putem considera:

a°). *patrulatere inscriptibile* adică patrulatere care pot fi înscrise într-un cerc;

b°). *patrulatere circumscriptibile* adică patrulatere care pot avea laturile tangente unui cerc;

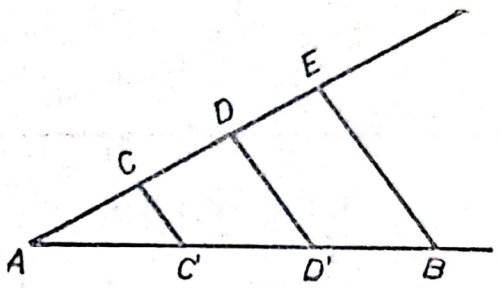
c°). *patrulatere armonice* adică patrulatere care sînt inscriptibile și care au polul unei diagonale pe cealaltă diagonală.

Scanned with OKEN Scanner

V.5.0. Construcții geometrice.

Acest aspect al geometriei solicită aproape toate informațiile oferite de partea teoretică. Folosind transformările geometrice, proprietățile de structură ale acestora, formule, teoreme dar mai ales rigla (negradată) și compasul, construcțiile geometrice pot fi încadrate în o parte specială a problemisticei geometriei. În cele ce urmează vom ilustra cîteva tipuri, mai deosebite, de construcții geometrice, neexistînd în acest sens o teorie exhaustivă.

V.5.1. *Exemplu.* Să împărțim un segment de dreaptă în părți proporționale cu niște segmente date sau în părți egale.



F.ig. V.5.1

Să considerăm segmentul AB, care trebuie împărțit în modul solicitat, de pildă, în trei părți egale. Pe o dreaptă oarecare, dusă prin punctul A, construim trei segmente egale AC, CD, DE, lucru ce este evident posibil folosind compasul. Unim atunci punctele B și E și ducem, din C și din D, paralele la această dreaptă (vezi fig. V.5.1). Dacă ar trebui să împărțim pe AB în segmente proporționale cu trei segmente date, atunci am lua segmentele AC, CD, DE respectiv egale cu cele trei segmente considerate și repetăm raționamentul făcut anterior.

V.5.2. *Exemplu.* Să construim un triunghi ABC în care cunoaștem unghiul A, raportul dintre lungimea laturilor b și c și respectiv R, raza cercului circumscris.

Pe laturile unui unghi egal cu A considerăm o lungime b' arbitrară; lungimea c' de pe latura a doua rezultă din condiția enunțului:

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie R' raza cercului circumscris acestui triunghi format, asemenea triunghiului dat. Din relația:

$$\frac{b}{b'} = \frac{R}{R'}$$

obținem latura b și analog latura c.

De reținut că aici am folosit omotetia, caz în care a fost posibilă scrierea celei de-a doua relații.

V.5.3. *Observație.* Folosind faptul că orice expresie rațională poate fi redusă succesiv la construcția celei de-a patra proporționale, putem construi segmentul x dat de:

$$x = a\left(\frac{b}{c}\right)^m ;$$

$a, b, c, m > 0$ fiind date $(m \in N)$.

V.5.4. *Exemplu.* Locul mijloacelor coardelor de direcție dată într-o elipsă este un diametru al elipsei.

Înțelegem prin *diametru* al elipsei segmentul interceptat pe o dreaptă de elipsă, ce trece prin centrul elipsei iar prin *coardă*, segmentul interceptat de elipsă pe o dreaptă care o intersectează.

Să observăm că o elipsă se poate obține proiectînd un cerc de pe un plan π_1 pe un plan π_2, unghiul dintre π_1 și π_2 fiind $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (în particular, cercul este o elipsă). Obținem, considerînd $\alpha \in \left(0\ \frac{\pi}{2}\right)$ (deci cazul unei elipse cu axele inegale, pentru cerc afirmația fiind banală) că o rază OP a cercului devine, prin proiecție, o rază OM a elipsei. Fie OP_1, OP_2 două raze perpendiculare în cerc. Unghiul lor nu se păstrează în proiecție dar toate coardele paralele cu OP_2 au mijloacele lor situate pe diametrul OP_1 și această proprietate este păstrată în proiecție.

Scanned with OKEN Scanner

V.5.5. (*Problema lui Sturm*). Ne propunem în continuare să construim un patrulater inscriptibil de laturi date, a, b, c, d.

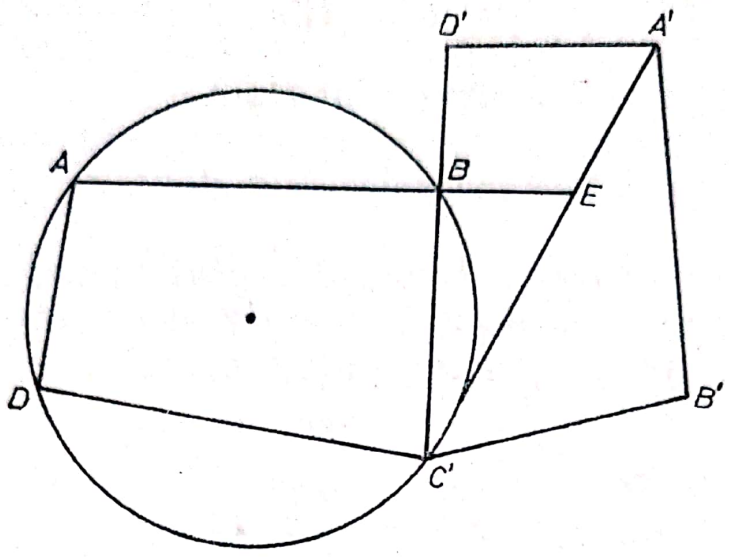


Fig. V.5.5

Fie $ABCD$ patrulaterul ce trebuie înscris, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ (vezi fig. V.5.5). Printr-o rotație în jurul vîrfului C — presupunem problema rezolvată — de unghi C, punctele A, D devin A', $D'(C \equiv C')$. Deoarece $\sphericalangle CD'A' = \sphericalangle CDA$ este suplementar unghiului B, dreapta $A'D'$ este palarelă la AB. Fie E intersecția dreptei AB cu CA'. Avem $CB = b$, $CD' = c$, $D'A' = d$ deci $EB = bd/c$ este constant și vîrful E este fix.

Dar:

$$\frac{CA}{CE} = \frac{CA'}{CE} = \frac{CD'}{CB} = \frac{c}{b}.$$

Deci, pentru construcție, luăm pe o dreaptă segmentele AB, BE cunoscute. Punctul C se află la intersecția cercului de rază b și centru B cu cercul *Apoloniu* al segmentului AE de raport dat (locul geometric al punctelor M din planul triunghiului ABC pentru care:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$$

Scanned with OKEN Scanner

— cu schimbările de notații necesare — este cercul *Apoloniu* al laturii BC).

Că locul geometric descris prin proprietatea anterioară este un cerc, reiese din teorema bisectoarei aplicată unghiurilor triunghiului. Notînd prin AD, AD' bisectoarele unghiului A în triunghiul ABC, bisectoarele unghiului BMC trec atunci prin D și D' și cum bisectoarele MD, MD' sînt perpendiculare, punctul M este situat pe cercul de diametru DD').

Cu aceasta patrulaterul cerut de problema lui *Sturm* este construit.

Legat de partea de problemistică a geometriei mai amintim și determinarea locurilor geometrice problemă ce o vom trata, tot sub forma unor exemple, în cele ce urmează.

În partea finală a acestei sumare părți teoretice vom expune, în afară de transformările geometrice, alte cîteva metode de rezolvare a problemelor de geometrie precum inducția, metoda vectorială, etc.

Este necesar ca cititorul să-și completeze aceste noțiuni — în cazul în care nu le cunoaște — să le lărgească folosind bibliografia citată la sfîrșitul lucrării.

V.6.0. Elemente de geometrie proiectivă.

Geometria proiectivă introduce așa-numitele elemente *improprii*, anume elementele de la infinit ale dreptei, ale planului și spațiului.

În această geometrie, pe orice dreaptă din plan sau spațiu există un singur *punct impropriu* și toate dreptele din plan au punctele improprii pe o *dreaptă improprie*. În fine, dreptele improprii ale tuturor planelor din spațiu sînt situate într-un *plan impropriu*.

Adoptînd aceste noțiuni, este clar că dreptele paralele se intersectează pe dreapta improprie a planului căci, presupunînd că o dreaptă neparalelă cu două drepte paralele ar avea același punct impropriu, ar rezulta că toate dreptele au același punct impropriu, absurd.

Scanned with OKEN Scanner

Fie un fascicul de drepte, anume drepte care au un punct comun în planul considerat.

Deoarece mulțimea dreptelor paralele de direcție dată au comun un punct impropriu i, ele formează un fascicul de drepte cu *centru impropriu*.

Cercurile din plan intersectează dreapta improprie în două puncte U și V, numite *punctele ciclice* ale planului.

O dreaptă improprie a unui plan P se poate transforma într-o dreaptă *proprie* a unui alt plan P' (adică dreaptă oarecare ce poate fi, într-un caz particular, precizată). Metoda de care ne prevalăm este a *proiecției centrale* care transformă un punct M al lui P într-un punct M' al lui P', proiectînd dintr-un punct fix O punctul M pe planul P'. M' este deci intersecția dreptei OM cu planul P'. Fie figura F', proiecția pe P' a figurii F din planul P. Să ducem prin punctul O un plan paralel cu planul P' care va tăia un alt plan P_1, pe care vrem să proiectăm pe F'. Intersecția planelor P' și P_1 este o dreaptă oarecare d, care corespunde dreptei improprii a lui P', căci transformatele dreptelor paralele din P' se taie pe dreapta d din P și dreapta improprie a lui P' se poate transforma într-o dreaptă oarecare a aceluiași plan, proiectînd din alt punct O' figura din P_1 pe P', fapt ce nu este altceva decît un produs de transformari.

Rezultă deci de aici că dreapta improprie a unui plan se poate transforma prin una sau două proiecții centrale într-o dreaptă oarecare a altui plan sau a aceluiași plan și reciproc, o dreaptă oarecare d a unui plan P se poate transforma în dreapta improprie a altui plan P' sau a aceluiași plan. Pentru aceasta este suficient să luăm planul P' paralel cu planul P_1 determinat de O și d.

În afară de aceste elemente improprii, avem în cadrul geometriei proiective și elementele *imaginare*. Drept exemplu să considerăm o dreaptă d și un cerc C. Studiind poziția dreptei d față de cercul C observăm că dreapta poate intersecta cercul în două puncte distincte, într-unul singur (cînd dreapta este tangentă cercului) sau în puncte imaginare, cînd nu se intersec-

Scanned with OKEN Scanner

tează în planul considerat. În felul acesta, o dreaptă taie un cerc în două puncte, fie reale, fie confundate, fie imaginare, cum spuneam înainte.

Biraportul sau raportul anarmonic a patru puncte își găsește în cazul acestei teorii aplicații fecunde.

Notînd cu $L = (M_1M_2M_3M_4)$ raportul anarmonic al punctelor M_1, M_2, M_3, M_4, adică expresia (ținînd seama de sensul segmentelor):

$$\frac{M_1M_3}{M_1M_4} : \frac{M_2M_3}{M_2M_4},$$

observăm că dacă $L = -1$ atunci punctele sînt conjugate armonic, iar cînd M_2 este mijlocul segmentului M_3M_4 și $L = -1$ raportul anarmonic conduce la:

$$\frac{M_1M_3}{M_1M_4} = +1$$

adică M_1 este punctul impropriu al dreptei $M_1M_2M_3M_4$, adică, altfel spus, conjugatul armonic al mijlocului unui segment este punctul impropriu al dreptei căreia aparține.

Transformările care pun în *corespondență biunivocă* punctul, dreapta, planul și păstrează neschimbat biraportul a patru puncte oarecare pe o dreaptă oarecare se numesc *proiective*.

Dacă intersectăm un fascicul de 4 drepte cu o secantă, biraportul punctelor de intersecție este independent de poziția secantei.

Dacă x și y sînt coordonatele obișnuite ale unui punct din plan, introducem *coordonatele omogene* x_1, x_2, x_3 ale acestui punct prin relațiile:

$$x = \frac{x_1}{x_3}; \quad y = \frac{x_2}{x_3}. \tag{1}$$

Așa, de pildă, coordonatele omogene (0, 2, 1) determină punctul de coordonate neomogene (0, 2).

Scanned with OKEN Scanner

Dreapta de ecuație:

$$ax + by + c = 0$$

devine, în coordonate omogene:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Dacă în (1) facem $x_3 = 0$, coordonatele x, y devin infinite, în ipoteza că $x_1 x_2 \neq 0$. Reciproc:

$$x_3 = 0$$

caracterizează punctele de la infinit; regăsim aici afirmația potrivit căreia toate punctele de la infinit ale planului sînt situate pe o dreaptă, dreapta improprie a planului.

O curbă algebrică de ecuație:

$$f(x, y) = 0$$

(de exemplu o dreaptă, o parabolă etc.) se mai poate scrie în coordonate omogene:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (2)$$

(am văzut mai sus acest lucru pentru cazul unei drepte). Punctele de la infinit ale curbei de mai sus le obținem tăind-o cu dreapta de la infinit, $x_3 = 0$; împărțind în (2) cu cea mai mare putere a lui x_1 și notînd $x_2 : x_1 = m$, obținem forma echivalentă a lui (2):

$$f(1, m, 0) = 0$$

și rădăcinile acestei ecuații în m dau direcțiile dreptelor pe care punctele curbei tind la infinit; le numim pe acestea *direcții asimptotice*.

Rămîn într-o transformare proiectivă invariante proprietatea de coliniaritate a punctelor și proprietatea de concurență a dreptelor deoarece transformata unei drepte este o dreptă, iar a unui punct tot un punct.

Omologia este un caz particular de transformare proiectivă, în care avem un punct dublu (care corespunde lui însuși) O, numit în acest caz și *centru de omologie* și o dreaptă de puncte duble, numită *axă de omologie*.

Scanned with OKEN Scanner

După cum observăm, transformările proiective pot fi aplicate și elementelor spațiului. Această proprietate o au și omotetia, inversiunea simetria, rotația, translația, studiate în prima secțiune a acestui capitol numai pentru plan.

Reținem, de asemenea, că dacă într-o transformare proiectivă dreapta improprie se transformă în ea însăși, transformarea se mai numește *afină*.

V.7.0. Locuri geometrice.

V.7.1. *Exemplu*. Să considerăm un patrulater $ABCD$, vîrfurile A, B, C fiind fixe iar vîrful D descriind o dreaptă (d). Să aflăm în cele ce urmează, folosind calculul vectorial, locul geometric al mijlocului segmentului MN care unește mijlocul lui AB cu mijlocul lui CD.

Pentru aceasta notăm cu P mijlocul segmentului MN. Din punctul A ducem perpendiculara pe dreapta (d) și notăm cu Q piciorul acestei perpendiculare.

Vectorul $\overline{AD}$ (vezi fig. V.7.1) se exprimă prin relația $\overline{AD} = \overline{AQ} + a\bar{u}$ unde $\bar{u}$ este versorul dreptei (d) iar a o mărime scalară, dar variabilă.

Să observăm că în triunghiul ACD segmentul AN joacă rol de mediană și prin urmare:

$$\overline{AN} = \frac{\overline{AD} + \overline{AC}}{2}$$

astfel că:

$$\overline{AN} = \frac{\overline{AQ} + a\bar{u} + \overline{AC}}{2} =$$

$$= \frac{\overline{AQ} + \overline{AC}}{2} + \frac{a\bar{u}}{2}. \quad (1)$$

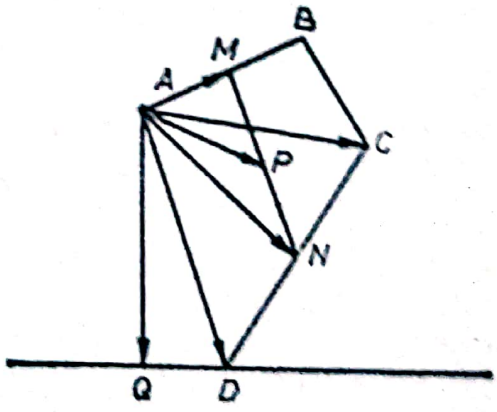


Fig. V.7.1

Vectorii $\overline{AM}$ și $\overline{AB}$ sînt coliniari deci:

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2}. \quad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

În triunghiul AMN vectorul $\overline{AP}$ se exprimă prin formula:

$$\overline{AP} = \frac{\overline{AM} + \overline{AN}}{2}. \qquad (3)$$

Substituind valorile vectorilor $\overline{AM}$ și $\overline{AN}$ din (1) și (2) în relația (3) se obține:

$$\overline{AP} = \frac{1}{4}(\overline{AQ} + \overline{AC} + \overline{AB} + a\bar{u}),$$

astfel că locul geometric căutat este o dreaptă paralelă cu dreapta (d).

V.7.2. *Exemplu.* Să arătăm, folosind omotetia, că locul geometric al centrelor dreptunghiurilor înscrise într-un triunghi este un segment de dreaptă.

În adevăr, fie ABC triunghiul dat (fig. V.7.2) și DE o paralelă la latura BC. Centrul I al dreptunghiului este mijlocul perpendicularei MN, dusă din mijlocul M al segmentului DE, la latura BC.

Triunghiurile ABC și ADE sînt omotetice deci medianele din vîrful A coincid deci punctul M descrie mediana AA_1. Dar, cînd M variază, triunghiurile MNA_1 sînt omotetice între ele, omotetia avînd centrul A_1 deci mediana A_1I este fixă. Locul este deci o dreaptă care trece prin mijlocul laturii BC și prin mijlocul A' al înălțimii din A. Locul se compune numai din segmentul A_1A'.

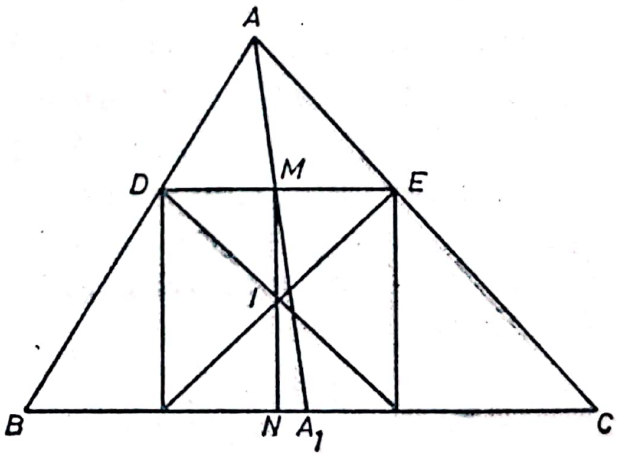


Fig. V.7.2

V.8.0. Geometria tetraedrului.

V.8.1. *Clasificare.* Tetraedele pot fi, după o clasificare:

1°). *regulate* (toate cele 4 fețe sînt triunghiuri echilaterale egale);

Scanned with OKEN Scanner

2°). *ortocentrice* (înălțimile — numim înălțime a tetraedrului perpendiculara dintr-un vîrf pe latura opusă — sînt concurente);

3°). *oarecare.*

V.8.2. *Definiție.* Fie $ABCD$ un tetraedru oarecare. Numim *mediană* a tetraedrului oricare din dreptele DG_{ABC}, CG_{ABD}, AG_{BCD}, BG_{ACD} (vezi fig. V.8.2), G_{ABC}, G_{ABD}, G_{BCD}, G_{ACD}, fiind centrele *de greutate* ale triunghiurilor ABC, ABD, BCD, ACD.

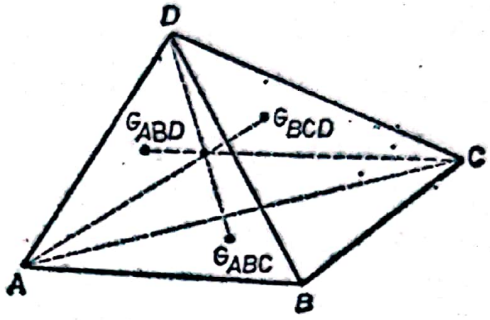


Fig. V.8.2

V.8.3. *Definiție.* Numim *bimediană* a unui tetraedru oarecare $ABCD$, oricare din dreptele care unește mijloacele a două laturi opuse.

Proprietăți

V.8.4. Cele 6 *plane mediatoare* ale unui tetraedru (planele mediatoare ale muchiilor) sînt concurente în centrul sferei circumscrise tetraedrului.

V.8.5. Cele 6 *plane bisectoare* ale unui tetraedru sînt concurente în centrul sferei înscrise tetraedrului.

V.8.6. Medianele unui tetraedru sînt concurente, punctul comun divizînd fiecare mediană în raportul $^1/_3$.

V.8.7. Bimedianele unui tetraedru sînt concurente în centrul de greutate și care se găsește în mijlocul fiecărei bimediane.

V.8.8. Într-un tetraedru ortocentric perechile de muchii opuse sînt perpendiculare.

V.8.9. Într-un tetraedru ortocentric perpendicularele comune ale perechilor de muchii opuse sînt concurente în ortocentru.

V.8.10. Într-un tetraedru ortocentric, bimedianele sînt egale.

V.8.11. Într-un tetraedru ortocentric, vîrfurile se proiectează în ortocentrele fețelor opuse.

Scanned with OKEN Scanner

V.8.12. Centrul de greutate al unui tetraedru ortocentric se proiectează în centrele cercurilor celor nouă puncte.

V.8.13. Într-un tetraedru ortocentric, ortocentrul, centrul de greutate, centrul sferei circumscrise sînt 3 puncte coliniare.

V.8.14. Într-un tetraedru ortocentric, mijloacele muchiilor și picioarele perpendicularelor comune sînt 12 puncte situate pe o sferă cu centrul în centrul de greutate al tetraedrului (prima sferă *Euler*).

V.8.15. Într-un tetraedru ortocentric, centrele de greutate ale fețelor, ortocentrele lor și punctele care divid segmentele dintre vîrfuri și ortocentru în raportul 2 sînt 12 puncte ale unei sfere cu centrul pe dreapta care unește ortocentrul cu centrul cercului circumscris (a doua sferă *Euler*).

V.9.0. Metode de rezolvare.

Așa cum remarcam în paginile anterioare, posibilitățile de rezolvare capătă, de-a lungul vremii, mai multă vioiciune, datorită noilor metode de investigație pe care le oferă continuu matematica. Așa, de pildă, o construcție geometrică la care grecii din Antichitate ar fi muncit zile în șir pentru a-i găsi rezolvarea, poate fi astăzi rezolvată ușor folosind transformările geometrice (strădania grecilor a dus totuși la descoperirea multor lucruri extrem de interesante și folositoare).

Nu ne vom opri asupra acestora — ele au făcut în parte obiectul paragrafelor anterioare — ci asupra principiului inducției matematice — atît de universal — și asupra metodelor vectoriale și areolare.

Vom adopta același punct de vedere în expunerea faptelor, prin exemple.

V.9.1. *Exemplu.* Prin inducție se poate rezolva următoarea problemă: fie O un punct pe o dreaptă d și $\overline{OP}_1, \ldots, \overline{OP}_n$ vectori de lungime 1 care se găsesc în același semiplan determinat de d. Dacă n este impar atunci:

$$|\overline{OP}_1 + \ldots + \overline{OP}_n| \geqslant 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

verificînd afirmația anterioară pentru $n = 1$, ceea ce este evident, apoi presupunînd proprietatea adevărată pentru $\frac{n-1}{2}$ vectori.

Și tot prin inducție se poate arăta că un cub poate fi umplut cu n cuburi pentru orice n superior (strict) lui 58.

În multe cazuri se poate folosi, pentru rezolvarea unei probleme, și principiul reducerii la absurd, de altfel foarte eficace.

Demonstrațiile areolare au avantajul de a reduce la maximum folosirea formulelor. Un exemplu simplu ne este la îndemînă:

V.9.2. *Exemplu.* Să arătăm că suma distanțelor unui punct interior la laturile unui triunghi echilateral este constantă.

Fie pentru aceasta un triunghi ABC și x, y, z distanțele unui punct M interior la laturile triunghiului. Evident (vezi fig. V.9.2):

$$(MAB) + (MBC) + (MCA) = (ABC)$$

unde prin (XYZ) am notat aria triunghiului XYZ. Exprimînd aceste arii care intervin în formula de mai sus, găsim:

$$x + y + z = \frac{2S}{a} = \text{constant}$$

unde S reprezintă aria triunghiului ABC iar a oricare din laturile sale.

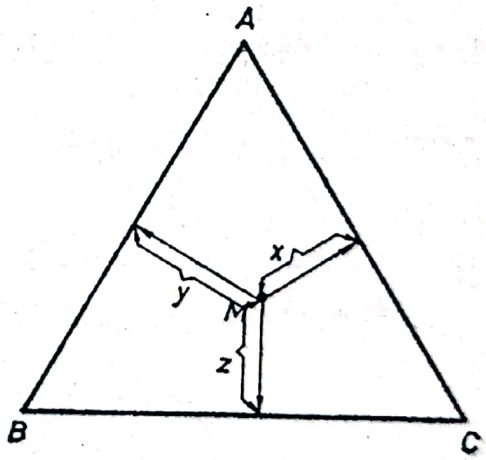


Fig. V.9.2

O asemenea demonstrație va căpăta și relația lui *van Aubel*, propusă spre rezolvare.

Ne oprim cu aceste succinte considerații despre metodele de rezolvare ale problemelor de geometrie cu calculul vectorial.

Acesta folosește în mod deosebit geometriei analitice însă vom considera și aici încă un exemplu.

Scanned with OKEN Scanner

V.9.3. *Exemplu.* Să stabilim locul geometric al punctelor M din spațiu pentru care expresia:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2$$

este constantă, punctele A, B, C fiind vîrfurile unui triunghi.

Să notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ABC. Atunci:

$$3\overline{MG} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}.$$

Înmulțind scalar ambii membri ai acestei egalități cu ea însăși obținem:

$$9MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overline{MA} \cdot \overline{MB} + \\ + 2\overline{MA} \cdot \overline{MC} + 2\overline{MB} \cdot \overline{MC}$$

de unde:

$$9MG^2 = 2(MA^2 + MB^2 + MC^2) - (AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

De aici deducem că MG este constant deci locul geometric este o sferă cu centrul G și rază MG.

Altfel, folosim formula ce dă lungimea medianei într-un tetraedru $MABC$:

$$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA)^2$$

și ajungem la aceeași concluzie.

Alte aplicații vor fi propuse pentru rezolvare.

PROBLEME REZOLVATE

V.R.1. *Teorema Dimitrie Pompei.* Fie ABC un triunghi echilateral și M un punct în planul acestui triunghi. Să se arate că, respectiv, cu lungimile segmentelor MA, MB, MC se poate construi un nou triunghi.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Rotind triunghiul ABC din figura V.R.1 în jurul vîrfului C ($=60°$), vîrful B ajunge în A, iar A în A', iar M în M' (se vede că este vorba de transformarea geometrică introdusă în V.1.2). Cum prin rotație se păstrează distanțele rezultă:

$$BM = AM';\quad MC = M'C;$$

cum $\sphericalangle MCM' = 60°$ rezultă și $MM' = M'C$ (pentru că triunghiul $MC'M$ este echilateral). Rezultă de aici triunghiul AMM' cerut.

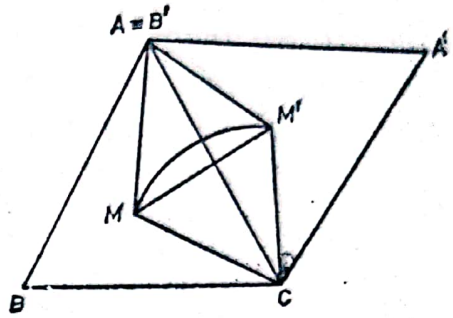


Fig. V.R.1

V.R.2. Să se arate că produsul a două rotații de centre diferite este o rotație.

Soluție. Fie R_1, R_2 două rotații de centre diferite O_1, O_2 și unghiuri α_1 și α_2. Putem descompune rotația R_1 în două simetrii, una din axe fiind O_1O_2 iar a doua, să o numim v_1, determinată.

Analog pentru rotația a doua, axele fiind O_1O_2 și v_2. Notînd cu M, M_1, M_2 simetriile în raport cu axele O_1O_2, v_1, v_2 și considerînd rotațiile cu același sens, obținem că:

$$R_1 = M_1M,\ R_2 = MM_2,\ R_1R_2 = M_1MMM_2 = \\ = M_1M_2 = R,$$

(M_1M însemnînd produsul simetriilor M_1, M) R fiind o rotație de centru O, intersecția dreptelor v_1, v_2.

Unghiul rotației produs este $\alpha_1 + \alpha_2$ deoarece:

$$\sphericalangle(v_1, O_1O_2) = \frac{1}{2}\alpha_1,\quad \sphericalangle(O_1O_2, v_2) = \frac{1}{2}\alpha_2,\quad (v_1, v_2) = \frac{1}{2}$$

V.R.3. Se consideră o prismă dreaptă, avînd ca baze romburi cu unghiul ascuțit α. Cum trebuie secționată această prismă pentru a obține ca secțiune un pătrat cu un vîrf într-un vîrf al prismei și vîrfurile celelalte situate pe muchiile laterale ale prismei?

Soluție. Fie prisma $ABCDA'B'C'D'$ cu bazele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ romburi cu unghiul ascuțit α și $AC \perp BD$.

Scanned with OKEN Scanner

Secțiunea $BMNP$ trebuie să fie un pătrat. Aceasta înseamnă că:

$$MP \perp NB,\ MP = NB,\ MN = NP = PB = BM.$$

Fie I mijlocul fiecărei diagonale.

Dacă $BM = BP$ înseamnă că $CM = AP$ și diagonala MP este paralelă cu CA. Așadar, planul de secțiune este paralel cu diagonala mare a bazei care reprezintă și diagonala secțiunii.

Punctul N este astfel ales încît $BN = MP = AC$.

Considerînd triunghiul dreptunghic NDB, se determină unghiul NBD (unghiul pe care îl face planul de secțiune cu planul bazei). Fie acest unghi u.

Însemnăm prin l latura rombului. Folosind teorema cosinusului, obținem:

$$AC^2 = 2l^2 + 2l^2 \cos\alpha = 4l^2 \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

deci $D_r = 2l\cos\frac{\alpha}{2}$ și:

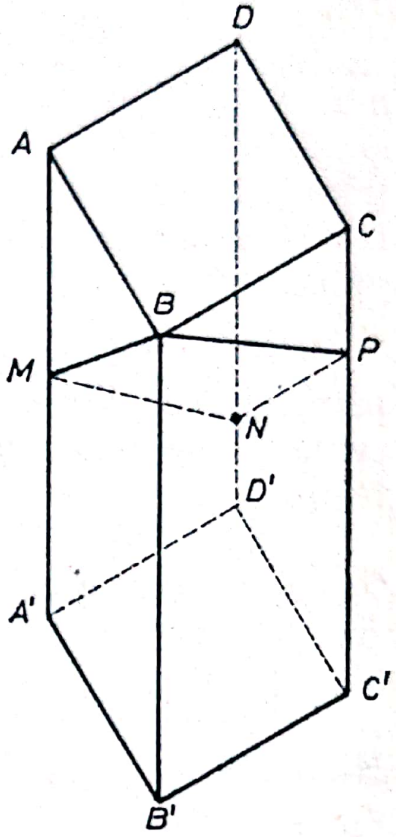


Fig. V.R.3

$$DB^2 = 2l^2 - 2l^2\cos\alpha = 4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

deci $d_r = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$, D_r și d_r fiind diagonalele rombului.

În triunghiul dreptunghic NDB cu $\sphericalangle NBD = u$, scriem:

$$\cos u = \frac{DB}{NB} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Așadar, prisma trebuie secționată printr-un plan paralel cu diagonala mare a unei baze și face cu această bază unghiul u dat de relația:

$$\cos u = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observații.

1°). S-a considerat planul care trece prin extremitatea B a muchiei BB'. Se pot duce și alte plane paralele cu acest plan cu condiția să taie muchia DD'. Aceasta înseamnă că planul de secțiune poate să treacă prin orice punct Q situat pe segmentul $BT = ND' = m - d_r \operatorname{tg} u$ unde m este lungimea muchiei laterale a prismei, d_r diagonala mică a bazei iar u este unghiul pe care-l face planul de secțiune cu planul bazei ($T \in BB'$).

Făcînd calculele necesare se obține:

$$BT = m - 2l\sqrt{\cos\alpha}.$$

2°). Problema este posibilă dacă $m \geqslant 2l\sqrt{\cos\alpha}$.

Dacă $m = 2l\sqrt{\cos\alpha}$, problema admite o singură soluție și anume secțiunea determinată de planul care trece prin B, D' și este paralel cu diagonala mare a bazelor.

Dacă $m < 2l\sqrt{\cos\alpha}$, problema nu are soluție.

3°). Dacă planul de secțiune ar trece prin vîrful A și paralel cu diagonala mică a bazei, nu se poate obține un pătrat, ci doar un patrulater ortodiagonal.

4°). Proiectînd secțiunea pe planul bazei se obține baza prismei. Dacă u este unghiul pe care-l face planul de secțiune cu planul bazei, înseamnă că:

$$\text{aria bazei} = \text{aria secțiunii} \cdot \cos u.$$

Dar:

$$\text{aria bazei} = \frac{D_r \cdot d_r}{2},$$

$$\text{aria secțiunii} = \frac{D_r^2}{2}.$$

Deci:

$$\cos u = \frac{D_r \cdot d_r}{D_r^2} = \frac{d_r}{D_r} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

și regăsim un rezultat anterior.

V.R.4. Se să arate că două drepte paralele se transformă printr-o inversiune de același modul și același centru (care nu se află pe nici una din drepte) în cercuri tangente.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Faptul este evident, avînd în vedere că fiecare dreaptă se transformă într-un cerc ce trece prin centrul de inversiune.

V.R.5. Se dă un tetraedru ale cărui muchii au lungimea comună a. Să se găsească, în funcție de a, raza sferei înscrise.

Soluție. Fie triunghiul ABC baza tetraedrului în care se duc înălțimile AD și CH care se intersectează în E. Înălțimea tetraedrului este SE, S fiind al patrulea vîrf al tetraedrului. Înălțimea tetraedrului corespunzătoare feței SBC este AF, perpendiculară pe SD iar punctul de concurență dintre AF și SE, care este punctul O, este la egală distanță de fețele tetraedrului. Deci O este centrul sferei înscrise. Fie R raza acestei sfere.

Din triunghiul ABD, dreptunghic în D, se deduce:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - a^2/4 = 3a^2/4.$$

Pentru că înălțimile într-un triunghi echilateral se intersectează la 2/3 de vîrf, adică:

$$AE = 2AD/3$$

rezultă:

$$AE^2 = 4AD^2/9 = a^2/3$$

și:

$$SE^2 = SA^2 - AE^2 = a^2 - a^2/3 = 2a^2/3$$

adică $SE = a\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ etc.

Nu mai continuăm calculele, ele fiind în mod natural impuse de ideea soluției. Vrem doar să amintim că, în imensitatea de informație pe care o înglobează acest fecund capitol al matematicii, geometria, calculele își găsesc rostul în condițiile naturale pe care le ridică, în viața de zi cu zi, problemele de natură tehnică. Mulți dintre cititorii acestei lucrări vor avea, după absolvirea studiilor medii și a celor superioare (ne referim îndeosebi la cei care se orientează spre instituțiile de învățămînt superior ori postliceal tehnic), imperioasă nevoie de complicatele formule ale geometriei — pentru calculul rezistențelor, al ariilor

Scanned with OKEN Scanner

diferitelor suprafețe, pentru rezolvarea a diferite probleme de mecanică etc. — alături de cunoștințele solide pe care le capătă continuu datorită cursurilor de perfecționare.

V.R.6. Să se arate că o secantă mobilă dusă printr-un punct M și care taie un cerc în punctele P și Q determină pe acesta segmente al căror produs este constant (constanta este numită, de obicei, și *puterea punctului* M față de cercul considerat).

Soluție. Considerăm un cerc c și un punct M. Ducem două secante prin M care taie cercul în punctele P, Q respectiv P', Q'. Deoarece patrulaterul $PQQ'P'$ este inscriptibil, rezultă că:

$$\sphericalangle MP'P = \sphericalangle MQQ'$$

deci triunghiurile MPP', MQQ' sînt asemenea deci:

$$\frac{MP}{MQ'} = \frac{MP'}{MQ}$$

adică $MP \cdot MQ = MP' \cdot MQ'$ ceea ce dovedește afirmația.

TESTE

V.T.1. Se consideră triunghiul echilateral și exagonul regulat înscris în cercul de rază R.

Să se precizeze particularitatea triunghiului care are ca laturi diametrul cercului, latura triunghiului echilateral și latura exagonului.

a°). oarecare; b°). isoscel; c°). dreptunghic.

V.T.2. Ce particularitate prezintă triunghiul cu laturile formate din diametrul unui cerc, latura exagonului, apotema triunghiului echilateral înscrise în cercul considerat?

a°). este echilateral; b°). este dreptunghic, c°). este isoscel.

Scanned with OKEN Scanner

V.T.3. Ce particularitate prezintă triunghiul înscris într-un cerc dacă centrul cercului se găsește pe una din laturi?

a°). este isoscel; b°). este echilateral; c°). este dreptunghic.

V.T.4. Un triunghi împarte planul în care se află, în două regiuni: regiunea interioară și regiunea exterioară. Ce particularitate are triunghiul dacă centrul cercului circumscris triunghiului este în regiunea exterioară?

a°). este dreptunghic; b°). este ascuțitunghic; c°). este obtuzunghic.

V.T.5. Mediana unui triunghi oarecare împarte triunghiul în două părți care sînt:

a°). egale; b°). neegale; c°). echivalente.

V.T.6. Dreapta AM taie triunghiul $ABC (M \in BC)$ în două părți. Se știe că $BM = p$; $MC = q$.

Care din afirmațiile:

a°). $\frac{S_{AMC}}{S_{ABM}} < 1$; b°). $\frac{S_{AMC}}{S_{ABM}} > 1$;

c°). $\frac{S_{ABC}}{S_{MAC} - S_{ABC}} < 1$,

sînt adevărate știind că $p < q$?

V.T.7. Laturile unui triunghi se reprezintă prin numerele:

$$a + 8,\ a + 7,\ a,\ (a > 0).$$

Să se precizeze valoarea lui a pentru care triunghiul este dreptunghic:

a°). 5; b°). 6; c°). 7.

V.T.8. Un triunghi are aria S. Se unesc mijloacele laturilor și se obține un nou triunghi, numit *triunghiul median*. Să se precizeze dacă aria triunghiului median S_m este:

a°). $S_m > \frac{1}{2} S$; b°). $S_m < \frac{1}{4} S$; c°). $S_m = \frac{1}{4} S$.

Scanned with OKEN Scanner

V.T.9. Două cercuri de raze diferite se taie în punctele A și B. Perpendiculara în B pe AB taie cercurile în P și Q. Se cere să se precizeze dacă:

a°). AP este diametru; b°). AQ este diametru.

V.T.10. Se consideră un triunghi echilateral cu latura l. Cu centrul în fiecare vîrf al triunghiului se descrie un arc de cerc de rază $l/2$ și se obține în interiorul triunghiului echilateral dat un triunghi *curbiliniu*.

Să se precizeze dacă perimetrul p al acestui triunghi este:

$$\text{a°). } p < \frac{3l}{2}; \quad \text{b°). } p = \frac{3l}{2}; \quad \text{c°). } p = 2l; \quad \text{d°). } p = \pi\frac{l}{2}.$$

V.T.11. O piramidă patrulateră regulată are aria bazei egală cu $4a^2$ și volumul egal cu $\frac{4}{3}\,a^3$.

Să se precizeze dacă apotema A a piramidei este:

a°). $A > 3a$; b°). $A = a\sqrt{2}$; c°). $A < a\sqrt{2}$.

V.T.12. Un triunghi ABC se rotește în jurul laturii $BC = a$. Să se precizeze dacă volumul corpului obținut poate fi calculat după formula:

$$\text{a°). } V = \frac{4\pi S^2}{3a}; \quad \text{b°). } V = \frac{\pi h^2 \cdot a}{3},$$

unde S este aria triunghiului iar h este înălțimea corespunzătoare laturii BC, în jurul căreia se rotește triunghiul.

V.T.13. O piramidă se secționează cu $n + 1$ plane paralele cu baza sa, planele fiind echidistante; ultimul plan trece prin baza piramidei iar primul plan trece prin vîrful piramidei. Se numerotează ariile secțiunilor: S_0 — cea determinată de planul care trece prin vîrful piramidei, S_1 cea determinată de al doilea plan etc., apoi S_n secțiunea egală cu baza piramidei.

Scanned with OKEN Scanner

Se cere să se precizeze dacă:

a°). $S_1 = S_2 = \ldots = S_{n-1}$; b°). $S_k = \frac{k^2}{n^2} \cdot S_n$;

c°). $S_{k+1} - S_k = \frac{2k+1}{n^2} \cdot S_n$. Aici $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

V.T.14. Mărimile a, b, c, pozitive și diferite de 1, reprezintă muchiile unui paralelipiped. Să se precizeze care dintre expresiile:

a°). $E = a^2b + b^2c + c^2a + abc$; b°). $E = \frac{a^3b}{c} - abc$,

poate fi volumul paralelipipedului considerat.

V.T.15. Dacă a, b, c, reprezintă laturile unui triunghi și $a^2 > b^2 + c^2$, triunghiul este:

a°). dreptunghic; b°). ascuțitunghic; c°). obtuzunghic.

RĂSPUNSURI

V.T.1. c°).

V.T.2. triunghiul nu există.

V.T.3. c°) dar și a°), triunghiul fiind dreptunghic isoscel.

V.T.4. c°).

V.T.5. c°).

V.T.6. b°).

V.T.7. a°).

V.T.8. c°).

V.T.9. a°) și b°).

V.T.10. d°).

V.T.11. b°).

V.T.12. a°) și b°).

V.T.13. b°) și c°).

V.T.14. b°), caz în care $a = c\sqrt{2}$.

V.T.15. c°).

Scanned with OKEN Scanner

V.P.1. Să se construiască bisectoarea unui unghi.

V.P.2. Să se construiască perpendiculara în extremitatea unui segment, fără a prelungi segmentul.

V.P.3. Să se determine punctele care împart un segment într-un raport $r = \frac{a}{b}$.

V.P.4. Să se determine punctele din plan pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe este constant și egal cu $\frac{p}{q}$.

V.P.5. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd unghiurile B și C și perimetrul său.

V.P.6. Să se construiască triunghiul ABC cunoscînd două laturi și unghiul opus uneia din laturile cunoscute.

V.P.7. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd o latură, mediana și înălțimea relative la latura cunoscută.

V.P.8. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd o latură și înălțimile corespunzătoare celorlalte două laturi.

V.P.9. Să se construiască triunghiul ABC cunoscînd o latură, unghiul opus acestei laturi și mediana relativă la latura cunoscută.

V.P.10. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd o latură, unghiul opus și suma celorlalte două laturi.

V.P.11. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd o latură, unghiul opus și diferența celorlalte două laturi.

V.P.12. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd o latură, un unghi alăturat și raza cercului înscris în triunghi.

Scanned with OKEN Scanner

V.P.13. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd o latură, unghiul opus ei și raza cercului înscris.

V.P.14. Se consideră un triunghi ABC. Se cere să se cerceteze în ce condiții cercurile care trec prin A și B respectiv B și C pot fi tangente între ele și tangente laturii AC.

V.P.15. Considerînd segmentele a și b, să se determine pe cale grafică segmentele a căror lungime sînt media aritmetică respectiv media geometrică respectiv media armonică a acestor lungimi.

V.P.16. Considerînd un segment t de lungime 1, să se determine un alt segment b de lungime π.

V.P.17. Să se determine pe cale grafică două segmente x și y ale căror lungimi (pe care le notăm tot cu x și y) satisfac condițiile:

$$x + y = s, \quad xy = p^2,$$

unde s și p sînt lungimi ale unor segmente date.

V.P.18. Să se rezolve pe cale grafică sistemul:

$$\begin{aligned} x - y &= d \\ xy &= p^2. \end{aligned}$$

V.P.19. Să se împartă un segment $AB = a$ în două segmente AM, MB astfel încît între lungimile acestora să existe relația:

$$AB^2 = AM \cdot MB.$$

V.P.20. Să se stabilească o modalitate de determinare a segmentelor de lungime $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, ...

V.P.21. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic, mediana și înălțimea relative la ipotenuză, formează un unghi egal cu diferența unghiurilor ascuțite ale triunghiului.

V.P.22. Într-un triunghi dreptunghic, bisectoarea unghiului drept este în același timp bisectoare a unghiului format de mediana și înălțimea relative la ipotenuza triunghiului considerat.

Scanned with OKEN Scanner

V.P.23. Un triunghi este isoscel dacă are două mediane egale?

V.P.24. Un triunghi este isoscel dacă are două bisectoare interioare egale?

V.P.25. Un triunghi, fără a fi isoscel, poate avea două bisectoare exterioare egale?

V.P.26. Într-un triunghi isoscel se construiesc medianele corespunzătoare laturilor egale. Să se arate că orice paralelă la baza triunghiului și care intersectează cele două mediane, este împărțită în trei segmente, două fiind egale între ele. În ce caz cele trei segmente sînt egale între ele?

V.P.27. Printr-un punct oarecare al bazei unui triunghi isoscel se duc paralele la laturile egale ale triunghiului considerat. Să se arate că perimetrul patrulaterului format nu depinde de poziția punctului considerat pe bază.

V.P.28. Să se arate că suma distanțelor oricărui punct al bazei unui triunghi isoscel la laturile egale ale triunghiului este constantă.

V.P.29. Se consideră dreptele paralele (d_1) și (d_2). Din punctul A situat pe (d_1) se consideră oblica AB și perpendiculara AC față de (d_2). Prin B se duce secanta BED (E situat pe AC și D situat pe (d_1)).
Să se compare unghiul EBC cu unghiul ABE. Se poate deduce de aici un procedeu pentru împărțirea unui unghi în trei părți egale?

V.P.30. Să se arate că diagonalele a două paralelograme înscrise unul într-altul trec prin același punct.

V.P.31. Se consideră pătratul $ABCD$ și fie punctele $E \in AB$, $H \in AD$, $F \in CB$ și $G \in CD$. Să se arate că dacă $AE = AH = CF = CG$, patrulaterul $EFGH$ este un dreptunghi.

V.P.32. Se consideră un dreptunghi $ABCD$. Perpendicularele construite pe diagonale în vîrfurile dreptunghiului se intersectează cîte două.

Scanned with OKEN Scanner

Ce particularitate prezintă patrulaterul astfel obținut?

V.P.33. Bisectoarele interioare ale unui paralelogram se taie două cîte două determinînd vîrfurile unui patrulater. Ce particularitate prezintă acest patrulater?

V.P.34. Bisectoarele interioare ale unui dreptunghi se taie două cîte două determinînd vîrfurile unui patrulater. Ce particularitate prezintă acest patrulater astfel obținut?

V.P.35[1]. Reciproca teoremei lui *Menelau* este adevărată?

V.P.36[1]. Să se afle locul geometric al punctelor din care două cercuri se văd sub același unghi.

V.P.37[1]. Să se construiască un triunghi cunoscînd simetricele ortocentrului față de laturile triunghiului.

V.P.38[1]. Să se determine locul geometric al punctelor care au diferența pătratelor distanțelor lor la două puncte constantă (în spațiu).

V.P.39[1]. Să se arate că polarele punctelor coliniare sînt drepte concurente.

V.P.40[1]. Reciproca teoremei lui *Ceva* este adevărată?

V.P.41[1]. Să se găsească triunghiul de perimetru minim înscris într-un triunghi ascuțitunghic.

V.P.42[1]. *Teorema Gergonne.* Dreptele care unesc vîrfurile unui triunghi cu contactele cercului înscris pe laturile opuse sînt concurente.

V.P.43[1]. Se consideră în spațiu trei puncte necoliniare, A, B, C. Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care expresia:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2$$

este constantă.

V.P.44[1]. Să se arate că izotomicele picioarelor a trei ceviene concurente sînt picioare de ceviene concurente.

Scanned with OKEN Scanner

V.P.45[1]. *Teorema Nagel.* Dreptele care unesc vîrfurile unui triunghi cu contactele cercurilor exînscrise pe laturile opuse corespunzătoare sînt concurente.

V.P.46[1]. Se dă un cub de muchie 1. Să se arate că există pe suprafața S a cubului un punct N_1 care să poată fi unit cu orice alt punct al suprafeței S printr-o linie frîntă de lungime mai mică decît 2, situată în întregime pe suprafața cubului.

V.P.47[2]. *Teorema Simson.* Dacă M este un punct situat pe cercul circumscris triunghiului ABC, atunci proiecțiile punctului M pe laturi sînt coliniare. Reciproca este adevărată?

V.P.48[2]. *Relația Steiner.* Dacă două ceviene izogonale din vîrful A taie latura BC în M și N atunci:

$$\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

V.P.49[2]. Dacă o muchie și numai una a unui tetraedru are lungimea mai mare ca 1, să se demonstreze că volumul teatraedrului nu depășește 1/8.

V.P.50[2]. Se dau patru puncte în plan cu proprietatea că distanța dintre oricare două este cuprinsă între $\sqrt{2}$ și 2. Să se arate că punctele sînt conciclice.

V.P.51[2]. Dovediți că simedianele unui triunghi sînt concurente (punctul de concurență fiind punctul *Lemoine* al triunghiului).

V.P.52[2]. Se consideră punctele fixe A și B și numerele α, β, k $(k \neq 0)$ constante. Să se determine locul geometric al punctelor M pentru care:

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k^2$$

în ipoteza că $\alpha + \beta \neq 0$.

V.P.53[3]. Dovediți că punctele *Brocard* sînt *inverse* în sensul că cevienele lor sînt izogonale.

Scanned with OKEN Scanner

V.P.54[3]. *Teorema Desargues.* Dacă dreptele care unesc două cîte două vîrfurile a două triunghiuri sînt concurente atunci laturile lor corespunzătoare se taie în puncte coliniare.

V.P.55[3]. În triunghiul ABC, fie A_1, B_1, C_1 simetricele vîrfurilor A, B, C, în raport cu vîrfurile C, A, B. Tangentele duse în A, B, C respectiv cercurilor AB_1C, BC_1A, CA_1B sînt concurente în punctul *Lemoine.*

V.P.56[3]. *Teorema Pappus.* Dacă punctele A_1, B_1, C_1 divid laturile unui triunghi ABC în același raport și sens, triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$ au același centru de greutate.

V.P.57. Dacă A, B, C, D sînt patru puncte arbitrare atunci există relația lui *Euler*:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0$$

(ținînd seama de semnele segmentelor).

SOLUȚII

V.P.1. Considerăm unghiul xOy și punctele A, $B \in Ox$ și A', $B' \in Oy$ astfel încît $OA = OA'$ și $OB = OB'$. Unim A cu B' și A' cu B. Dreptele se taie în I. Dreapta AI este bisectoarea unghiului xOy. (fig. V.P.1)

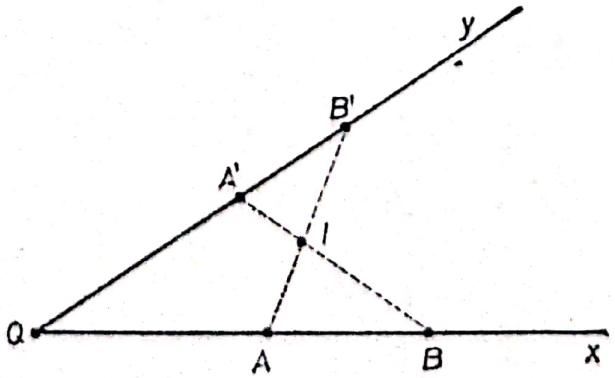


Fig. V.P.1

Scanned with OKEN Scanner

V.P.2. Se construiește cercul cu centrul în O care să treacă prin B și să taie segmentul AB în C, CD fiind diametru în cerc, dreapta BB' fiind perpendiculară pe AB.

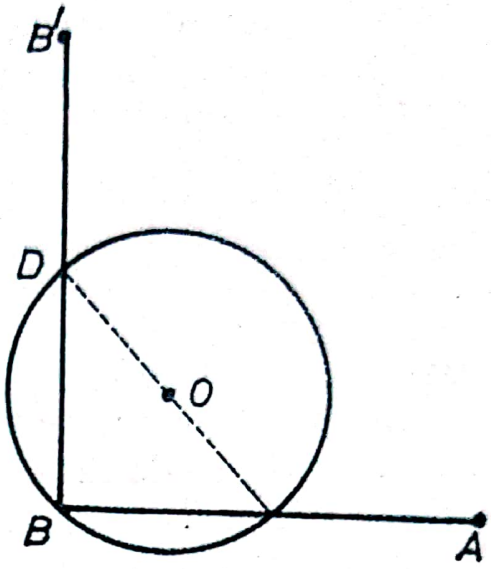


Fig. V.P.2

V.P.3. Se pot folosi cunoștințe legate de raportul anarmonic a patru puncte sau se poate relua o idee anterioară (V.5.1).

V.P.4. Fie A și B cele două puncte fixe și M un punct cu proprietatea cerută, arbitrar. Fie MX bisectoarea unghiului AMB ($X \in AB$). Aplicînd teorema bisectoarei, obținem că $\frac{AX}{BX} = \frac{p}{q}$ deci segmentul AX este constant, oricare ar fi M cu proprietatea din enunț. Concluzia este imediată și o lăsăm pe seama cititorului.

V.P.5. Presupunem problema rezolvată și fie $CC' = CA$ și $BB' = BA$ unde C', $B' \in BC$. Triunghiul $AB'C'$ are latura $B'C'$ egală cu perimetrul triunghiului ABC iar unghiul B' este jumătate din unghiul B al triunghiului ABC. Aceeași observație și pentru C' ne permite să dăm și construcția: se construiește triunghiul $AB'C'$ care are o latură și două unghiuri cunoscute, mediatoarele laturilor AC' și AB' furnizînd vîrfurile B și C ale triunghiului cerut.

V.P.6. Fie, pentru comoditate, $A < 90°$ unghiul dat și a, b cele două laturi cunoscute. Cu elementele A și b se poate construi triunghiul dreptunghic $AC'C$ ($\hat{C} = 90°$). Se pot ivi situațiile:

1°). $a < CC'$ caz în care arcul de cerc de rază a cu centrul în C nu taie latura AC',

2°). $a = CC'$ caz în care arcul de cerc considerat anterior este tangent în C' la dreapta AC',

3°). $CC' < a < b$ și arcul de cerc taie dreapta AC' în două puncte B_1 și B_2,

Scanned with OKEN Scanner

4°). $a = b$ și arcul de cerc taie dreapta AC' în K și A,

5°). $a > b$ și arcul de cerc taie dreapta AC' în D și E.

În cazul 1°) problema este imposibilă.

În cazul 2°) triunghiul este dreptunghic.

În cazul 3°) se obțin două soluții, anume triunghiul AB_1C și triunghiul AB_2C,

În cazul 4°) triunghiul este isoscel.

În cazul 5°) se obține o singură soluție deoarece, în acest caz, A se găsește între D și E.

V.P.7. Fie $BC = a$, m_a și h_a elementele cunoscute. Cu elementele a și h_a se poate construi o infinitate de triunghiuri, vîrful A fiind situat pe paralela Δ la BC, la distanța egală cu h_a sau pe dreapta Δ' la aceeași distanță (Δ' fiind simetrica lui Δ față de BC).

Cu elementele a și m_a se poate construi tot o infinitate de triunghiuri ale căror vîrfuri A se găsesc pe cercul Γ cu centrul în mijlocul segmentului BC și de rază m_a. Dacă cele două infinități au elemente comune, problema este posibilă și anume:

a°). Dacă dreptele Δ și Δ' taie cercul Γ în cîte două puncte, se pot construi patru triunghiuri, două cîte două invers egale (se pot deduce unele din altele printr-o rotație),

b°). Dacă dreptele Δ și Δ' sînt tangente la cercul Γ, se obțin două triunghiuri,

c°). Dacă dreptele Δ și Δ' nu intersectează cercul Γ în nici un punct, nu se poate construi nici un triunghi cu elementele date.

V.P.8. Fie $BC = a$, $BB' = h_b$, $CC' = h_c$ elementele cunoscute. Se construiește cercul de diametru BC și se consideră coardele $BB' = h_b$ și $CC' = h_c$. Dreptele BC' și CB' se intersectează în A. Triunghiul ABC este triunghiul cerut.

Situații posibile:

1°). Coardele BB' și CC' se taie în H, punct interior cercului. Triunghiul obținut este ascuțitunghic.

2°). Coardele BB' și CC' se taie în punctul H situat pe cerc. Triunghiul obținut este dreptunghic.

Scanned with OKEN Scanner

3°). Coardele BB' și CC' se taie în punctul H situat în exteriorul cercului. Triunghiul ABC este obtuzunghic.

V.P.9. Fie a, A și m_a elementele cunoscute.

Cu elementele a și A se poate construi o dublă infinitate de triunghiuri ABC, vîrful A fiind situat pe arcul capabil de unghiul A și de segmentul $BC = a$, arc pe care îl numim Γ_1. Cu elementele a și m_a se poate construi o infinitate de triunghiuri care au vîrful A pe cercul de diametru BC și de rază m_a, fie acesta Γ_2. Dacă Γ_1 și Γ_2 au puncte comune se obțin atîtea triunghiuri egale cu triunghiul ABC cîte puncte comune rezultă din intersecția lui Γ_1 cu Γ_2.

V.P.10. Fie a, A și $b + c = s$ elementele cunoscute. Presupunem problema rezolvată și cercetăm dacă există posibilitatea construirii unui nou triunghi CSB care să aibă drept laturi pe a și s.

Triunghiul CSB are elementele $BC = a$, $SB = c + b = s$ și $\hat{S} = \frac{1}{2}\hat{A}$.

Ca atare, problema se reduce la construirea unui triunghi în cazul în care se cunosc două laturi și unghiul opus uneia din laturi (vezi V.P.6). Mediatoarea AU a laturii SC intersectează latura SB în A, vîrful triunghiului ABC. În adevăr, $\sphericalangle ACS = \sphericalangle ASC$ deoarece mediatoarea lui SC este în triunghiul ASC și înălțime și bisectoare și încă $\sphericalangle UAC + \sphericalangle SAU + \sphericalangle ASU + \sphericalangle ACU = 180°$, $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAU + \sphericalangle UAS = 180°$ și de aici $\hat{A} = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACU + \hat{S} = 2\hat{S}$.

Observație. Vîrful S se găsește pe arcul capabil de segmentul $a = BC$ și de un unghi egal cu $\frac{1}{2}\hat{A}$.

V.P.11. Ne putem prevala de un raționament analog ca în soluția precedentă. Se pot folosi și transformările geometrice, prezentate în partea teoretică a acestui capitol.

Scanned with OKEN Scanner

V.P.12. Fie a, B și r elementele cunoscute. Cu elementele $\frac{1}{2}\hat{B}$ și r se construiește triunghiul dreptunghic BIA' (vezi fig. V.P.12). I va fi centrul cercului înscris iar $IA' = r$. Unim I cu C unde $BC = a$. Se construiesc apoi dreptele BC' și CB' (în figură, C' reprezintă intersecția dreptei AB cu cercul și analog, B' este intersecția lui AC cu cercul) astfel încît IB și IC să fie bisectoare ale unghiurilor formate. Punctul A de intersecție al dreptelor BC' și CB' este al treilea vîrf a triunghiului.

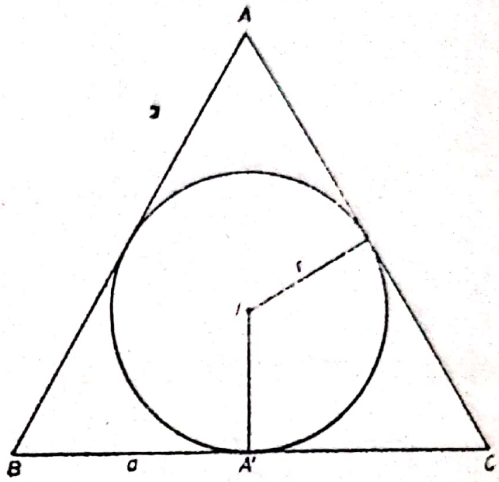


Fig. V.P.12

V.P.13. Fie a, A și r elementele date. Se poate demonstra că unghiul cu vîrful în centrul cercului înscris format de bisectoarele unghiurilor B și C este egal cu $90° + \frac{1}{2}\hat{A}$ și deci:

1°). Se construiește arcul capabil de segmentul a și unghiul $u = 90° + \frac{1}{2}\sphericalangle A$;

2°). La distanța r de BC se construiește paralela la BC care intersectează arcul capabil în I;

3°) Se construiesc dreptele BB' și CC' astfel încît BI să fie bisectoarea unghiului CBB', iar IC bisectoarea unghiului BCC'.

V.P.14. Presupunem că au fost construite cele două cercuri care sînt tangente exterior în B și tangente dreptei AC, unul în A iar celălalt în C. Fie $O_1N \perp AB$ și $O_2N' \perp BC$, O_1 și O_2 fiind centrele cercurilor considerate. Cum unghiurile AO_1B și BO_2C sînt suplementare înseamnă că triunghiurile O_1NB și $BN'O_2$ sînt asemenea iar unghiul ABC este un unghi drept. Astfel, construind tangenta comună în B la cele două cercuri,

Scanned with OKEN Scanner

aceasta taie pe AC în punctul O. Fie B' pe OB astfel încît $OB' = OB$, B' exterior triunghiului ABC. Patrulaterul $ABCB'$ nu poate fi decît un dreptunghi (are diagonalele egale și se taie în părți egale: $OB = OA = OC$ — tangente duse din același punct la două cercuri date).

Condiția arată că triunghiul ABC trebuie să fie dreptunghic.

V.P.15. Se construiește semicercul de diametru $AB = a + b$ ($AC = a$, $BC = b$) și perpendiculara în C pe AB care taie semicercul în D.

O fiind centrul semicercului, se obțin segmentele:

$$OD = \frac{a+b}{2} = m,$$

$$CD = \sqrt{ab} = g, \text{ etc.}$$

V.P.16. În cercul de rază $r = a$ se consideră latura triunghiului echilateral înscris și latura pătratului înscris, $l_3 = a\sqrt{3}$ și $l_4 = a\sqrt{2}$ și cum $\sqrt{3} + \sqrt{2} \approx$ $\approx 1{,}73 + 1{,}41 = 3{,}14$ se poate considera că $l_3 + l_4$ reprezintă un segment egal cu πa. Luăm apoi $a = 1$.

V.P.17. Se construiește tangenta în B la semicercul de diametru $AB = s$ și fie $BD = p$.

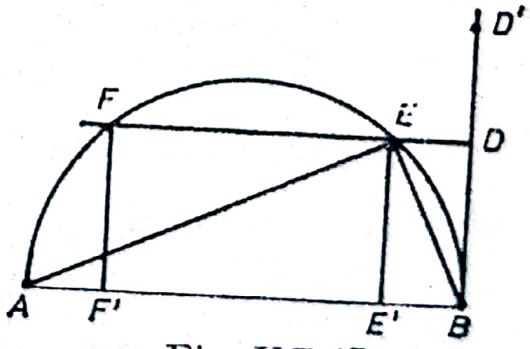


Fig. V.P.17

Paralela DEF la AB taie semicercul în E și F (vezi fig. V.P.17). Se obțin segmentele DE și DF. Se poate scrie $DE = x$, $DF = y$ sau $DE = y$ și $DF = x$, sistemul fiind simetric.

În adevăr, proiectînd E și F în E' și F' pe AB, este ușor de arătat că triunghiul AEB este dreptunghic în E iar $EE' = p$ și $AE' = DF = x$, $E'B = ED = y$.

Observație. Dacă paralela DEF devine tangentă la cerc în T, $DT = x = y$. Dacă paralela DEF este exterioară semicercului, sistemul:

$$x + y = s,$$
$$xy = p^2,$$

nu are soluții reale.

În același fel se poate rezolva pe cale grafică ecuația $x^2 - sx + p^2 = 0$, cunoscînd s și p.

V.P.18. Metoda este relativ aceeași ca în exercițiul precedent.

V.P.19. Se poate avea în vedere V.R.6 sau se poate stabili pe o axă de coordonate lungimile segmentelor. Notînd, de pildă, $AM = x$, se obține:

$$a^2 = x(a - x)$$

și deci problema se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul al II-lea.

V.P.20. Se consideră segmentul OA de măsură 1. Se construiește triunghiul dreptunghic isoscel OAA_2 și deci $OA_1 = \sqrt{2}$. În A_1, perpendicular pe OA_1 se construiește $A_1A_2 = 1$ și deci $OA_2 = \sqrt{3}$. În A_2 se construiește $A_2A_3 = 1$ perpendicular pe OA_2; $OA_3 = \sqrt{4} = 2$ și așa mai departe.

V.P.21. Se construiește cercul circumscris triunghiului ABC considerat ($\hat{A} = 90°$) și fie E simetricul lui A în raport cu BC și F punctul diametral opus lui A. O fiind centrul cercului, triunghiul EOA este isoscel iar unghiul EOF este diferența măsurilor arcelor EC și FC. Cum însă măsurile arcelor EC și AC sînt egale și analog pentru arcele FC și AB, rezultă, cum unghiurile B și C au ca măsură jumătate din arcul AC respectiv arcul AB, tocmai afirmația.

V.P.22. Mediana împarte triunghiul dreptunghic în două triunghiuri isoscele.

Scanned with OKEN Scanner

V.P.23. Din relația ce exprimă lungimea medianei în funcție de laturi, obținem că:

$$m_b^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2) - \frac{1}{4}b^2,$$
$$m_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2,$$

implică $b = c$ deci triunghiul este isoscel.

V.P.24. Se are în vedere relația bisectoarei.

V.P.25. Se construiește triunghiul ABC și fie BD bisectoarea exterioară a unghiului cu vîrful în B și CE bisectoarea exterioară a unghiului cu vîrful în C. Cele două bisectoare exterioare sînt concurente cu bisectoarea interioară a unghiului A. Se cercetează poziția bisectoarei unghiului A față de dreapta DE. Este posibil ca patrulaterul $BCDE$ să aibă diagonalele egale fără a fi un patrulater particular.

V.P.26. Se știe că înălțimea relativă la baza unui triunghi isoscel joacă rol și de mediană. Fie O punctul de intersecție al medianelor triunghiului isoscel ABC (BC jucînd rol de bază). Secanta taie în E și F medianele OB, OC și în M mediana vîrfului A. Segmentele EM, MF sînt egale. De asemenea, se știe că orice paralelă la baza unui triunghi isoscel determină un segment al cărui mijloc se găsește pe mediana relativă la bază etc..

V.P.27. Se formează un paralelogram și două triunghiuri isoscele (orice paralelă la una din laturile unui triunghi determină un nou triunghi asemenea celui dat). Suma lungimilor a două laturi consecutive ale paralelogramului este egală cu una din laturile egale ale triunghiului.

V.P.28. Unind vîrful A cu punctul M situat pe baza BC a triunghiului, se formează două triunghiuri. Suma ariilor celor două triunghiuri este egală cu aria triunghiului considerat. De aici se deduce că suma distanțelor la cele două laturi egale este egală cu înălțimea

Scanned with OKEN Scanner

relativă la una din laturile egale ale triunghiului considerat. Desigur că problema ce a fost prezentată în enunț pentru rezolvare nu este dificilă, ca de altfel toate celelalte propuse anterior. S-a urmărit numai o anumită acomodare cu conceptele geometrice — punctul, planul, dreapta etc. — urmînd ca în continuare să apelăm la aparatul mai sofisticat al geometriei, acela privitor la transformările geometrice.

V.P.29. Fie M mijlocul lui ED, ipotenuza triunghiului EAD. Triunghiul AMD este isoscel, baza fiind AD. Rezultă că $\sphericalangle AME = 2 \sphericalangle ADM = 2 \sphericalangle EBC$. Rezultă că $\sphericalangle ABE = 2 \sphericalangle EBC$.

V.P.30. Se arată că triunghiurile care se sprijină pe laturile opuse ale paralelogramului înscris sînt egale două cîte două. Diagonala paralelogramului înscris trece prin centrul paralelogramului circumscris întrucît determină segmente egale pe laturile opuse.

V.P.31. Se arată că triunghiurile dreptunghice care rezultă sînt egale două cîte două. Patrulaterul $EFGH$ este un dreptunghi deoarece fiind romb are un unghi drept ($\sphericalangle AEH + \sphericalangle BEF = 90°$).

V.P.32. Se ține seama de axele de simetrie ale dreptunghiului care devin diagonale în patrulaterul astfel format.

V.P.33. Unghiurile consecutive ale unui paralelogram sînt suplementare. Unghiul format de bisectoare este drept.

V.P.34. A se vedea problema precedentă. Dacă două unghiuri ale patrulaterului sînt pe laturile mari ale dreptunghiului atunci diagonalele patrulaterului sînt egale și reciproc perpendiculare. În acest caz patrulaterul obținut este un pătrat.

Scanned with OKEN Scanner

V.P.35. Vom relua cîteva considerații făcute la secțiunea afectată geometriei triunghiului.

Pentru aceasta vom demonstra teorema lui *Menelau*. Fie A_1, B_1, C_1 punctele de intersecție ale unei transversale d cu laturile unui triunghi ABC. Avem în acest caz figura V.P.35. Ducem paralela CC' din C la latura AB și fie C' intersecția ei cu transversala d.

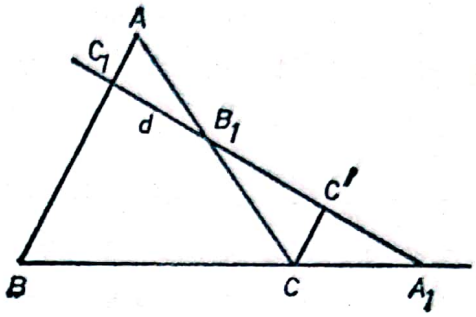


Fig. V.P.35

Din triunghiurile asemenea care s-au format deducem:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{C_1B}{CC'}$$

și:

$$\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{CC'}{C_1A}$$

și dacă notăm:

$$u = \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B}$$

rezultă din înmulțirea relațiilor precedente că $u = 1$ adică tocmai afirmația din teorema *Menelau*.

Expresia u nu este altceva decît expresia *Menelau* a triunghiului

Observăm că punctele A_1, B_1, C_1 sînt într-una din situațiile anterioare, adică din cele trei puncte două sînt în același timp pe laturi (sau ambele pe prelungiri). Fie B_1, C_1 aceste puncte. Atunci A_1 este luat exterior segmentului BC. Presupunem că are loc relația:

$$u = \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1.$$

Fie A' intersecția dreptei B_1C_1 cu latura BC. Conform teoremei *Menelau*, avem relația:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

deci:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A'B}{A'C}.$$

Punctele A_1, A' sînt amîndouă exterioare segmentului BC, pe care-l împart în același raport. Există însă un singur punct care divide exterior un segment dat într-un raport dat. Deci, $A_1 = A'$. Rezultă deci că punctele A_1, B_1, C_1, sînt coliniare. Avem astfel reciproca teoremei *Menelau*:
dacă trei puncte A_1, B_1, C_1 sînt situate pe laturile unui triunghi ABC — toate pe prelungiri sau pe două laturi și unul pe prelungirea celeilalte — astfel ca expresia *Menelau* să fie egală cu 1, atunci punctele A_1, B_1, C_1 sînt coliniare.

V.P.36[1]. Fie A și B centrele celor două cercuri iar a, b razele lor și, în fine, M un punct oarecare al locului geometric. Unghiul sub care se vede cercul cu centrul în A și de rază a din punctul M este unghiul tangentelor duse la cerc din acest punct sau dublul unghiului u al unei tangente cu dreapta MA. Evident:

$$\sin u = \frac{a}{MA}$$

și, avînd în vedere proprietatea locului geometric:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{a}{b},$$

adică cercul *Apoloniu* al centrelor A, B cu centrul pe AB, care taie linia centrelor în centrele de asemănare. În cazul cercurilor secante, punctele comune satisfac evident condiției. Cercul — loc geometric — face evident parte din fasciculul cercurilor date.

V.P.37[1]. Se are în vedere că simetricele ortocentrului față de laturi se află pe cercul circumscris triunghiului (vezi V.2.4.3).

Scanned with OKEN Scanner

V.P.38[1]. A se vedea V.3.1.3. Locul geometric este o dreaptă perpendiculară pe dreapta ce trece prin punctele date.

V.P.39[1]. Să considerăm, pentru demonstrație, polara punctului M în raport cu cercul c, ca în fig. V.P.39; fie, de asemenea, N un punct situat pe polara m a punctului M. Dreapta MN taie cercul în punctele P, Q și din definiția polarei ca loc geometric rezultă că N este conjugatul punctului M în raport cu P, Q deci, reciproc, M este conjugatul punctului N, ceea ce arată că polara punctului N trece prin M adică, în final, dacă N descrie o dreaptă m, polara n a punctului N se rotește în jurul polului dreptei m, o formă echivalentă a enunțului.

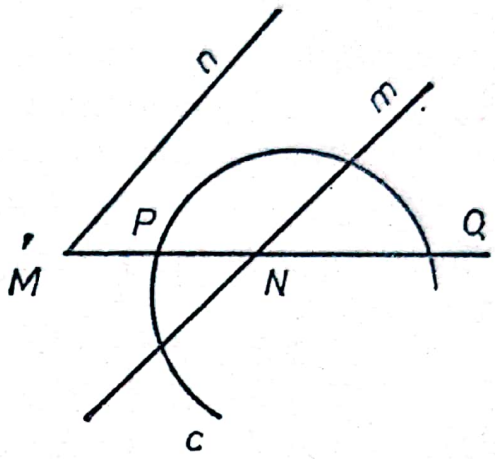


Fig. V.P.39

V.P.40[1]. Da. Considerăm un triunghi ABC și A_1, B_1, C_1 trei puncte, două în același timp pe laturile triunghiului sau două pe prelungirile acestora (în primul caz, al treilea punct este situat pe prelungirea unei laturi iar în al doilea, pe una din laturile triunghiului). Fie, pentru a clarifica lucrurile, B_1 și C_1 aceste puncte și A_1 luat exterior segmentului BC. Să presupunem, în plus, că are loc relația:

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1.$$

Să notăm prin M intersecția dreptelor BB_1, CC_1 și prin A' intersecția dreptei AM cu latura BC. Conform teoremei lui *Ceva*:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

deci:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A'B}{A'C},$$

de unde, avînd în vedere că punctele A_1, A' sînt amîndouă exterioare segmentului BC și îl împart în același raport, rezultă $A_1 = A'$ deoarece există un singur punct care divide interior un segment dat într-un raport dat. Rezultă de aici că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente deci de aici reciproca teoremei lui *Ceva*.

V.P.41[1]. Triunghiul de perimetru minim cu vîrfurile pe laturile unui triunghi dat este triunghiul ortic al acestuia.

Fie ABC un triunghi oarecare însă dat și $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$. Fie A_1', A_2' simetricele lui A' față de AB și AC. Rezultă $A_1'A_2' \leqslant A_1'C' + C'B' + B'A_2' = A'C' + C'B' + B'A'$ cu egalitate doar cînd $C' = AB \cap A_1'A_2'$ și $B' = AC \cap A_1'A_2'$.

Avem că $AA_1' = AA' = AA_2'$ și $\sphericalangle A_1'AA_2' = 2\sphericalangle A$ constant și deci $A_1'A_2'$ va fi minim cînd AA' este minim deci cînd $AA' \perp BC$ (cf. IV.11.2, $(A_1'A_2')^2 = 2A'A^2 - 2A'A^2 \cos 2A$).

Triunghiul cu perimetru minim va fi deci EFG cu $AE \perp BC$ și E_1, E_2, simetricele lui E față de AB și AC, coliniare cu G și F; se observă că acesta este unic din considerațiile precedente. Dar, analog, putem face aceeași construcție pornind de la latura AC sau AB în loc de BC. Rezultă $BF \perp AC$ și $CG \perp AB$.

V.P.42[1]. Să notăm cu D, E, F contactele cercului înscris triunghiului ABC cu laturile BC, CA, AB (vezi fig. V.P.42). Deoarece tangentele dintr-un punct duse la un cerc sînt egale, avem că:

$$AE = AF,\ BF = BD,\ CD = CE$$

și deci:

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1,$$

ceea ce dovedește, cf. V.P.40, că dreptele AD, BE, CF sînt concurente, punctul de concurență fiind punctul *Gergonne* al triunghiului.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în locul cercului înscris triunghiului considerăm cercurile exînscrise și bisectoarele exterioare, teorema rămîne valabilă, punctele de concurență fiind în acest caz *adjunctele* punctului *Gergonne*.

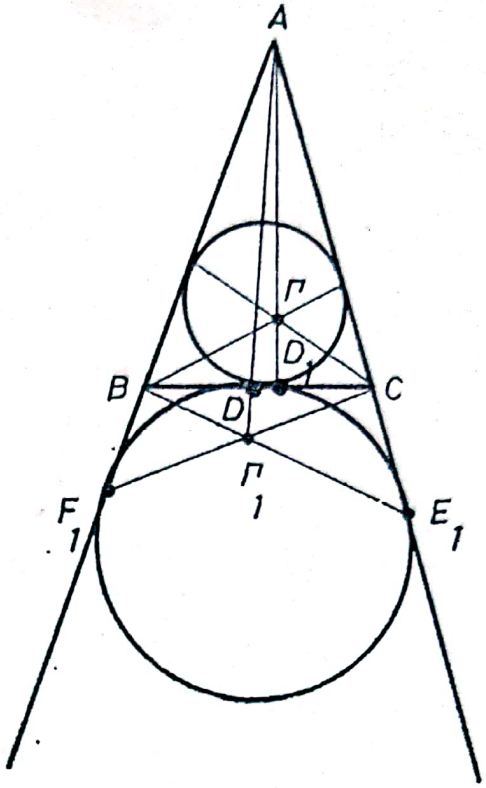


Fig. V.P.42

V.P.43[1]**.** Problema a fost soluționată în V.12.3.

V.P.44[1]**.** Faptul este evident, avînd în vedere reciproca teoremei lui *Ceva*. Legat de punctele izotomice, să observăm că unei drepte d care taie laturile unui triunghi în A_1, B_1, C_1 i se poate asocia o dreaptă d' care trece prin izotomicele acestor puncte, numită *reciproca* dreptei d. În cazul unor ceviene concurente în M avem de-a face cu *reciprocul* punctului M ca fiind punctul de intersecție al cevienelor corespunzătoare izotomicelor punctelor de contact ale cevienelor concurente în M, cu laturile triunghiului. În felul acesta, centrul de greutate al unui triunghi este propriul său reciproc (deoarece izotomicul centrului unei laturi este el însuși) și punctele *Gergonne* și *Nagel* sînt, de asemenea, reciproce după cum punctelor adjuncte ale punctului *Gergonne* le corespund trei puncte reciproce, adjunctele punctului *Nagel*.

V.P.45[1]**.** Fie D_1 punctul de contact al cercului exînscris relativ la vîrful A al triunghiului ABC pe latura BC. În mod analog obținem punctele D_2 și D_3 situate respectiv pe AC și AB. Nu ne rămîne altceva decît să arătăm că AD_1, BD_2 și CD_3 sînt concurente care nu este greu de dovedit, prevalîndu-ne de un raționament analog celui din soluția problemei V.P.42.

Scanned with OKEN Scanner

V.P.46[1]**.** Se desfășoară cubul.

V.P.47[2]**.** Să considerăm un punct M în planul triunghiului ABC și $A_1B_1C_1$ triunghiul podar corespunzător lui M, respectiv a, b, c unghiurile sub care vedem laturile triunghiului din punctul M. Este clar că $a = \sphericalangle BMC$, $b = \sphericalangle CMA$, $c = \sphericalangle AMB$ și din patrulaterele inscriptibile formate avem imediat:

$$\sphericalangle BMA_1 = \sphericalangle BC_1A_1,\ \sphericalangle A_1MC = \sphericalangle A_1B_1C_1$$

astfel că, adunînd membru cu membru egalitățile de unghiuri de mai sus, găsim $a = \sphericalangle A + \sphericalangle C_1A_1B_1$. Relații analoage ne dau $b = \sphericalangle B + \sphericalangle C_1B_1A_1$, $c = \sphericalangle C + \sphericalangle A_1C_1B_1$ astfel că dacă M este situat pe cercul circumscris triunghiului ABC, avem că $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BAC$ adică $a = \sphericalangle A$ deci $\sphericalangle C_1A_1B_1 = 0$ astfel că punctele A_1, B_1, C_1 sînt coliniare adică tocmai teorema *Simson*.

Reciproca este și ea adevărată deoarece dacă $\sphericalangle C_1A_1B_1 = 0$ atunci $a = \sphericalangle A$ adică $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BMC$.

V.P.48[2]**.** Fie ABC un triunghi și M, N două puncte pe BC, determinate de două ceviene izogonale din A. Paralela din B la AC taie pe AM în P și paralela din C la AB taie pe AN în Q. Din perechile de triunghiuri asemenea formate, anume BMP și AMC, CNQ și ABN, ABP și ACQ deducem imediat:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{BP}{AC}, \tag{1}$$

$$\frac{BN}{CN} = \frac{AB}{CQ}, \tag{2}$$

$$\frac{BP}{CQ} = \frac{AB}{AC}, \tag{3}$$

relații care înmulțite conduc la relația lui *Steiner*.

Reciproc: dacă în triunghiul ABC două transversale unghiulare taie latura BC în M și N și dacă avem relația:

$$\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{AB^2}{AC^2}, \tag{4}$$

atunci dreptele AM și AN sînt izogonale.

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, dacă AN nu ar fi izogonala dreptei AM am avea o relație de forma:

$$\frac{BM \cdot BN'}{CM \cdot CN'} = \frac{AB^2}{AC^2} \tag{5}$$

pentru AM și izogonala sa AN'. Comparînd relațiile (4) și (5) obținem:

$$\frac{BN}{CN} = \frac{BN'}{CN'} \tag{6}$$

ceea ce implică $N = N'$.

V.P.49². Fie $ABCD$ tetraedrul considerat și AB cea mai mare muchie a sa. Atunci triunghiurile ACD și BCD au toate laturile mai mici sau egale cu 1.

Fie $AF \perp CD$ $(F \in CD)$ și $BK \perp CD$ $(K \in CD)$ și $DC = a$. Din triunghiul AFC, folosind teorema lui *Pitagora* rezultă $AF^2 = AC^2 - CF^2 \leqslant 1 - CF^2$ iar din triunghiul ADF, $AF^2 = AD^2 - FD^2 \leqslant 1 - FD^2$. Ca atare, adunînd cele două relații astfel obținute găsim $2AF^2 \leqslant 2 - (CF^2 + FD^2) = 2 - a^2 + 2CF \cdot FD$ unde $CD = a$. Din inegalitatea evidentă $(CF - FD)^2 \geqslant 0$ rezultă $(CF+FD)^2 - 4CF \cdot FD \geqslant 0$ deci $CF \cdot FD \leqslant \frac{a^2}{4}$ și deci $AF^2 \leqslant 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = 1 - \frac{a^2}{4}$ și, de aici, $AF \leqslant \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$. Analog, $BK \leqslant \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$. Fie V_{ABCD} volumul tetraedrului și AS înălțimea sa (S în planul triunghiului BCD). Atunci

$$AS = \frac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \frac{6V_{ABCD}}{BK \cdot DC} = \frac{6V_{ABCD}}{aBK} \text{ deci } \frac{AS \cdot BK \cdot a}{6} =$$

$$= V_{ABCD} \leqslant \frac{AS}{6} a \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} \leqslant \frac{AF}{6} a \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} \leqslant \frac{a}{6} \cdot$$

$$\cdot \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \left(\text{deoarece din triunghiul dreptunghic } ASF,\right.$$

$$\left. AS \leqslant AF \text{ și } AF \leqslant \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}\right). \text{ Că } \frac{a}{6}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \leqslant \frac{1}{8}$$

se dovedește observînd că inegalitatea este echivalentă

Scanned with OKEN Scanner

cu $a(4-a^2) \leqslant 3$ care este evidentă deoarece $a^3 - 4a + 3 = (a-1)(a^2+a-3) \geqslant 0$ în intervalul $(0, 1]$ deci $3 \geqslant 4a - a^3 = a(4-a^2)$.

V.P.50[2]. Să notăm cele patru puncte cu A, B, C, D. Din formulele cosinusului deducem că orice triunghi format cu trei din cele patru puncte este ascuțitunghic (în adevăr, din triunghiul ABC, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \geqslant 0$ deoarece $b \geqslant \sqrt{2}$, $c \geqslant \sqrt{2}$, $a \leqslant 2$ deci $b^2+c^2-a^2 \geqslant 0$) astfel că $\hat{A} \leqslant 90°$ și deci, analog, $\hat{B} \leqslant 90°$, $\hat{C} \leqslant 90°$, $\hat{D} \leqslant 90°$ astfel că patrulaterul $ABCD$ este convex. Cum într-un patrulater convex suma unghiurilor este $360° = 4 \cdot 90°$ rezultă că $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$ (deoarece dacă, de exemplu, $\hat{A} \neq 90°$, cum $\hat{B} \leqslant 90°$, $\hat{C} \leqslant 90°$, $\hat{D} \leqslant 90°$ ar rezulta $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} < 360°$) deci patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi deci inscriptibil. Problema se poate generaliza considerînd în loc de numerele $\sqrt{2}$ și 2, numerele $\sqrt{k}$ și k, unde $k > 0$.

V.P.51[2]. Afirmația din enunț este adevărată deoarece izogonalele cevienelor concurente sînt drepte concurente. Punctul de concurență se mai numește și *centrul simedian* al triunghiului. El este inversul centrului de greutate al triunghiului.

V.P.52[2]. Pe dreapta AB luăm un punct C care împarte segmentul AB în raportul:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\beta}{\alpha} = m. \quad (1)$$

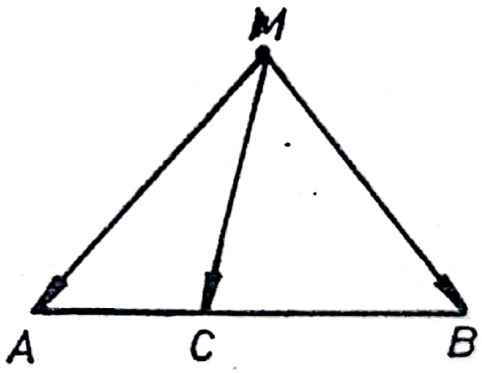


Fig. V.P.52

Ca atare, vectorul $\overline{MC}$ se exprimă cu ajutorul vectorilor $\overline{MA}$ și $\overline{MB}$ prin relația:

$$\overline{MC} = \frac{\overline{MA} + m\overline{MB}}{1+m}. \quad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin ridicarea la pătrat (scalar) a acestei din urmă egalități, se obține:

$$MC^2 = \frac{MA^2 + m^2MB^2 + 2m\overline{MA} \cdot \overline{MB}}{(1+m)^2}. \qquad (3)$$

Aplicînd teorema lui *Pitagora* în triunghiul MAB se obține imediat:

$$2\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MA^2 + MB^2 - AB^2. \qquad (4)$$

Substituind în (3) valoarea produsului scalar $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ din (4) se obține:

$$MC^2 = \frac{MA^2 + m^2MB^2 + mMA^2 + mMB^2 - mAB^2}{(1+m)^2},$$

$$MC^2 = \frac{MA^2(1+m) + m(1+m)MB^2 - mAB^2}{(1+m)^2},$$

$$MC^2 = \frac{MA^2 + mMB^2}{1+m} - \frac{mAB^2}{(1+m)^2}. \qquad (5)$$

În relația (5) substituim valoarea lui m din (1) și obținem:

$$MC^2 = \frac{\alpha MA^2 + \beta MB^2}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta AB^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

sau:

$$MC^2 = \frac{k^2}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha\beta AB^2}{(\alpha+\beta)^2} \qquad (6)$$

ceea ce arată că locul geometric căutat este un cerc cu centrul în C și raza dată de relația (6)

La aceeași concluzie ajungem folosind relația lui *Stewart*:

$$MA^2 \cdot CB + MB^2 \cdot CA = MC^2 \cdot AB + AC \cdot CB \cdot AB$$

C fiind un punct de pe dreapta AB pentru care distanțele CA, CB sînt proporționale cu α și β, deci un punct fix. Prima parte a relației anterioare este un număr constant iar a doua parte cuprinde numai elementul MC care este variabil astfel că locul cerut este un cerc, de centru C.

Scanned with OKEN Scanner

Calcule analoage celor făcute în prima soluție a problemei, ne dă expresia lui MC:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$CA = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\, a,$$

$$CB = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\, a,$$

de unde:

$$MC^2 = \frac{k^2}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta a^2}{(\alpha + \beta)^2},$$

cu $a = AB$ și $\alpha + \beta \neq 0$.

V.P.53[3]. Amintim că punctele *Brocard* ale unui triunghi ABC sînt punctele comune cercurilor adjuncte $A\bar{B}$, $B\bar{C}$, $C\bar{A}$, fie Ω punctul comun, respectiv $B\bar{A}$, $C\bar{B}$, $A\bar{C}$, fie Ω' punctul comun al acestor cercuri. Unghiul ΩAB egal cu ΩBC și ΩCA (vezi fig. V.P.53) este unghiul *Brocard* — fie acest unghi ω. Avem imediat:

$$\sphericalangle \Omega'AC = \sphericalangle \Omega'BA = \sphericalangle \Omega'CB = \omega$$

de unde rezultă afirmația.

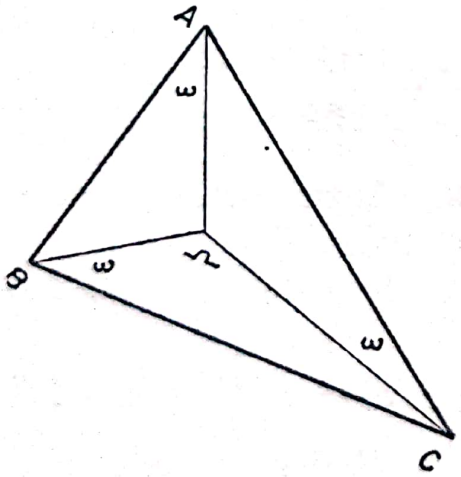


Fig. V.P.53

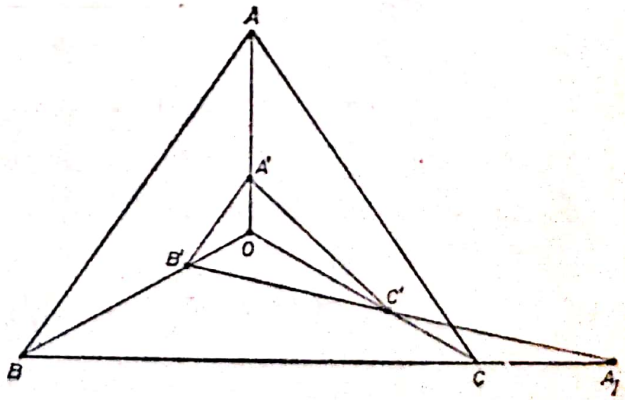


Fig. V.P.54

V.P.54[3]. Considerăm un punct O în planul triunghiului ABC și fie, de asemenea, A', B', C' puncte luate arbitrar pe cevienele punctului O. Notăm cu A_1

(vezi fig. V.P.54) intersecția dreptelor BC, $B'C'$. Aplicînd teorema *Menelau* pentru triunghiul OBC și transversala $A_1B'C'$ obținem:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{C'O}{B'O}$$

și analoagele pentru intersecțiile celorlalte laturi, B_1 și C_1, astfel că prin înmulțirea acestora deducem, conform, reciprocei teoremei lui *Menelau*, că punctele A_1, B_1, C_1, sînt coliniare. În felul acesta triunghiurile ABC, $A'B'C'$ au proprietatea că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente și laturile BC, $B'C'$ și CA, $C'A'$ respectiv AB, $A'B'$ se taie în punctele coliniare de unde teorema pe care ne-am propus să o demonstrăm.

În soluția problemei V.P.39 am omis să dovedim și reciproca afirmației demonstrate. Adică: polii dreptelor concurente sînt puncte coliniare.

În adevăr, fie punctul M și un cerc c. Fie, de asemenea, o dreaptă dusă prin punctul M și N polul ei. Secanta MN taie cercul în P și Q. Punctul M fiind situat pe polara n a punctului N, punctele M și N sînt conjugate în raport cu P, Q deci N este situat pe polara m a punctului M.

În felul acesta, unei figuri k formate din puncte — în care putem distinge și drepte — i se poate pune în corespondență o figură k' formată din drepte (anume polarele punctelor figurii k) și din puncte (polii dreptelor figurii k) în raport cu un cerc. Avem deci încă o transformare, *dualitatea*.

Reciproca teoremei lui *Desargues* rezultă prin dualitate în raport cu un cerc arbitrar. Obținem în felul acesta încă două triunghiuri ale căror laturi sînt polarele vîrfurilor. Dreptei AA' îi va corespunde intersecția polarelor punctelor A, A', adică, în fond, intersecția laturilor corespunzătoare ale triunghiurilor duale. Ca atare, ipoteza că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente are drept dual ipoteza că intersecțiile laturilor sînt coliniare. Concluzia că laturile triunghiurilor date se taie în puncte coliniare admite drept dual afirmația că dreptele care unesc vîrfurile omoloage sînt concurente.

Scanned with OKEN Scanner

Triunghiurile ABC, $A'B'C'$ se mai numesc și *omologice*, O fiind *centru de omologie* iar dreapta pe care sînt situate punctele A_1, B_1, C_1, *axă de omologie*.

V.P.55[3]**.** Este suficient să demonstrăm că una din tangentele ce sînt duse prin A,B,C este simediană deoarece punctul lui *Lemoine* este punctul de concurență al simedianelor.

În adevăr, fie M punctul de concurență al perpendicularelor ridicate în B_1 și C respectiv pe AB și AC iar E și F picioarele perpendicularelor duse dintr-un punct oarecare D al tangentei în A cercului AB_1C respectiv la laturile AC, AB. Deoarece AM, MB_1 și MC sînt perpendiculare pe AD, AF, AC, triunghiurile (dreptunghice) MB_1A și CAM sînt asemenea cu AFD și respectiv AED deci:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AB_1}{DF}$$

și:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AC}{DE}$$

de unde:

$$\frac{AB_1}{AC} = \frac{DF}{DE}$$

și, cum $AB_1 = AB$, are loc:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DF}{DE}$$

ceea ce arată că punctul D aparține simedianei vîrfului A.

În adevăr, fie A' mijlocul laturii BC și β și γ distanțele mijlocului A' la AC și AB. Fie, de asemenea, y, z distanțele lui D la aceleași laturi ($DE = y$, $DF = z$). Să notăm proiecțiile lui A' pe AC și AB cu M' și L.

Din asemănarea triunghiurilor $AA'L$ și ADE, respectiv $AA'M'$ și ADF rezultă $\frac{AM'}{AF} = \frac{A'M'}{DF} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \frac{AA'}{DE} = \frac{AL}{AE}$ deci $A'M' \cdot DE = A'L \cdot DF$ adică $\beta y = \gamma z$. Dar, triunghiurile ABA', ACA' sînt echivalente — bazele BA', CA' sînt egale și înălțimea din A comună; deci $b\beta = c\gamma$, a, b, c fiind laturi e triunghiului, opuse respectiv unghiurilor A, B, C. Rezultă $\frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ deci dacă D se află pe simediana corespunzătoare unghiului A atunci are loc relația anterioară. Reciproca, adică tocmai afirmația ce a făcut obiectul acestei dizertații, se demonstrează prin reducere la absurd, așa cum am procedat în demonstrațiile reciprocelor teoremelor lui *Ceva* și *Menelau*.

V.P.56[3]**.** Fie un triunghi ABC, în vîrfurile căruia aplicăm forțe egale cu $a + b$. În felul acesta, rezultanta lor este aplicată în centrul G de greutate al triunghiului. Compunem forța a din B cu forța b din C. Rezultanta $a + b$ este aplicată în punctul A_1 pe latura BC a triunghiului, pentru care există relația $A_1B : A_1C = b : a$.

În mod analog, compunem forța a din C cu forța b din A, rezultanta fiind aplicată în punctul B_1 pe latura AC, pentru care $B_1C : C_1A = b : a$ etc. Punctele A_1, B_1, C_1 au proprietatea că în ele se aplică forțe egale, rezultanta lor fiind aplicată în centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$. Cum însă forțele sînt date inițial rezultă că centrele de greutate coincid, fapt ce demonstrează teorema lui *Pappus*.

V.P.57. Dacă punctele A,B,C,D sînt în același plan, relația se dovedește imediat considerînd un sistem de axe rectangulare xOy în care exprimăm fiecare segment în parte — mai exact lungimea lor — în funcție de coordonatele atribuite punctelor.

Dacă A,B,C,D sînt în spațiu, afirmația este de asemenea adevărată, observînd echivalența dintre relația propusă și faptul că dacă într-un tetraedru două perechi de muchii sînt perpendiculare, atunci și cealaltă pereche este formată din muchii perpendiculare, proprietate ce se poate dovedi imediat.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME FINALE

VI.1. Să se rezolve ecuația:

$$\cos^n x - \sin^n x = 1$$

unde n este un număr întreg strict pozitiv oarecare.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

VI.2. Între unghiurile diedre a, b, c, ale fețelor laterale făcute cu planul bazei unui tetraedru echifacial există relațiile:

a°). $\sec a + \sec b + \sec c \geqslant 9$;

b°). $\cos a \cos b \cos c \leqslant \frac{1}{27}$.

Cînd are loc egalitatea în fiecare din relațiile anterioare?

VI.3[1]**.** Să se găsească maximul și minimul expresiei:

$$z = x^2 + xy + y^2$$

unde $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$.

(Matematika v škole)

VI.4[2]**.** Să se rezolve în N^* ecuația:

$$(x + y)(y + z)(z + x) = uv(u + v).$$

VI.5[3]**.** Să se arate că suma distanțelor vîrfurilor unui tetraedru regulat la centrul sferei circumscrise este mai mică decît suma distanțelor acelorași vîrfuri la oricare alt punct al spațiului.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

Scanned with OKEN Scanner

VI.6. Să se demonstreze că nu există nici o funcție $f: R \to R$ astfel încît să aibă loc relația:

$$f(x) + f(1 - x) = x, \ (\forall)\, x \in R.$$

(Alexandru Dimca, G.M.B.)

VI.7. Să se rezolve în numere reale ecuația:

$$\sqrt{x_1 - 1} + 2\sqrt{x_2 - 4} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} = \\ = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),$$

unde $n \in N^*$.

(Titu Andreescu, G.M.B., 15048)

VI.8[2]**.** Să se arate că:

$$11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

se divide cu 133, $(\forall)\ n \in N$.

VI.9. Dovediți că:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\ = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}; \quad (\forall)\ n \in N^*.$$

VI.10[1]**.** Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 &= 1, \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 &= 1, \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 &= 1, \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 &= 1, \end{aligned}$$

unde a_1, a_2, a_3, a_4 sînt numere reale și diferite între ele.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

VI.11. Dacă $a, b, c > 0$ atunci:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

VI.12. Să se rezolve în R ecuația:

$$5^x = 4^x + 3^x.$$

VI.13. Considerăm P, $x \mapsto P(x)$, un polinom cu coeficienți întregi. Să se demonstreze că dacă P ia pentru două valori întregi ale lui x de paritate opusă, valori impare, P este impar pentru orice x întreg.

Are ecuația $P(x) = 0$ rădăcini întregi?

VI.14[1]. Să se arate că pentru orice $n \in N^*$, $n > 1$, este adevărată inegalitatea:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

VI.15. Să se arate că dacă a, b, c sînt numere reale strict pozitive oarecare iar x, y, z numere reale, atunci:

$$\sum [a(1+yz)\sqrt{1+x^2}] \leqslant$$

$$\leqslant (a+b+c)\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}.$$

În ce caz are loc egalitatea?

VI.16. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{n^3 + 12n^2 - n}{2(n+1)(2n+1)}.$$

VI.17. Dovediți că:

$$n^{\frac{n+1}{2}}(n-1) \leqslant n^n - 1, \quad (\forall)\ n \in N^*.$$

VI.18[1]. Să se demonstreze că oricare ar fi numerele strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ are loc inegalitatea:

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)} \leqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}.$$

(Olimpiadă, U.R.S.S.)

Scanned with OKEN Scanner

VI.19. Un bloc de oțel este așezat pe un plan înclinat format din scînduri de lemn. Cunoscînd valoarea coeficientului de frecare, $\mu = 0{,}4$, să se calculeze înclinarea maximă a planului pentru ca blocul să nu alunece.

VI.20. Să se arate că expresia:

$$E = a^2b^2(a+b+1)^{4n} + 2ab(a^2+b^2)(a+ \\ + b+1)^{3n} + (a^4+b^4+4a^2b^2)(a+b+1)^{2n} + \\ + 2ab(a^2+b^2)(a+b+1)^n + a^2b^2,$$

unde $n \in N^*$, se divide cu $(a+b)^4$.

(Baraj, 1970)

VI.21[1]**.** Se consideră funcția:

$$f:\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \to [\sqrt{3}, 2],$$

dată de legea:

$$f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{cosec} x.$$

a°). Să se arate că f este o bijecție.

b°). Să se găsească funcția inversă $f^{-1}: [\sqrt{3}, 2] \to \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ a funcției f.

(Concurs elevi, 1971)

VI.22[1]**.** Să se calculeze:

$$S = nC_2^2 + (n+1)C_3^2 + (n+2)C_4^2 + \ldots + (n+ \\ + p-1)C_{p+1}^2, \quad p \geqslant n.$$

VI.23[2]**.** Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_{26} \in R$, atunci:

$$5(x_1^2 + \ldots + x_{26}^2) \geqslant 2x_{26}(x_1 + \ldots + x_{25}).$$

VI.24[1]**.** Care dintre numerele $A = 9^{15}$ sau $B = 2^{34}$ este mai mare?

Scanned with OKEN Scanner

Nu se vor folosi logaritmii.

VI.25[1]. Dacă:

$$p + q = 1$$

atunci:

$$p^n + q^n = \sum_{s \geqslant 0} (-1)^s \frac{n}{n-s} C_{n-s}^s (pq)^s, \ (\forall) n \in N^*.$$

VI.26[1]. Sînt dispobinile n culori şi cîte s bile de fiecare culoare. Dacă împărţim aceste ns bile în n grupe de cîte s (în mod cu totul arbitrar) atunci putem alege din fiecare grupă cîte o bilă, astfel ca să obţinem n bile de culori diferite.

(Olimpiadă, U.R.S.S.)

VI.27. Să se arate că în orice triunghi ABC în care $A \neq B$, $A - B \neq \frac{\pi}{2}$:

a°). $\dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin 2A + \sin 2B} = \dfrac{1}{2} \operatorname{tg}(A - B)$;

b°). $\dfrac{\sin^2 \dfrac{A}{2} - \sin^2 \dfrac{B}{2}}{\sin A + \sin B} = \dfrac{1}{2} \operatorname{tg} \dfrac{A - B}{2}$;

c°). $0 < \dfrac{\sin 2A + \sin 2B}{\cos(A - B)} < 2$;

d°). $0 > \dfrac{\cos A - \cos B}{\sin \dfrac{A - B}{2}} > -2$.

VI.28. a°). Să se arate că dacă $x \cos a + y \sin a = m$, unde a este o constantă diferită de $k\pi$, $k \in Z$ iar m un parametru real, atunci $x^2 + y^2 \geqslant m^2$.

b°). Dacă $x \neq 0$, pentru care valori ale raportului $\dfrac{x}{y}$ are loc semnul egal?

(Concurs elevi, 1971)

Scanned with OKEN Scanner

VI.29. Dovediți că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi oarecare ABC atunci:

$$\sum \frac{1}{1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}} \geqslant \frac{9}{2}.$$

VI.30[1]**.** Să se calculeze:

$$\frac{2 - \sum_{i=1}^{4} \operatorname{arctg}\ x_i}{2 + \sum_{i=1}^{4} \operatorname{arctg}\ x_i};$$

unde x_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sînt rădăcinile ecuației:

$$\sqrt{3}x^4 - 4x^3 + 4x - \sqrt{3} = 0.$$

VI.31. Să se arate că dacă cercul circumscris unui triunghi ABC este tangent cercului care trece prin mijloacele A', B', C' ale laturilor, există relația:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2.$$

VI.32[1]**.** Să se arate că ecuația:

$$8x^3 - 6x + \sqrt{3} = 0$$

admite soluția $x_1 = \sin 20°$. Să se afle celelalte rădăcini.

VI.33. Să se rezolve ecuația:

$$4 \log_{\frac{1}{2}\sin 2x} (\sin x) \log_{\frac{1}{2}\sin 2x} (\cos x) = 1.$$

VI.34. Să se rezolve ecuația:

$$\arcsin \sqrt{(x+1)^2 + x + 2} + \operatorname{arctg} \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{\pi}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

VI.35*. Fie $m \in N^*$. Să se arate că:

$$\sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{m}\right) \sin\left(x - \frac{2\pi}{m}\right) \ldots \sin\left(x - \frac{(m-1)\pi}{m}\right) = \sin\frac{\pi}{2m} \sin\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{\pi}{m}\right) \ldots \sin\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{m-1}{m}\pi\right) \sin mx.$$

VI.36[1]. Să se arate că dacă $x = 6^n$, $n \in N^*$, atunci P_4 definit prin:

$$P(x) = 24x^4 + 154x^3 + 269x^2 + 154x + 24$$

se divide prin 625.

VI.37. Să se rezolve și să se discute sistemul:

$$\begin{aligned} x + ay + a^2z &= 1, \\ ax + a^2y + z &= b, \\ a^2x + y + az &= b^2. \end{aligned}$$

unde $a, b \in R$.

VI.38[1]. Să se arate că:

a°). $1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \ldots + k \cdot C_n^k = n(C_n^{k-1} + C_n^{k-3} + \ldots)$;

b°). $k \cdot C_n^k - (n + k - 1) C_n^{k-1} + (2n + k - 2) C_n^{k-2} - (3n + k - 3) C_n^{k-3} + \ldots + (4n + k - 4) C_n^{k-4} - \ldots = 0$.

VI.39[3]. Considerăm un tetraedru $ABCD$. Fie M mijlocul muchiei AB. Prin M se duce planul paralel dreptelor (AD) și (BC). Vom nota acest plan cu π.

a°). Să se demonstreze că punctele M, N, P, Q (unde s-a notat $N = \pi \cap AC$, $P = \pi \cap DC$, $Q = \pi \cap DB$) sînt vîrfurile unui paralelogram.

Scanned with OKEN Scanner

b°). Să se caracterizeze cu ajutorul elementelor tetraedrului $ABCD$ cazurile în care paralelogramul este un dreptunghi, un romb sau un pătrat.

c°). Să se demonstreze că centrul paralelogramului $MNPQ$, mijlocul lui AD și mijlocul lui BC, sînt trei puncte coliniare.

d°). Să se arate că planul π determină în tetraedrul $ABCD$ două corpuri de volume egale.

VI.40[1]**.** Fie P un punct în planul unui tringhi oarecare ABC. Dreptele AP, BP, CP taie respectiv dreptele BC, CA și AB în A', B', C'. Cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ taie din nou dreptele BC, CA, AB respectiv în A'', B'', C''. Să se demonstreze că dreptele AA'', BB'', CC''. sînt concurente.

VI.41[2]**.** Să se determine toate funcțiile $g:R \to R^+$ pentru care:

$$g(x)\ g(x+1) = g(x) - g(x+1).$$

VI.42[3]**.** Să se rezolve ecuația:

$$[4x-1]_* + [2x-1]_* + 5x - \left[x + \frac{1}{2}\right]_* - [x^2]_* - [4x-2]_* - [x]_* - 6 = 0.$$

VI.43[2]**.** Care dintre numerele:

$$21! \text{ sau } 2541^7$$

este mai mare?

VI.44. Să se rezolve ecuația:

$$x^3 - 12x^2 + 33x - 4 = 0.$$

VI.45. Să se rezolve în R^+ ecuația:

$$x^2 - 2 = \left\{\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}_*.$$

VI.46[2]**.** Sînt disponibile 13 obiecte, fiecare cîntărind un număr întreg de grame. Se știe că oricare grupă

Scanned with OKEN Scanner

de 12 obiecte, alese din cele date, se poate împărți (cel puțin într-un fel) în două grupe de cîte 6 obiecte astfel că cele două grupe cîntăresc același număr întreg de grame.

Să se arate că masele celor 13 obiecte sînt egale.

(Olimpiadă, U.R.S.S.)

VI.47. În orice triunghi ABC:

a°). $\dfrac{2r_br_c - bc}{2r_cr_a - ca} = \dfrac{b\cos A}{a\cos B}$, $B \neq 90°$,

b°). $\sin A \sin B \sin C \leqslant \dfrac{p^3}{27R^3}$;

notațiile fiind cele uzuale.

VI.48*. Fie M o mulțime formată din $n \geqslant 3$ (n finit) puncte în plan, astfel încît pentru orice 3 puncte din M există în plan un cerc de rază 1 care le conține.

Să se demonstreze că există un cerc de rază 1 care conține toate punctele lui M.

VI.49*. Fiind dată o mulțime $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ să se găsească numărul submulțimilor lui X care au k elemente și nu conțin simultan doi întregi consecutivi.

VI.50*. Să se găsească numărul de scrieri ale unui număr întreg m ca sumă de n întregi pozitivi:

$$m = u_1 + u_2 + \ldots u_n,$$

două sume diferind fie prin natura întregilor care apar în sumă, fie prin ordinea lor.

VI.51[1]. a°). Să se arate că ecuația:

$$x^3 - 3x - 14 = 0$$

admite rădăcina:

$$x_1 = \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt[3]{7 - 4\sqrt{3}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b°). Să se exprime celelalte două rădăcini, x_2 și x_3 ale ecuației în funcție de x_1 și să se arate că nu sînt reale.

(Concurs elevi, 1971)

VI.52[3]**.** Fie n $(n \geqslant 2)$ puncte în plan, nu toate coliniare. Este posibil ca distanța dintre oricare două să fie un număr întreg?

VI.53. Să se calculeze:

$$\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{n+m}{(n+m+1)!}.$$

VI.54. Un punct mobil M descrie un cerc cu centrul O, situat în planul P. A fiind un punct fix în spațiu, să se determine poziția punctului M, astfel ca aria triunghiului OMA să fie maximă, respectiv minimă.

(Admitere, Fac. mat., București, 1970)

VI.55. Să se rezolve ecuațiile:

a°). $\log_3 (\log_2 x - 9) = 2 + \log_3 (1 - 4 \log_x 4)$;

b°). $\dfrac{1 + \cos 2ax}{2 \sin ax} = \dfrac{\sin 2ax}{1 - \cos 2ax}$; $a \neq 0$.

VI.56. Se dă triunghiul ABC avînd unghiurile ascuțite și $AC > AB$. Fie M un punct pe segmentul BC și α un unghi ascuțit dat. Se notează $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $BM = x$ și se duce perpendiculara (d) în M pe BC. Se construiește o dreaptă My care face cu (d) unghiul α și intersectează segmentul AB în B' (B' se găsește între A și B). Se construiește o dreaptă Mz care face cu (d) unghiul α și intersectează segmentul AC în C' (C' se găsește între A și C). Se cere:

a°). Să se calculeze lungimile segmentelor BB', CC' în funcție de x, de α și de elementele triunghiului ABC.

b°). Intervalul în care variază x pentru ca triunghiul $B'MC'$ să existe.

c°). Să se arate că triunghiul $B'MC'$ există pentru cazul cînd M este proiecția lui A pe BC și $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - A$.

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz, să se arate că dreptele BC', CB' sînt înălțimi ale triunghiului ABC.

(Admitere, I.P.B., 1970)

VI.57. Să se rezolve ecuația:

$$x^3 - (2m + 1)\, x^2 + (3m - 1)\, x - m + 1 = 0$$

în care m este un parametru real. *Discuție.* Cazul $m = 0$.

VI.58. Dacă A, B, C sînt părți ale unei mulțimi E, atunci:

$$[(A \cup B) - C] \cup [(B \cup C) - A] \cup [(C \cup A) - B] = \\ = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C).$$

VI.59[3]**.** Este posibil ca un pătrat să fie împărțit în $n \geqslant 4$ pătrate? Chestiune analoagă pentru cub.

VI.60. Dacă între laturile a, b, c ale unui triunghi ABC există relația:

$$1 - \sqrt{\frac{(a-c)\,(a-b)}{(a+c)\,(a+b)}} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}} + \\ + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}, \quad (a > b > c)$$

atunci triunghiul este dreptunghic.

VI.61. Să se afle valorile lui a astfel ca ecuația:

$$|\, x - 4\,| + |\, x - 3\,| = a,$$

unde $a > 1$, să aibă rădăcini reale.

(Concurs, S.U.A., 1964)

VI.62[1]**.** Să se demonstreze că dacă $A + B + C = \pi$ iar n este un număr natural impar, atunci:

$$E = \sin nA + \sin nB + \sin nC = \\ = 4(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{nA}{2} \cos \frac{nB}{2} \cos \frac{nC}{2}.$$

(Concurs, Polonia, 1951)

Scanned with OKEN Scanner

VI.63[2]. Fie ABC un triunghi oarecare. Se duce MM' paralel cu BC, NN' paralel cu AB și PP' paralel cu AC și tangente cercului înscris triunghiului ABC, respectiv în punctele I, L, K (M și P' sînt pe AB, M' și N pe AC, N' și P pe BC).

Fie D, E și F punctele de tangență ale cercului înscris triunghiului ABC respectiv cu laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC. Să se arate că:

a°). Suma perimetrelor triunghiurilor AMM', BPP', CNN' este egală cu perimetrul triunghiului BAC.

b°). Triunghiurile DEF și IKL sînt egale.

c°). Fie $Q = IK \cap EF$, $R = IL \cap EF$, $S = IL \cap DE$, $T = DE \cap LK$, $U = LK \cap DF$ și $V = DF \cap IK$. Să se arate că dreptele QT, RU, SV sînt concurente.

d°). Dacă R ese raza cercului circumscris triunghiului ABC și R_a, R_b, R_c razele cercurilor circumscrise respectiv triunghiurilor AMM', BPP', CNN' atunci există relația:

$$R_a + R_b + R_c = R.$$

(Concurs matematică, 1966)

VI.64[3]. Fie:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Să se arate că:

$$2 \leqslant a_n < a_{n+1} < 3$$

pentru orice $n \in N^*$.

VI. 65[3]. Se consideră un triunghi ABC cu toate unghiurile ascuțite. Notînd cu H ortocentrul triunghiului dat, se iau pe direcțiile înălțimilor în sens opus față de vîrfurile triunghiului, segmentele $HA' = BC$, $HB' = CA$, $HC' = AB$. Să se arate că:

a°). Laturile triunghiului $A'B'C'$ sînt egale cu dublul medianelor triunghiului ABC.

b°). Aria triunghiului $A'B'C'$ este triplul ariei triunghiului ABC.

(Admitere, Fac. mat., București, 1970)

Scanned with OKEN Scanner

VI.66. O dreaptă oarecare Δ taie prelungirile laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC în L, M, N. Fie $A_1 = BM \cap CN$, $B_1 = CN \cap AL$, $C_1 = AL \cap BM$. Să se arate că AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente.

VI.67[2]. Dacă $n \in N^*$, atunci:

$$\sum_{k=1}^{2n} \cos^2 \frac{k\pi}{4n+1} < n < \sum_{k=1}^{2n} \sin^2 \frac{k\pi}{4n+1}.$$

VI.68[2]. Să se calculeze suma:

$$S_1 = 1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \ldots + \frac{\cos nx}{\cos^n x},$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z.$$

VI.69[1]. Fie:

$$E(a, b) = 2a^2 + 2b^2 + 4b + 1.$$

i°). Pentru ce valori reale ale lui a și b, $E(a, b)$ este minimă?

ii°). Pentru ce valori reale ale lui a și b, $a \in [-4, -2]$, $b \in [2, 3]$, $E(a, b)$ este minimă?

(Concurs elevi, 1974)

VI.70. Se consideră un triunghi înscris într-un cerc de rază r. Să presupunem că una dintre laturile triunghiului este egală cu $r/2$ iar a doua egală cu $r\sqrt{3}$. Să se găsească lungimea celei de-a treia laturi a triunghiului.

(Admitere, Fac. mat., Bucureşti, 1973)

VI.71. Se consideră un punct A' pe latura BC a unui triunghi ABC. Paralela prin A' la latura AC, întîlnește latura AB în punctul C' și paralela prin A' la latura AB întîlnește latura AC în punctul B'.

a°). Să se exprime aria paralelogramului $A'B'AC'$ în funcție de aria triunghiului $BA'C'$ și de aria triunghiului $CA'B'$.

b°). Pentru ce poziție a punctului A' aria acestui paralelogram este maximă?

(Admitere, Fac. mat., 1973)

Scanned with OKEN Scanner

VI.72[3]**.** Să considerăm n intervale pe o dreaptă d cu proprietatea că oricare două se interesectează. Să se arate că toate intervalele au un punct comun.

VI.73*. Să se arate că:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]_*} C_{n-k+1}^{k} = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (\forall)\ n \in N.*$$

VI.74*. Dacă A și B sînt mulțimi oarecare, nevide, să se rezolve ecuația:

$$A \cup (B - X) = B \cup X.$$

VI.75[2]**.** Dacă 1976 de puncte din plan au proprietatea că din oricare grupă de 5 se pot alege 4 care să fie conciclice, atunci 1975 dintre ele sînt conciclice.

VI.76. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$6x^2 - 13xy + 6y^2 = 19.$$

VI.77. Pe o sferă se consideră n cercuri. Să se determine numărul maxim de regiuni în care cercurile împart sfera.

VI.78[1]**.** Într-un triunghi oarecare ABC notăm cu AA_1, BB_1, CC_1 înălțimile, cu R_1, R_2, R_3 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1 și cu r_0 raza cercului înscris în triunghiul ortic. R fiind raza cercului circumscris triunghiului ABC, să se demonstreze relația:

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R(R - r_0).$$

(Ioan Tomescu, G.M.B., 4112)

VI.79. Să se rezolve ecuația:

$$8\cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}.$$

(Admitere, A.S.E., 1971)

Scanned with OKEN Scanner

VI.80. Să se determine mulțimea:

$$S = \{(x, y) \in Z^2 | \, 3\,|x| + 2y = 1 \text{ și } x + 3\,|y| = 15\}.$$

VI.81. Să se arate că:

$$\log_a b = \log_{a^n} b^n, \quad (\forall) n \in N^*, \; a, \; b > 0, \; a \neq 1$$

și să se rezolve ecuația:

$$\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2.$$

(Admitere, Fac. șt. ec., Timișoara, 1970)

VI.82. Fie 4 puncte A, B, C, D pe cercul de rază R, astfel ca măs $\widehat{AB}$ = măs $\widehat{BC}$ = măs $\widehat{CD} = 2a$, a fiind exprimat în radiani.

a°). Să se calculeze aria trapezului $ABCD$ în funcție de a și R.

b°). Să se determine a astfel ca:

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 = 8R^2.$$

c°). Tot astfel, dacă $AB^2 - AC^2 = \sqrt{3}\, AD^2$.

(Admitere, Inst. constr., București, 1971)

VI.83[1]**.** Se dă dreptunghiul $ABCD$, în care se notează $AB = a$, $AD = b$. Pe latura AB se ia segmentul $AM = x$. Paralela dusă prin M la diagonala BD taie latura AD în N; paralela prin N la diagonala AC taie latura DC în P iar paralela prin P la diagonala BD taie pe BC în Q. Să se calculeze în funcție de a, b, x aria paralelogramului $MNPQ$. Să se determine x astfel ca această are să fie 1/8 din aria dreptunghiului.

(Admitere., I.P., Cluj-Napoca, 1970)

VI.84[2]**.** Se consideră un triunghi ABC și cercul de centru O circumscris acestui triunghi. Tangenta în punctul B la acest cerc intersectează pe AC în punctul D. Cercul circumscris triunghiului BCD taie dreapta AB în punctul E. Să se arate că:

Scanned with OKEN Scanner

a°). Triunghiul BDE este isoscel.

b°). Cercul circumscris triunghiului ACE este tangent dreptei DE.

c°). Dreapta AO este perpendiculară pe DE.

(Admitere, Fac. mat, Bucureşti, 1970)

VI.85[3]**.** Se consideră două cercuri O şi O' care se intersectează în punctele A şi B. O dreaptă care trece prin A întîlneşte cercul O în P şi cercul O' în P'. În plus, dreapta este astfel aleasă încît $AP \neq AP'$. Fie I intersecţia mediatoarei segmentului PP' cu dreapta AB. Dreptele IP şi IP' mai taie cercurile O şi O' în punctele Q şi Q'.

a°). Să se arate că $IQ = IQ'$ şi să se demonstreze că dreptele QQ' şi PP' sînt paralele.

b°). Dreapta QQ' mai intersectează cercul O în punctul R şi cercul O' în R'. Să se arate că:

$$PQ = AR = AR' = P'Q';$$

$$Q'R = AP';\ Q'R = AP'.$$

c°). Să se determine locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului BPP' cînd secanta PP' se roteşte în jurul punctului A.

(Admitere, Fac. mat., 1967)

VI.86[1]**.** Se dă un triunghi ABC cu laturile $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ şi un punct P pe BC, astfel ca $BP = kPC$.

a°). Să se arate că segmentul AP este de forma:

$$AP = \frac{1}{1+k}\sqrt{(1+k)(c^2 + kb^2) - a^2k}.$$

b°). Să se determine k astfel ca AP să fie înălţime în triunghiul ABC.

c°). Precizîndu-se k, să se determine lungimea medianei şi bisectoarei unghiului A.

(Admitere, Inst. constr., Bucureşti, 1971)

VI.87[3]**.** Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se construiesc în exterior pătratele $ABDE$ şi $ACFG$.

Scanned with OKEN Scanner

Se duce perpendiculara AI pe EG, punctul I aparținînd lui EG. Fie M punctul în care prelungirea lui AI întîlnește pe BC. Notăm cu O_1 și O_2 centrele celor două pătrate construite și cu P intersecția lui EC cu BG.

Să se arate că:

a°). $EC = BG$.

b°). AP este bisectoarea unghiului EPG.

c°). AM este mediană în triunghiul ABC și $2AM = EG$.

d°). Unghiul EPG este drept.

e°). Dreapta O_1O_2 este mediatoarea segmentului AP.

(Concurs elevi, 1970)

VI.88*. Se consideră un punct M mobil în interiorul sau pe laturile triunghiului ABC. Să se determine poziția punctului M pentru care suma distanțelor sale la laturile triunghiului este maximă, respectiv minimă.

(Ioan Tomescu, G.M.B., 9539)

VI.P.89. Se consideră ecuația:

$$x^4 - ax^2 + bx + c = 0.$$

Să se arate că $b = 0$, dacă și numai dacă:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2.$$

VI.P.90. Se consideră polinomul:

$$P_n(x) = (x - 1 + i\sqrt{3})^n + (x - 1 - i\sqrt{3})^n$$

și se cere:

a°). Să se rezolve ecuația $P_3(x) = 0$,

b°). Să se determine toate rădăcinile ecuației:

$$\frac{P_n(x)}{(x - 1 - i\sqrt{3})^n} = 0,$$

c°). Să se arate cum se pot scrie sub formă trigonometrică rădăcinile ecuației de la b°).

Scanned with OKEN Scanner

VI.P.91. Să se rezolve ecuația:

$$(\sqrt{2}+1)^{\sin\frac{x}{2}}+(\sqrt{2}-1)^{\sin\frac{x}{2}}=a,\ a\in R_0^+.$$

Discuție.

Să se cerceteze și cazurile cînd $\sin\frac{x}{2}$ se înlocuiește prin:

$$\cos\frac{x}{2};\ \operatorname{tg}\frac{x}{2};\ \frac{\sin x}{2};\ \frac{\cos x}{2};\ \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Cazul $a^2=2+2\sqrt{2}$

INDICAȚII

VI.3[1]. Se exprimă x și y printr-o formă trigonometrică.

VI.5[3]. Se poate exprima efectiv distanța de la un punct al spațiului la centrul sferei circumscrise.

VI.6. Se poate observa că pentru valori particulare date lui x, relația conduce la o absurditate.

VI.7. Se scrie altfel ecuația.

VI.12. Se determină efectiv o soluție a ecuației și apoi se demonstrează că este unică.

VI.14[1]. Încercați prin inducție.

VI.16. Se poate folosi inegalitatea *Buneakovski*.

VI.18[1]. Se poate folosi inegalitatea *Cauchy*.

VI.23[2]. Se poate folosi inegalitatea *Buneakovski*.

VI.41[2]. Răspunsul este $g\equiv 0$.

VI.49*. Se reformulează problema în sensul că se construiește o altă mulțime cu proprietăți particulare.

VI.64[3]. Se poate folosi formula lui *Bernoulli*.

Scanned with OKEN Scanner

VI.1. Cazul $n = 1$ se reduce succesiv la:

$$-\sin x = 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2};$$

$$-2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2};$$

$$\sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0,$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0, \text{ de unde } x = 2k\pi, \ k \in Z,$$

și:

$$\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0$$

sau, transformînd în produs:

$$\sqrt{2} \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

de unde:

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z,$$

deci:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in Z.$$

sau:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in Z.$$

În cazul $n = 2$, se obține:

$$\sin x = 0$$

deci $x = k\pi, \ k \in Z.$

Scanned with OKEN Scanner

Cazul $n > 2$. Este clar că în acest caz:

$$\cos^n x - \sin^n x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

sau:

$$\cos^2 x(1 - \cos^{n-2} x) + \sin^2 x(1 + \sin^{n-2} x) = 0.$$

Deoarece $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$, au loc situațiile:

a°). $\cos x = 0$, $\sin^{n-2} x = -1$;

b°). $\cos^{n-2} x = 1$, $\sin x = 0$,

(de remarcat că nu este posibil ca simultan $\sin x = \cos x = 0$) care se rezolvă potrivit schemelor clasice.

VI.2. Pornim de la inegalitatea:

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9$$

(vezi III.P. 130.) unde $x, y, z > 0$, cu egalitate pentru $x = y = z$.

Punînd:

$$x = \cos a,\ y = \cos b,\ z = \cos c$$

și ținînd seama că avem și:

$$\cos a + \cos b + \cos c = 1 \qquad (1)$$

obținem prima relație. Pentru a doua relație, folosim inegalitatea:

$$x + y + z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$$

(vezi III.P.128) cu aceleași substituții. Egalitate pentru $x = y = z$ deci pentru $a = b = c$.

Să demonstrăm relația (1). În adevăr, din fig. VI. 2 rezultă:

$$\cos a = \frac{D'D''}{DD''}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie A oricare din ariile triunghiurilor DAC, DAB, DBC, ABC (tetreadrul $DABC$ este echifacial). Este clar că:

$$A = \frac{DD'' \cdot BC}{2}, \quad DD'' = \frac{2A}{BC}$$

deci:

$$\cos a = \frac{D'D'' \cdot BC}{2A}.$$

Însă:

$$A_{D'BC} = \frac{D'D'' \cdot BC}{2}$$

deci, scriind relațiile analoage pentru b și c:

$$\cos b = \frac{D'D''' \cdot AC}{2A};$$

$$\cos c = \frac{D'K \cdot AB}{2A}$$

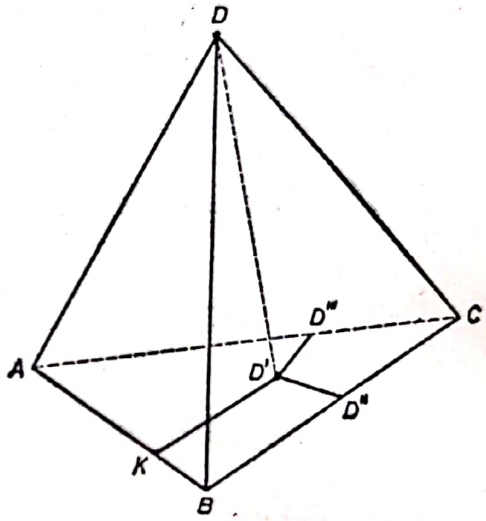


Fig. VI.2

și adunînd:

$$\cos a + \cos b + \cos c = \frac{1}{A}(A_{D'BC} + A_{D'AC} + A_{D'AB}) = 1.$$

VI.3[1]. Dacă punem:

$$x = r \cos a, \quad y = r \sin a, \quad r \in R, a \in R,$$

expresia lui z devine:

$$z = r^2\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2a\right)$$

iar condiția:

$$1 \leqslant r^2 \leqslant 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Minimul lui z are loc luînd $r^2 = 1$ și sin $2a = -1$, de unde:

$$z_{min} = \frac{1}{2}$$

iar maximul lui z se obține luînd $r^2 = 2$ și sin $2a = 1$ deci:

$$z_{max} = 3.$$

VI.4². Fie:

$$y + z = \frac{q}{r} u$$

$$z + x = \frac{r}{p} v$$

$$x + y = \frac{p}{q} (u + v)$$

unde $p, q, r \in N^*$ pot fi presupuse numere prime între ele două cîte două (în caz contrar se simplifică în formulele de mai sus prin c.m.m.d.c. al lor).

Rezolvînd acest sistem deducem:

$$x = \frac{pr - q^2}{2qr} u + \frac{qr + p^2}{2pq} v;$$

$$y = \frac{pr + q^2}{2qr} u + \frac{p^2 - qr}{2pq} v;$$

$$z = \frac{q^2 - pr}{2qr} u + \frac{qr - p^2}{2pq} v.$$

Ca atare, se obțin soluțiile:

$x = \alpha(pr - q^2) + \beta(qr + p^2);$

$y = \alpha(pr + q^2) + \beta(-qr + p^2);$

$z = \alpha(-pr + q^2) + \beta(qr - p^2);$

$u = 2qr\alpha;$

$v = 2pq\beta,\ \alpha, \beta, q, p, r \in N^*.$

Scanned with OKEN Scanner

VI.5[3]. Fie $A_1A_2A_3A_4$ tetraedrul regulat dat, O centrul sferei circumscrise și $B_1B_2B_3B_4$ tetraedrul care are fețele tangente acestei sfere în vîrfurile teatraedrului dat. Suma distanțelor unui punct oarecare M (interior tetraedrului $B_1B_2B_3B_4$ sau situat pe fețele situat pe fețele sale) la fețele acestui tetraedru este constantă deoarece tetraedrul regulat $B_1B_2B_3B_4$ se descompune în 4 tetraedre, avînd vîrful comun în M și ca baze fețele $B_1B_2B_3$ etc. și notînd cu V volumul tetraedrului $B_1B_2B_3B_4$ și cu M_i, $i = 1, 2, 3, 4$, proiecțiile lui M pe fețele acestuia rezultă egalitatea:

$$V = \frac{1}{3} a \sum_{i=1}^{4} MM_i$$

în care a este aria unei fețe, de unde:

$$\sum_{i=1}^{4} MM_i = \frac{3V}{a} = \text{constant.}$$

Dacă, în particular, M este în O:

$$\sum_{i=1}^{4} MM_i = \sum_{i=1}^{4} OA_i \qquad (1)$$

(s-au notat punctele astfel încît M_1 și A_1 sînt situate în planul $B_2B_3B_4$ etc.). Deoarece MM_1 este perpendicular pe planul $B_2B_3B_4$, etc., rezultă inegalitățile:

$$MA_i \geqslant MM_i \qquad (2)$$

pentru orice $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, cu observația că semnul de egalitate are loc simultan pentru toate relațiile numai atunci cînd M coincide cu O. Adunînd cele 4 inegalități (2), termen cu termen, se obține:

$$\sum_{i=1}^{4} MA_i \geqslant \sum_{i=1}^{4} MM_i$$

Scanned with OKEN Scanner

și, ținînd seama de (1):

$$\sum_{i=1}^{4} MA_i \geqslant \sum_{i=1}^{4} OA_i.$$

Putem raționa analog și în cazul în care M se găsește în afara tetraedrului $B_1B_2B_3B_4$.

Observații. Perspicacitatea în geometrie reclamă puterea de construcție, atît de necesară rezolvării problemelor ce se pun. Folosirea unor simple observații conferă soluției ingeniozitate și eleganță, atribute ce nu le găsim într-o rezolvare analitică, folosind conceptele de distanță și coordonată. Soluția problemei propuse, prelucrată după una dată de prof. *Dumitru Bătinețu* în unul din numerele mai vechi al Gazetei Matematice, punctează această idee pe care vrem s-o scoatem aici în relief.

Fără îndoială că aprecierile sînt împărțite așa încît lăsăm cititorului dreptul de a valida eleganța soluției care, repetăm, nu ne aparține.

VI.6. Facem demonstrația prin reducere la absurd. Presupunînd că există o funcție cu proprietatea cerută, dăm lui x valorile $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.

Obținem:

$$f(0) + f(1) = 0,$$

$$f(1) + f(0) = 1,$$

absurd.

VI.7. Ecuația poate fi pusă sub forma:

$$(x_1 - 2\sqrt{x_1 - 1}) + (x_2 - 4\sqrt{x_2 - 4}) +$$

$$+ \ldots + (x_n - 2n\sqrt{x_n - n^2}) = 0$$

sau:

$$(\sqrt{x_1 - 1} - 1)^2 + (\sqrt{x_2 - 4} - 2)^2 +$$

$$+ \ldots + (\sqrt{x_n - n^2} - n)^2 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde, fiecare termen din paranteze fiind neapărat nul, rezultă:

$$\sqrt{x_1 - 1} = 1 \text{ deci } x_1 = 2,$$

$$\sqrt{x_2 - 4} = 2 \text{ deci } x_2 = 8,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sqrt{x_n - n^2} = n \text{ deci } x_n = 2n^2.$$

VI.8². Să arătăm că:

$$E = (x+2)^{n+2} + (x+3)^{2n+1}$$

se divide la:

$$x^2 + 5x + 7,$$

pentru orice $n \in N^*$ (cazul $n = 0$ este banal).

În adevăr:

$$E = (x+2)^2(x+2)^n + (x+3)(x+3)^{2n} = (x^2 + 4x + 4)(x+2)^n + (x+3)(x^2 + 6x + 9)^n = [(x^2 + 5x + 7) - (x+3)] \cdot (x+2)^n + (x+3)[(x^2 + 5x + 7) + (x+2)]^n =$$

$$= (x^2 + 5x + 7)(x+2)^n - (x+3)(x+2)^n + (x+3)(x^2 + 5x + 7)^n + \mathfrak{M}(x^2 + 5x + 7) + (x+3)(x+2)^n = \mathfrak{M}(x^2 + 5x + 7).$$

Pentru $x = 9$ obținem afirmația din enunț. Am folosit aici dezvoltarea binomului după *Newton*.

VI.9. Se adaugă la al doilea membru:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

și la primul:

$$2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

cantități vizibil egale și se obține:

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n};$$

evident.

VI.10[1]. Se poate presupune, fără a restrînge generalitatea, că $a_1>a_2>a_3>a_4$. Sistemul devine:

$$(a_1-a_2)x_2+(a_1-a_3)x_3+(a_1-a_4)x_4=1,$$
$$(a_1-a_2)x_1+(a_2-a_3)x_3+(a_2-a_4)x_4=1,$$
$$(a_1-a_3)x_1+(a_2-a_3)x_2+(a_3-a_4)\,x_4=1,$$
$$(a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3=1.$$

Scăzînd ecuația a doua din prima, a treia din a doua, a patra din a treia, se obține sistemul:

$$(a_1-a_2)(x_2-x_1)+(a_1-a_2)x_3+(a_1-a_2)x_4=0,$$
$$(a_3-a_2)x_1+(a_2-a_3)(x_3-x_2)+(a_2-a_3)x_4=0,$$
$$(a_4-a_3)x_1+(a_4-a_3)x_2+(a_3-a_4)(x_4-x_3)=0,$$
$$(a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3=1.$$

Deoarece $a_i\neq a_j$ pentru $i\neq j$, $i, j\in\{1, 2, 3, 4\}$, prin împărțire cu a_1-a_2, a_2-a_3, a_4-a_3 se găsește:

$$-x_1+x_2+x_3+x_4=0,$$
$$-x_1-x_2+x_3+x_4=0,$$
$$x_1+x_2+x_3-x_4=0,$$
$$(a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3=1.$$

Adunînd prima ecuație cu a treia se obține:

$$x_2+x_3=0.$$

Adunînd a doua ecuație cu a treia găsim $x_3=0$ deci $x_2=0$ astfel că $x_4=x_1$, deci din a patra ecuație:

$$x_4=x_1=\frac{1}{a_1-a_4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4} este o permutare arbitrară a coeficienților a_1, a_2, a_3, a_4 și permutăm simultan:

$$a_{i_1} \text{ în } a_{i_3},\ x_{i_1} \text{ în } x_{i_3},$$

$$a_{i_2} \text{ în } a_{i_4},\ x_{i_2} \text{ în } x_{i_4},$$

$$a_{i_3} \text{ în } a_{i_1},\ x_{i_3} \text{ în } x_{i_1},$$

$$a_{i_4} \text{ în } a_{i_2},\ x_{i_4} \text{ în } x_{i_2},$$

sistemul are aceeași structură, diferind ordinea ecuațiilor, deoarece:

$$| a_i - a_j | = | a_j - a_i |.$$

Dacă se consideră altă ordine, de exemplu, $a_{i_1} > a_{i_3} > a_{i_2} > a_{i_4}$ se fac permutările necesare și se obține:

$$x_{i_1} = \frac{1}{a_{i_1} - a_{i_4}};$$

$$x_{i_4} = \frac{1}{a_{i_1} - a_{i_4}};$$

$$x_{i_3} = 0,$$

$$x_{i_2} = 0.$$

VI.11. Cum (vezi III.P.130):

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) \geqslant 9,$$

$$x_i > 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,$$

făcînd $x_1 = a + b$, $x_2 = b + c$, $x_3 = c + a$, se obține:

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a}\right) \geqslant \frac{9}{2}$$

sau, cum:

$$\frac{a + b + c}{a + b} = 1 + \frac{c}{a + b}$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

VI.12. Din studiul triunghiului dreptunghic se știe că:

$$5^2=4^2+3^2$$

deci $x=2$ este soluție a ecuației propuse. Ecuația se mai poate scrie:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1.$$

Dacă $x>2$ atunci se obține sucesiv, baza fiind subunitară:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x<\frac{16}{25},$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x<\frac{9}{25},$$

$$4^x+3^x<5^x.$$

Dacă $x<2$ atunci:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x>\frac{16}{25},$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x>\frac{9}{25},$$

$$4^x+3^x>5^x.$$

Rămîne că $x=2$ este singura soluție reală.

VI.13. Demonstrăm mai întîi că dacă P ia pentru două valori x_1, x_2 întregi, valori de paritate opusă, atunci x_1 și x_2 sînt de paritate opusă. Pentru polinomul constant, afirmația este evidentă.

Scanned with OKEN Scanner

Fie:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

$$a_i \in Z,\ i \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\},\ x_1 \neq x_2,\ x_1,\ x_2 \in Z$$

Are loc egalitatea:

$$P(x_1) - P(x_2) = a_0(x_1^n - x_2^n) + a_1(x_1^{n-1} - x_2^n) + \\ + \ldots + a_{n-1}(x_1 - x_2) = \mathfrak{M}(x_1 - x_2).$$

Cum $P(x_1)$ și $P(x_2)$ sînt de paritate opusă, rezultă că $P(x_1) - P(x_2)$ este număr impar deci admite numai divizori impari astfel că $x_1 - x_2$ este un număr impar și deci x_1 și x_2 sînt de paritate opusă.

Să presupunem că există x_1', x_2', z_3 întregi astfel ca $P(z_3)$ să fie număr par iar $P(x_1')$, $P(x_2')$ numere impare. Așadar:

$$P(x_1') = 2k_1 + 1,\ k_1 \in Z,$$

$$P(x_2') = 2k_2 + 1,\ k_2 \in Z,$$

$$P(z_3) = 2k_3,\ k_3 \in Z.$$

Cum x_1' și x_2' nu pot fi simultan, potrivit ipotezei, pare sau impare, putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că x_1' este par și x_2' este impar.

Potrivit rezultatului anterior, x_1' și z_3 sînt de paritate opusă deci, cu presupunerea făcută, z_3 este impar. Analog, x_2' și z_3 sînt de paritate opusă deci rezultă că z_3 este par, absurd.

Presupunerea că există $z_3 \in Z$ astfel ca $P(z_3)$ să fie par este deci absurdă de unde deducem că P ia pentru valori întregi ale lui x numai valori impare.

Rezultă de aici că ecuația:

$$P(x) = 0$$

nu are rădăcini întregi.

VI.14[1]. Raționăm prin inducție. Pentru $n = 2$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că:

$$E(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} > 0.$$

Atunci:

$$E(n+1) - E(n) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

deci:

$$E(n+1) > E(n) > \frac{1}{2}$$

și, potrivit principiului inducției și tranzitivității relației $>$, afirmația este valabilă pentru orice n număr natural > 1. Egalitatea numai pentru $n = 1$ (caz însă exclus prin ipoteză). Altfel:

$$\frac{n}{n+n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} < \frac{n}{n+1}.$$

VI.15. Este clar că dacă $x, y \in R$ atunci inegalitatea evidentă:

$$(x-y)^2 \geqslant 0$$

are loc dacă și numai dacă:

$$2xy < x^2 + y^2$$

adică:

$$1 + 2xy + x^2y^2 < 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$$

sau, altfel scris:

$$(1+xy)^2 \leqslant (1+x^2)(1+y^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $1 + yx \leqslant |1 + yz|$, deducem:

$$1 + yz \leqslant \sqrt{(1 + y^2)(1 + z^2)}$$

deci:

$$a(1 + xy)\sqrt{1 + z^2} \leqslant a\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)}.$$

Scriind relațiile analoage pentru b și c și adunîndu-le, obținem tocmai relația din enunț.

VI.16. Se folosește inegalitatea lui *Buneakovski* (vezi III.P.132):

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_k B_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} A_k^2 \sum_{k=1}^{n} B_k^2$$

unde $A_k,\ B_k \in R,\ k = \overline{1,\ n}$.

Punem:

$$A_k = \sqrt{a_k x_k},\ B_k = \sqrt{\frac{b_k}{x_k}},\ k = 1, \ldots, n,$$

unde $a_k,\ x_k,\ b_k > 0,\ (\forall)\ k \in \{1, \ldots, n\}$. Inegalitatea devine:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k b_k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{x_k}.$$

Facem aici:

$$a_k = k,\ b_k = k - 1,\ x_k = k$$

și obținem:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(k-1)}\right)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (k-1)\right)^2$$

de unde, după oarecari calcule, afirmația enunțului.

Scanned with OKEN Scanner

VI.17. Potrivit inegalității lui *Cauchy* (vezi III.P.129)

$$\frac{1+x+\ldots+x^{n-1}}{n} \geqslant \sqrt[n]{1\cdot x\ldots x^{n-1}}, \quad x>0,\ x\neq 1,$$

adică:

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{x^n-1}{x-1} \geqslant \sqrt[n]{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Dacă facem $x=n\neq 1$ obținem:

$$n^n-1 \geqslant n(n-1)\sqrt[n]{n^{\frac{(n-1)n}{2}}} = n^{\frac{n-1}{2}}\,n(n-1)$$

de unde:

$$n^{\frac{n+1}{2}}(n-1) \leqslant n^n-1,$$

adică inegalitatea cerută. Egalitate cînd $n=1$.

VI.18[1]**.** Inegalitatea este echivalentă cu:

$$1 \geqslant \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1}\cdot\frac{a_2}{a_2+b_2}\ldots\frac{a_n}{a_n+b_n}} + \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1}\cdot\frac{b_2}{a_2+b_2}\ldots\frac{b_n}{a_n+b_n}}. \qquad (1)$$

Dar, potrivit inegalității lui *Cauchy* (vezi III.P.129):

$$\sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1}\ldots\frac{b_n}{a_n+b_n}} \leqslant \frac{\frac{b_1}{a_1+b_1}+\ldots+\frac{b_n}{a_n+b_n}}{n}$$

și:

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1}\ldots\frac{a_n}{a_n+b_n}} \leqslant \frac{\frac{a_1}{a_1+b_1}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+b_n}}{n}$$

și, adunînd, obținem inegalitatea (1).

Scanned with OKEN Scanner

VI.19. Pentru ușurarea calculelor, se descompune greutatea G a blocului, după două direcții și anume: una paralelă cu planul înclinat și alta perpendiculară pe planul înclinat (vezi fig. VI.19).

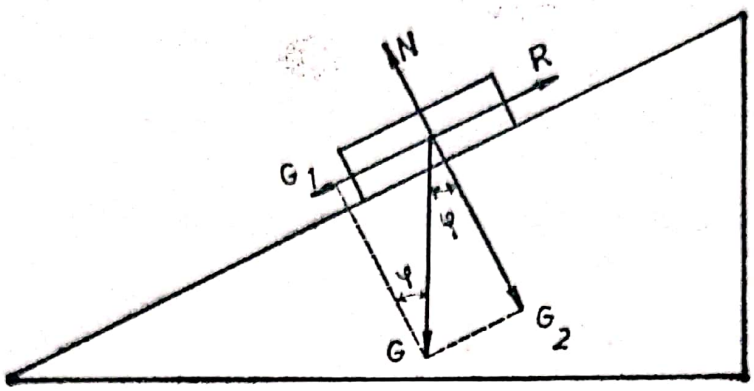


Fig. VI.19

Se obțin în felul acesta componentele G_1 și G_2. Dar efectul componentei G_2 este anulat de reacțiunea normală N a planului astfel că asupra blocului de oțel acționează numai forțele G_1 și R. Dar G_1 crește odată cu creșterea unghiului φ și corpul va rămîne încă nemișcat atunci cînd:

$$G_1 = R.$$

Dar:

$$G_1 = G \sin \varphi,$$

$$R = \mu N = \mu G_2 = \mu G \cos \varphi$$

Deci $G \sin \varphi = \mu G \cos \varphi$,

de unde:

$$\mu = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi = 0{,}4,$$

$$\varphi \approx 21°50'.$$

VI.20. Notînd $(a + b + 1)^n = x$, după oarecari calcule, se obține:

$$E(x) = (ax + b)^2 (bx + a)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar:

$$x = (a + b + 1)^n = \mathfrak{M}(a + b) + 1$$

deci:

$$E = [\mathfrak{M}(a + b) + a + b]^2[\mathfrak{M}(a + b) + b + a]^2 = \mathfrak{M}(a + b)^4$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

VI.21[1]. a°). Să arătăm că funcția este injectivă adică dacă $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ și $f(x_1) - f(x_2) = 0$ atunci $x_1 = x_2$.

În adevăr:

$$E = \operatorname{tg}\frac{x_1}{2} - \operatorname{tg}\frac{x_2}{2} + \frac{1}{\sin x_1} - \frac{1}{\sin x_2}$$

se scrie succesiv:

$$E = \frac{\sin\frac{x_1}{2}}{\cos\frac{x_1}{2}} - \frac{\sin\frac{x_2}{2}}{\cos\frac{x_2}{2}} + \frac{1}{\sin x_1} - \frac{1}{\sin x_2} =$$

$$= \frac{\sin\frac{x_1}{2}\cos\frac{x_2}{2} - \sin\frac{x_2}{2}\cos\frac{x_1}{2}}{\cos\frac{x_1}{2}\cos\frac{x_2}{2}} +$$

$$+ \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{\sin x_1 \sin x_2} = \frac{\sin\frac{x_1 - x_2}{2}}{\cos\frac{x_1}{2}\cos\frac{x_2}{2}} -$$

$$- \frac{2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2}}{4\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}\cos\frac{x_1}{2}\cos\frac{x_2}{2}} = \frac{\sin\frac{x_1 - x_2}{2}}{\cos\frac{x_1}{2}\cos\frac{x_2}{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\cdot\frac{2\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}-\cos\frac{x_1}{2}\cos\frac{x_2}{2}+\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}}{2\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{\cos\frac{x_1}{2}\cos\frac{x_2}{2}}\cdot\frac{3\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}-\cos\frac{x_1}{2}\cos\frac{x_2}{2}}{2\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}}\cdot$$

Fie acum $E=0$.

Cum domeniul de definiție este $\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă $\cos\frac{x_1}{2}$, $\cos\frac{x_2}{2}$; $\sin\frac{x_1}{2}$, $\sin\frac{x_2}{2}$ diferite de 0 deci $\sin\frac{x_1-x_2}{2}=0$ adică $x_1-x_2=2k\pi$, $k\in Z$, deci $k=0$ adică $x_1=x_2$ sau:

$$3\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}-\cos\frac{x_1}{2}\cos\frac{x_2}{2}=0$$

care dă:

$$\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}\operatorname{tg}\frac{x_2}{2}=\frac{1}{3}$$

astfel că, avînd în vedere restricția de domeniu, $x_1=x_2=\frac{\pi}{3}$.

Ca tare, funcția este injectivă.

Să arătăm acum că funcția f este surjectivă, adică pentru orice $y\in[\sqrt{3},\ 2]$, există $x\in\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încît $y=f(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Vom arăta că:

$$x = 2 \operatorname{arctg} \frac{y + \sqrt{y^2 - 3}}{3}.$$

satisface condițiile de mai sus.

Să arătăm că:

$$\frac{\pi}{3} \leqslant 2 \operatorname{arctg} \frac{y + \sqrt{y^2 - 3}}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

sau:

$$\frac{\pi}{6} \leqslant \operatorname{arctg} \frac{y + \sqrt{y^2 - 3}}{3} \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Radicalul are sens căci $y \geqslant \sqrt{3}$ și deci rezultă:

$$\frac{y + \sqrt{y^2 - 3}}{3} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}};$$

cu egalitatea atunci cînd $y = \sqrt{3}$.

Deoarece $y \leqslant 2$ rezultă:

$$y^2 - 3 \leqslant 9 - 6y + y^2$$

deci:

$$\sqrt{y^2 - 3} \leqslant |y - 3| = 3 - y$$

(deoarece $y \leqslant 2$) deci:

$$y + \sqrt{y^2 - 3} \leqslant 3.$$

În consecință:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \frac{y + \sqrt{y^2 - 3}}{3} \leqslant 1.$$

Pe de altă parte:

$$f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se poate verifica ușor că:

$$f\left(2 \operatorname{arctg} \frac{y+\sqrt{y^2-3}}{3}\right)=y.$$

b°). Funcția inversă este dată de ecuația:

$$y=\frac{1+3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

care dă $f^{-1}(y)=2 \operatorname{arctg} \frac{y+\sqrt{y^2-3}}{3}$.

VI.22[1]**.** Suma S poate fi scrisă:

$$S=n(C_2^2+C_3^2+\ldots+C_{p+1}^2)+[C_3^2+2C_4^2+ \\ +\ldots+(p-1)C_{p+1}^2].$$

Aplicînd identitatea cunoscută (vezi III.P.133):

$$C_p^n=C_{p-1}^{n-1}+C_{p-2}^{n-1}+\ldots+C_{n-1}^{n-1}$$

se obține:

$$n(C_2^2+C_3^2+\ldots+C_{p+1}^2)=nC_{p+2}^3.$$

Termenii din a doua paranteză a sumei S pot fi scriși astfel:

$$C_3^2+C_4^2+\ldots+C_{p+1}^2=C_{p+2}^3-C_2^2=C_{p+2}^3-C_3^3,$$
$$C_4^2+C_5^2+\ldots+C_{p+1}^2=C_{p+2}^3-(C_2^2+C_3^2)= \\ =C_{p+2}^3-C_4^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_{p+1}^2=C_{p+2}^3-(C_2^2+\ldots+C_p^2)=C_{p+2}^3-C_{p+1}^3$$

și făcînd suma pe coloane, găsim:

$$C_3^2+3C_4^2+\ldots+(p-1)C_{p+1}^2=(p-1)C_{p+2}^3-C_{p+2}^4.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă imediat că:

$$S = (p + n - 1)\, C_{p+2}^3 - C_{p+2}^4 =$$

$$= \frac{p(p+1)(p+2)}{24}[3(p-1) + 4n].$$

VI.23[2]. Din inegalitatea lui *Buneakovski* (vezi III.P.132) deducem imediat:

$$\left(\sum_{i=1}^{25} x_i\right)^2 \leqslant 25 \sum_{i=1}^{25} x_i^2$$

cu egalitate pentru $x_1 = \ldots = x_{25}$.

Inegalitatea propusă poate fi scrisă:

$$5x_{26}^2 - 2x_{26} \sum_{i=1}^{25} x_i + 5 \sum_{i=1}^{25} x_i^2 \geqslant 0,$$

care este acum evidentă deoarece $\Delta \leqslant 0$.

Generalizarea este imediată: dacă $x_1, \ldots, x_{n^2+1} \in \in R$ atunci:

$$n \sum_{i=1}^{n^2+1} x_i^2 \geqslant 2x_{n^2+1} \sum_{i=1}^{n^2} x_i,$$

demonstrația fiind analoagă.

VI.24[1]. Să arătăm că:

$$3^{2n} > 2^{2n}(n+1), \quad (\forall)\, n \in N^*.$$

Pentru $n = 1$ și $n = 2$ inegalitatea este justă. Presupunem:

$$3^{2n-2} > n2^{2n-2}, \text{ pentru } n > 2.$$

Cum:

$$3^2 n > 2^2(n+1), \quad (\forall)\, n \in N^*,$$

înmulțind se constată că afirmația este valabilă și pentru n și, în virtutea principiului inducției matematice, pentru orice $n \in N^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $n = 15$ atunci:

$$9^{15} > 2^{30} \cdot 16 = 2^{34}.$$

Așadar, primul număr este mai mare.

VI.25[1]. Raționăm prin inducție completă. Fie $S_i = p^i + q^i$. Dat fiind că $n - s \geqslant s$ rezultă $n \geqslant 2s$. Formula se verifică pentru $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$S_1 = 1,$$
$$S_2 = 1 - 2\alpha,$$
$$S_3 = 1 - 3\alpha,$$
$$S_4 = 1 - 4\alpha + 2\alpha^2,$$
$$S_5 = 1 - 5\alpha + 5\alpha^2,$$
$$\alpha = pq.$$

Admitem formula valabilă pentru valorile de la 1 la $n - 1$ inclusiv, n fiind un număr natural oarecare, $n \geqslant 2$. Ca atare:

$$S_{n-1} = 1 - \frac{n-1}{n-2} C^1_{n-2}\alpha + \frac{n-1}{n-3} C^2_{n-3}\alpha^2 -$$

$$- \ldots - (-1)^s \frac{n-1}{n-s-1} C^s_{n-s-1}\alpha^s + \ldots \qquad (1)$$

Să arătăm că ea este adevărată și pentru n. Înmulțind egalitatea (1) cu $p + q = 1$ avem:

$$S_n + \alpha S_{n-2} = 1 - \frac{n-1}{n-2} C^1_{n-2}\alpha +$$

$$+ \frac{n-1}{n-3} C^2_{n-3}\alpha^2 - \ldots$$

Dar:

$$S_{n-2} = 1 - \frac{n-2}{n-3} C^1_{n-3}\alpha + \frac{n-2}{n-4} C^2_{n-4}\alpha^2 +$$

$$+ \ldots + (-1)^s \frac{n-2}{n-s-2} C^s_{n-s-2}\alpha^s + \ldots$$

Deducem:

$$S_n = 1 - \left[1 + \frac{n-1}{n-2} C_{n-2}^1\right] \alpha + \left[\frac{n-2}{n-3} C_{n-3}^1 + \right.$$

$$\left. + \frac{n-1}{n-3} C_{n-3}^2\right] \alpha^2 + \ldots + (-1)^s \left[\frac{n-2}{n-s-1} C_{n-s-1}^{s-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{n-1}{n-s-1} C_{n-s-1}^s\right] \alpha^s + \ldots$$

Să calculăm coeficientul lui α^s:

$$A_s = \frac{n-1}{n-s-1} \cdot \frac{(n-s-1)(n-s-2)\ldots(n-2s)}{s!} +$$

$$+ \frac{n-2}{n-s-1} \cdot \frac{(n-s-1)\ldots(n-2s+1)}{(s-1)!} =$$

$$= \frac{(n-s-2)(n-s-3)\ldots(n-2s+1)}{s!} [(n -$$

$$- 1)(n-2s) + (n-2)s] =$$

$$= \frac{(n-s-2)(n-s-3)\ldots(n-2s+1)}{s!} (n^2 -$$

$$- ns - n) = n \cdot \frac{(n-s-1)\ldots(n-2s+1)}{s!} =$$

$$= \frac{n}{n-s} C_{n-s}^s.$$

Deci:

$$S_n = 1 - \frac{n}{n-1} C_{n-1}^1 \alpha + \frac{n}{n-2} C_{n-2}^2 \alpha^2 + \ldots +$$

$$+ (-1)^s \frac{n}{n-s} C_{n-s}^s \alpha^s + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Dacă în formula lui S_n punem $p = \sin^2 x$, $q = \cos^2 x$ obținem:

$$\sin^{2n} x + \cos^{2n} x = 1 - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{n}{n-1} C_{n-1}^1 \sin^2 2x + \\ + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{n}{n-2} C_{n-2}^2 \sin^4 2x - \ldots + (-1)^s \frac{1}{2^{2s}} \cdot \\ \cdot \frac{n}{n-s} C_{n-s}^s \sin^{2s} 2x + \ldots$$

În această formulă, făcînd $x = \frac{\pi}{4}$, obținem:

$$1 - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{n}{n-1} C_{n-1}^1 + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{n}{n-2} C_{n-2}^2 - \\ - \ldots + (-1)^s \frac{1}{2^{2s}} \cdot \frac{n}{n-s} C_{n-s}^s + \ldots = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

VI.26[1]. Demonstrăm prin inducție în raport cu n (numărul culorilor și al grupelor). Fie demonstrat pentru $n-1$ (pentru $n = 1$ este evidentă afirmația). Considerăm grupa n din împărțirea din enunț. Fie, de exemplu, în ea o bilă roșie. Sînt s bile roșii. Înlocuim fiecare bilă roșie, care nu este în grupa n cu o bilă de altă culoare din grupa n, astfel că la urmă toate bilele roșii ajung în grupa n. Celelalte $n-1$ grupe astfel modificate vor forma o distribuție (cele dintîi, afară de roșu) pentru $n-1$ culori și s bile de fiecare culoare, știind că între aceste $n-1$ bile sînt cîteva „false" (care au fost inițial în grupa n). Nu sînt mai mult de $s-1$ bile „false". Conform presupunerii inductive, din fiecare cele $n-1$ grupe, extragem cîte una obținînd $n-1$ bile de culori diferite. Le însemnăm pe toate cu numărul 1. Au rămas deci în cele $n-1$ grupe cîte $s-1$ bile, formînd astfel o distribuție pentru cazul $n-1$, $s-1$. Repetăm, punînd acum numărul 2, etc., pînă cînd toate bilele din primele $n-1$ grupe vor căpăta unul din numerele 1, 2, ..., s. Oricare ar fi $k \leqslant s$, există $n-1$ bile de culori diferite, care au numărul k, cîte una din fiecare grupă. Știind că sînt maximum

$s-1$ bile „false", există un k astfel ca nici una din bilele care au numărul k nu este „falsă". Dacă ne întoarcem la aranjamentul inițial, nici una din bilele care au numărul k nu va fi mutată (repetăm că nici una nu este roșie). Acum este ușor de extras cîte o bilă din fiecare din cele n grupe (în aranjamentul inițial) astfel ca să obținem n bile de culori diferite. Anume: din grupa n scoatem pe cea roșie iar din fiecare cele $n-1$ grupe rămase scoatem bila cu numărul k.

VI.27. a°). Prima fracție se mai poate scrie:

$$\frac{(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)}{2\sin(A+B)\cos(A-B)}=$$

$$=\frac{4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin(A+B)\cos(A-B)}$$

$$=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{2\sin(A+B)\cos(A-B)}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}(A-B).$$

Pentru b°). are loc:

$$\frac{\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}}{\sin A+\sin B}=\frac{\frac{1-\cos A}{2}-\frac{1-\cos B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=$$

$$=\frac{1-\cos A-1+\cos B}{4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=$$

$$=\frac{\cos B-\cos A}{4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}}{4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c°). Să arătăm că:

$$0 \leqslant \frac{\sin 2A + \sin 2B}{\cos(A - B)} \leqslant 2.$$

Cu formulele cunoscute se obține:

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B}{\cos(A - B)} = \frac{2 \sin(A + B) \cos(A - B)}{\cos(A - B)} =$$

$$= 2 \sin(A + B).$$

Dar, $0 < A + B < 180°$ deci $0 < \sin(A + B) < 1$, de unde $0 < 2 \sin (A + B) < 2$.

d°). Este clar că:

$$\frac{\cos A - \cos B}{\sin \frac{A - B}{2}} = \frac{-2 \sin \frac{A - B}{2} \sin \frac{A + B}{2}}{\sin \frac{A - B}{2}} =$$

$$= -2 \sin \frac{A + B}{2},$$

de unde rezultă $0 > -2 \sin \frac{A + B}{2} > -2$.

VI.28. Din relația dată în enunț se obține:

$$y = \frac{m - x \cos a}{\sin a},$$

$$x^2 + y^2 = \frac{x^2 \sin^2 a + m^2 + x^2 \cos^2 a - 2mx \cos a}{\sin^2 a} =$$

$$= \frac{x^2 + m^2 - 2mx \cos a}{\sin^2 a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $\sin^2 a$ este oconstantă, $x^2 + y^2$ are valoarea minimă odată cu numărătorul $x^2 + m^2 - 2mx \cos a$, care are loc pentru $x = m \cos a$ iar în acest caz:

$$x^2 + y^2 = \frac{m^2 \cos^2 a^2 + m^2 - 2m^2 \cos^2 a}{\sin^2 a} =$$

$$\frac{m^2(1 - \cos^2 a)}{\sin^2 a} = m^2.$$

Prin urmare, $x^2 + y^2 \geqslant m^2$, semnul egal avînd loc dacă $x = m \cos a$, $y = m \sin a$ deci cînd $\frac{y}{x} = \frac{m \sin a}{m \cos a} = \operatorname{tg} a$. Aici, în plus, $a \neq \pi k + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

VI.29. a°). Pentru $x, y, z \geqslant 0$ are loc inegalitatea (vezi III.P.130):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant \frac{9}{x + y + z}$$

Dacă punem aici $x = \frac{r_a(r_b + r_c)}{p}$ și analoagele și ținem seama de faptul că $p = \frac{r_a}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}$ și analoagele, găsim:

$$\frac{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}{r_b + r_c} + \frac{\operatorname{ctg} \frac{B}{2}}{r_a + r_c} + \frac{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{r_a + r_b} \geqslant \frac{9}{2p}$$

care devine:

$$\sum \frac{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}} \geqslant \frac{9}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

și care se transformă imediat în:

$$\sum \frac{1}{1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}} \geqslant \frac{9}{2}$$

folosind formula:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1.$$

VI.30[1]. Fie $\alpha_i = \operatorname{arctg} x_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ deci $x_i = \operatorname{tg} \alpha_i$.

În acest caz:

$$\operatorname{tg}\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i\right) = \frac{S_1 - S_3}{1 - S_2 + S_4} \tag{1}$$

unde:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{4} \operatorname{tg} \alpha_i,$$

$$S_2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{4} \operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_j,$$

$$S_3 = \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{4} \operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_j \operatorname{tg} \alpha_k,$$

$$S_4 = \sum_{i<j<k<t} \operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_k \operatorname{tg} \alpha_t = \prod_{i=1}^{4} \operatorname{tg} \alpha_i.$$

Făcînd înlocuirea și ținînd seama de formulele lui *Vieta* se obține:

$$S_1 = \frac{4}{\sqrt{3}},\ S_2 = 0,\ S_3 = -\frac{4}{\sqrt{3}},\ S_4 = -1.$$

Substituind aceste valori în (1) rezultă că:

$$\operatorname{tg}\left(\sum_{i=1}^{4} \operatorname{arctg} x_i\right) = +\infty$$

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$\sum_{i=1}^{4} \operatorname{arctg}\ x_i = \frac{\pi}{2}.$$

Aşadar:

$$\frac{2 - \sum_{i=1}^{4} \operatorname{arctg}\ x_i}{2 + \sum_{i=1}^{4} \operatorname{arctg}\ x_i} = \frac{4 - \pi}{4 + \pi}.$$

VI.31. Considerînd segmentul determinat de centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC şi de centrul ω al cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$ avem:

$$O\omega = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}.$$

Dar:

$$O\omega^2 = \frac{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{4} = \frac{R^2}{4}$$

(vezi cercul lui *Euler*, V.2.4.5). Rezultă:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} = 2$$

de unde, avînd în vedere relaţia sinusului:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Unghiurile A, B, C pot fi unghiurile pe care le face o diagonală a unui paralelipiped dreptunghic cu muchiile care pornesc din acelaşi vîrf cu diagonala considerată.

VI.32[1]**.** În formula:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

Scanned with OKEN Scanner

făcînd $x = 20°$ obținem:

$$3 \sin 20° - 4 \sin^3 20° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$8 \sin^3 30° - 6 \sin 20° + \sqrt{3} = 0,$$

ceea ce arată că ecuația propusă admite rădăcina $x = \sin 20°$.

Fie:

$$8x^3 - 6x + \sqrt{3} = (x - \sin 20°)(8x^2 + ax + b) = 8x^3 - x^2(8 \sin 20° - a) - x(a \sin 20° - b) - b \sin 20°,$$

de unde, prin egalarea coeficienților:

$$\begin{cases} 8 \sin 20° - a = 0 \\ a \sin 20° - b = 6 \end{cases} \text{ de unde } \begin{matrix} a = 8 \sin 20°, \\ b = 8 \sin^2 20° - 6, \end{matrix}$$

astfel că pentru aflarea celorlalte două rădăcini avem de rezolvat ecuația:

$$8x^2 + 8x \sin 20° + 8 \sin^2 20° - 6 = 0,$$

de unde:

$$x_{2,3} = \frac{-4 \sin 20° \pm \sqrt{16 \sin^2 20° - 64 \sin^2 20° + 48}}{8} =$$

$$= \frac{-4 \sin 20° \pm \sqrt{48 - 48 \sin^2 20°}}{8} =$$

$$= \frac{-4 \sin 20° \pm 4\sqrt{3} \cos 20°}{8} =$$

$$= -\frac{1}{2} \sin 20° \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20° = \cos 120° \sin 20° \pm$$

$$\pm \sin 120° \cos 20° = \sin(20° \pm 120°),$$

deci $x_2 = \sin 140°$, $x_3 = -\sin 100°$.

Scanned with OKEN Scanner

VI.33. Ca logaritmii să existe este necesar ca:

$$\frac{1}{2}\sin 2x > 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin x > 0,\\ \cos x > 0,\end{array}\right\} \Rightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ecuația se mai scrie succesiv:

$$\frac{4}{\log_{\sin x} \sin x \cos x \log_{\cos x} \sin x \cos x} = 1,$$

$$\frac{4}{(\log_{\sin x}\sin x + \log_{\sin x}\cos x)(\log_{\cos x}\sin x + \log_{\cos x}\sin x)} =$$

$$= 1,$$

$$\frac{4}{(1 + \log_{\sin x}\cos x)\,(1 + \log_{\cos x}\sin x)} = 1,$$

și cum:

$$\log_{\sin x}\cos x = \frac{1}{\log_{\cos x}\sin x};$$

cu notația $\log_{\sin x}\cos x = y$, ecuația se scrie:

$$\frac{4}{(1+y)\left(1+\frac{1}{y}\right)} = 1 \text{ sau } 4y = (y+1)^2,$$

de unde $y_1 = y_2 = 1$ deci:

$$\log_{\sin x}\cos x = 1 = \log_{\sin x}\sin x$$

adică $\sin x = \cos x$ și cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă $x = \frac{\pi}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

VI.34. Notăm:

$$\arcsin \sqrt{(x+1)^2 + x + 2} = \beta,$$

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \alpha$$

și ecuația se scrie:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{sau} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

deci:

$$\sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$$

Ca atare:

$$\sin(\arcsin \sqrt{x^2 + 3x + 3}) = \cos(\operatorname{arctg} \sqrt{x(x+1)})$$

și cum:

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

obținem succesiv:

$$\sqrt{x^2 + 3x + 3} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}};$$

$$\sqrt{(x^2 + 3x + 3)(x^2 + x + 1)} = 1,$$

$$x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2 = 0,$$

$$(x+1)^2 (x^2 + 2x + 2) = 0$$

și cum ecuația:

$$x^2 + x + 2 = 0$$

nu admite rădăcini reale, rezultă $x = -1$, unica soluție reală a ecuației propuse.

VI.35*. Fie $P(\cos x, \sin x)$, un polinom de gradul n în $\cos x$, $\sin x$. Gradul unui astfel de polinom poate fi

Scanned with OKEN Scanner

însă modificat, fără ca polinomul să difere de cel inițial. În adevăr, înmulțind cu 1, dat de:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

se obține:

$$P_n(\cos x, \sin x) = (\cos^2 x + \sin^2 x) P_n(\cos x, \sin x) =$$
$$= P_{n+2}(\cos x, \sin x)$$

În felul acesta, este necesar să introducem definiția gradului unui polinom trigonometric.

Vom spune că n este *gradul efectiv* al polinomului $P_n(\cos x, \sin x)$ cînd grupul omogen al termenilor de gradul cel mai înalt:

$$\mu_n(\cos x, \sin x)$$

din $P_n(\cos x, \sin x)$ nu este divizibil cu binomul $\cos^2 x + \sin^2 x$. Are loc, în acest caz următoarea:

Teoremă. Fiind dat un polinom trigonometric $P_n(\cos x, \sin x)$ de grad efectiv n, el admite o descompunere în $2n$ factori de forma:

$$P_n(\cos x, \sin x) \equiv$$
$$\equiv C \sin \frac{x - x_1}{2} \sin \frac{x - x_2}{2} \dots \sin \frac{x - x_{2n}}{2}$$

unde C este o constantă iar $x_1, \dots, x_{2n}$ sînt arce reale sau imaginare, distincte sau confundate.

Demonstrație: Fie:

$$P_n = \mu_n + \mu_{n-1} + \dots + \mu_1 + \mu_0 \qquad (1)$$

descompunerea lui P_n în grupe de termeni omogeni în $\cos x$ și $\sin x$. Fie substituția:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \lambda. \qquad (2)$$

Pentru grupa μ_n:

$$\mu_n(\cos x, \sin x) = \frac{\mu_n(1 - \lambda^2, 2\lambda)}{(1 + \lambda^2)^n}. \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie pentru comoditate:

$$1 - \lambda^2 = p;\ 2\lambda = q, \tag{4}$$

deci:

$$1 + \lambda^2 = \sqrt{p^2 + q^2}. \tag{5}$$

Să arătăm că $\mu_n(1 - \lambda^2, 2\lambda)$ este prim cu $1 + \lambda^2$ (în sensul că $\mu_n(1 - \lambda^2, 2\lambda)$ nu se divide cu $1 + \lambda^2$). Observăm, pentru aceasta, că $1 + \lambda^2$ nu se poate descompune în factori de gradul întîi cu coeficienți reali. Deci dacă polinomul cu coeficienți reali μ_n nu ar fi prim cu polinomul $1 + \lambda^2$, ar urma chiar să se dividă cu $1 + \lambda^2$. Deci $\mu_n^2(1 - \lambda^2, 2\lambda)$ ar trebui să se dividă cu $(1 + \lambda^2)^2$, adică, folosind notațiile (4) și (5), ar urma ca $\mu_n^2(p, q)$ să se dividă cu $(p^2 + q^2)$.

Însă μ_n^2 este un pătrat perfect deci dacă $\mu_n^2(p, q)$ se divide cu $(p^2 + q^2)$, deoarece $(p^2 + q^2)$ nu se descompune în factori liniari, urmează că $\mu_n^2(p, q)$ se divide cu $(p^2 + q^2)$ deci că $\mu_n(p, q)$ se divide cu $p^2 + q^2$, absurd, deoarece P_n a fost presupus un polinom trigonometric efectiv de gradul n. Ca atare, $\mu_n(p, q)$ nu este divizibil cu $p^2 + q^2$.

Deci polinomul (3) dă naștere, prin substituția (2), la următoarea funcție ireductibilă:

$$\mu_n \equiv \frac{V_m(\lambda)}{(1 + \lambda^2)^n}. \tag{6}$$

Din (3) rezultă că gradul m al numărătorului este:

$$m \leqslant 2n. \tag{7}$$

Oricare din ceilalți termeni μ_{n-k}, $(k \neq 0)$ vor da naștere, prin substituția (2), la funcțiile raționale:

$$\mu_{n-k} \equiv \frac{V_{m_k}(\lambda)}{(1 + \lambda^2)^{n-k}} \tag{8}$$

$(k = 1, 2, \ldots)$ cu:

$$m_k \leqslant 2(n - k), \tag{9}$$

care nu mai sînt, în mod necesar, ireductibile.

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în (1) expresiile (6) și (8), se obține:

$$P_n \equiv \frac{V_m(\lambda) + (1+\lambda^2)V_{m_1} + (1+\lambda^2)^2 V_{m_2}(\lambda) + \dots}{(1+\lambda^2)^n} \quad (10)$$

Observăm că numărătorul fracției (10) este prim cu $(1+\lambda^2)$ căci însuși $V_m(\lambda)$ este, cum s-a arătat, prim cu acest binom.

În fond, polinomul P_n din (10) este echivalent, în baza transformării (2), cu fracția ireductibilă:

$$P_n = \frac{Q_m(\lambda)}{(1+\lambda^2)^n}, \quad m \leqslant n, \quad (11)$$

Q fiind de gradul m.

Dar, potrivit teoremei lui *d'Alembert*, ecuația:

$$Q_m(\lambda) = 0$$

are un număr m de rădăcini, reale sau imaginare (distincte sau confundate).

Ca atare:

$$Q_m(\lambda) \equiv q_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_m) \quad (12)$$

unde q_0 este o constantă. Să considerăm o rădăcină reală λ_k (dacă o asemenea rădăcină există). Putem găsi întotdeauna un arc real x_k astfel încît:

$$\operatorname{tg} \frac{x_k}{2} = \lambda_k. \quad (13)$$

Dacă λ_k este imaginar (diferit însă de $+i$ și $-i$) se demonstrează în *Analiză* că se poate găsi un arc imaginar x_k astfel încît egalitatea anterioară să fie îndeplinită, fapt ce îl vom admite fără demonstrație. Observăm, în plus, că $\lambda_k (k = \overline{1, m})$ nu poate lua nici una din valorile $+i$, $-i$ căci valorile acestea sînt rădăcinile numitorului din fracția (11) la care numărătorul și numitorul nu au factori algebrici comuni.

În felul acesta, pentru fiecare valoare $\lambda_k (k = \overline{1, m})$ se poate determina, cu aproximația unui multiplu de 2π, un arc x_k, soluție a ecuației (13).

Scanned with OKEN Scanner

Deci polinomul Q_m devine:

$$Q_m \equiv q_0 \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x_1}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{tg}\frac{x_2}{2}\right) \ldots \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x_m}{2}\right),$$

$$Q_m = q_0 \frac{\sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2}\ldots\sin\frac{x-x_m}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x_1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x_2}{2}\ldots\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x_m}{2}},$$

sau, în definitiv:

$$Q_m \equiv C \frac{\sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2}\ldots\sin\frac{x-x_m}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}\right)^m} \qquad (14)$$

unde C este o nouă constantă, egală cu:

$$\frac{q_0}{\cos\frac{x_1}{2}\cos\frac{x_2}{2}\ldots\cos\frac{x_m}{2}}.$$

Pe de altă parte, numitorul din (11) devine, în virtutea substituției (2):

$$(1+\lambda^2)^n = \frac{1}{\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2n}}$$

deci, în fond:

$$P_n \equiv C \cdot \frac{\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\left(\cos\frac{x}{2}\right)^m} \sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2}\ldots\sin\frac{x-x_m}{2},$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, deoarece $2n \geqslant m$,

$$P_n = C\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2n-m} \sin\frac{x-x_1}{2} \dots \sin\frac{x-x_m}{2}$$

și cum:

$$\cos\frac{x}{2} = -\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

rezultă:

$$P_n = (-1)^{2n-m} C \underbrace{\sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2} \dots \sin\frac{x-x_k}{2}}_{m \text{ factori}} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\left[\sin\frac{x-\pi}{2} \dots \sin\frac{x-\pi}{2}\right]}_{(2n-m \text{ factori})}$$

deci orice polinom trigonometric P (cos x, sin x) de grad efectiv n se poate descompune într-un produs de $2n$ factori de forma:

$$P_n = K \sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2} \dots \sin\frac{x-x_{2n}}{2}$$

unde K este o constantă iar x_k, $k = \overline{1, 2n}$, arce reale, sau imaginare.

Conform acestei teoreme:

$$\sin mx = C \sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_1}{2} \dots \sin\frac{x-x_{2n}}{2}$$

C fiind o constantă deoarece sin mx se poate scrie ca un polinom P_m(cos x, sin x), n fiind gradul efectiv al polinomului P_m(cos x, sin x) = sin mx. Este clar că $n \leqslant m$ și totalitatea rădăcinilor reale sau imaginare ale ecuației:

$$\sin mx = 0 \qquad (15)$$

Scanned with OKEN Scanner

este dată de șirul:

$$\frac{x}{2} \equiv \frac{x_k}{2} \pmod{\pi}, \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n)$$

sau:

$$x \equiv x_k \pmod{2\pi}, \quad (k = 1, \ldots, 2n). \tag{16}$$

Dar rădăcinile ecuației (15) sînt date de:

$$mx \equiv 0, \quad mx \equiv \pi \pmod{2\pi} \tag{17}$$

obținîndu-se $2m$ arce distincte, necongruente modulo 2π, ca soluții reale ale ecuației (15). Trebuie deci ca aceste $2m$ valori să figureze printre cele $2n$ ale șirului (16). În felul acesta:

$$n \geqslant m$$

deci $n = m$ adică m este gradul efectiv. Mai mult, rezultă că valorile (16) sînt cele $2m$ valori necongruente ale congruențelor (17), deci într-o ordine oarecare, arcele:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{m}; \quad x_3 = \frac{2\pi}{m}; \ \ldots, \ x_{2m} = \frac{(2m-1)\,\pi}{m}.$$

În felul acesta:

$$\sin mx = C \sin\frac{x-0}{2} \sin\frac{x-\frac{\pi}{m}}{2} \sin\frac{x-\frac{2\pi}{m}}{2} \ldots$$

$$\ldots \sin\frac{x-\frac{m-1}{m}\,\pi}{2} \sin\frac{x-\frac{m+1}{m}\,\pi}{2}$$

și cum:

$$\sin\frac{x-\frac{k\pi}{m}}{2} \sin\frac{x-\frac{(k+m)\,\pi}{m}}{2} = -\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{k\pi}{m}\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

formula devine:

$$\sin mx = \frac{(-1)^m C}{2^m} \sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{m}\right) \ldots$$

$$\ldots \sin\left(x - \frac{m-1}{m}\pi\right),$$

de unde, pentru $x = \frac{\pi}{2m}$:

$$C = \frac{2^m \sin \frac{\pi}{2}}{(-1)^m \sin \frac{\pi}{2m} \sin\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{\pi}{m}\right) \ldots \sin\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{m-1}{m}\pi\right)}$$

adică formula propusă.

VI.36[1]. Evident:

$$P_4(x) = (1 + 4x)(2 + 3x)(3 + 2x)(4 + x)$$

iar pentru $x = 6^n$ se obține:

$$1 + 4 \cdot 6^n = 1 + 4(\mathfrak{M}5 + 1)^n = 1 + \mathfrak{M}5 + 4 = \mathfrak{M}5,$$
$$1 + 4 \cdot 6^n = 1 + 4(\mathfrak{M}5 + 1)^n = 1 + \mathfrak{M}5 + 4 = \mathfrak{M}5,$$
$$2 + 3 \cdot 6^n = 2 + 3(\mathfrak{M}5 + 1)^n = 2 + \mathfrak{M}5 + 3 = \mathfrak{M}5,$$
$$3 + 2 \cdot 6^n = 3 + 2(\mathfrak{M}5 + 1)^n = 3 + \mathfrak{M}5 + 2 = \mathfrak{M}5,$$
$$4 + 1 \cdot 6^n = 4 + \quad (\mathfrak{M}5 + 1)^n = 4 + \mathfrak{M}5 + 1 = \mathfrak{M}5.$$

Deoarece fiecare factor este divizibil cu 5, produsul lor este divizibil cu 5^4, fapt ce demonstrează enunțul.

VI.37. Rezolvînd sistemul prin una din metodele cunoscute, obținem:

$$x = \frac{1 - ab^2}{1 - a^3};$$

$$y = \frac{b(b - a)}{1 - a^3},$$

$$z = \frac{b - a}{1 - a^3}.$$

Dacă $a^3 \neq 1$, sistemul este compatibil determinat. Dacă $a = 1$ și $b \neq 1$, sistemul este imposibil. Dacă $a = b = 1$, sistemul se reduce la ecuația:

$$x + y + z = 1,$$

adică sistemul este compatibil nedeterminat.

VI.38[1]. a°). Evident:

$$kC_n^k = k \cdot \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1} = n \cdot C_n^{k-1} -$$

$$-(k-1)\, C_n^{k-1} = nC_n^{k-1} - (k-1)\,;$$

$$\cdot \frac{n-k+2}{k-1} C_n^{k-2} = nC_n^{k-1} - nC_n^{k-2} + (k-2)\, C_n^{k-2}.$$

Din aproape în aproape vom obține:

$$kC_n^k = n(C_n^{k-1} - C_n^{k-2} + C_n^{k-3} - \ldots). \qquad (1)$$

Analog:

$$(k-1)\, C_n^{k-1} = n(C_n^{k-2} - C_n^{k-3} + C_n^{k-4} - \ldots) \qquad (2)$$

$$(k-2)C_n^{k-2} = n(C_n^{k-3} - C_n^{k-4} + C_n^{k-5} - \ldots) \qquad (3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2 \cdot C_n^2 = n(C_n^1 - C_n^0); \qquad (k-1)$$

$$1 \cdot C_n^1 = nC_n^0. \qquad (k)$$

Adunînd, obținem prima relație.

b°). Din cele (k) relații de la punctul a°) deducem:

$$kC_n^k - (k-1)C_n^{k-1} + (k-2)C_n^{k-2} - (k-3)\, C_n^{k-3} +$$

$$+ \ldots = n(C_n^{k-1} - 2 \cdot C_n^{k-2} + 3 \cdot C_n^{k-3} - \ldots),$$

de unde:

$$kC_n^k - (n+k-1)\, C_n^{k-1} + (2n+k-2)\, C_n^{k-2} - \ldots = 0$$

adică tocmai relația din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

VI.39³. a°). Prin M ducem paralelele MQ ($Q \in BD$) la (AD), MN ($N \in AC$) la (BC). Planul π este determinat de (MN, MQ). Paralelele prin N și Q respectiv la (AD) și (BC) se găsesc în planul π și taie pe DC în același punct P (proprietatea liniei mijlocii într-un triunghi), mijlocul lui DC. Deci patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

b°). Ca să fie dreptunghi, trebuie ca $\sphericalangle QMN = 90°$, adică $MQ \perp MN$ și deci paralelele lor AD și BC sînt perpendiculare, $AD \perp BC$. Deci tetraedrul trebuie să aibă cele două muchii opuse AD și BC perpendiculare. Ca să fie romb, trebuie ca $AD = BC$, iar ca să fie pătrat, $AD = BC$ și $AD \perp BC$.

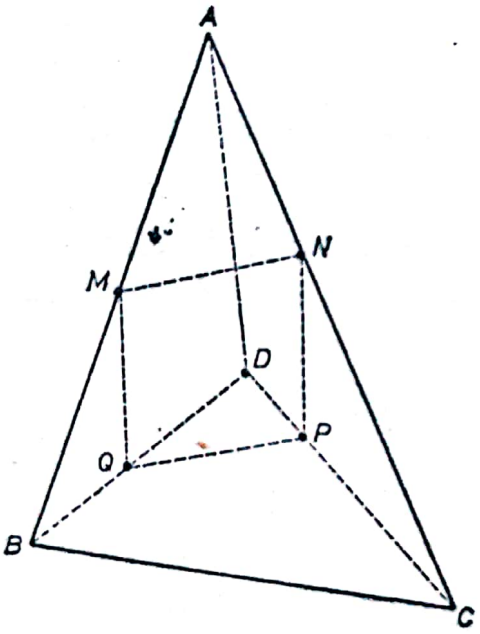


Fig. VI.39

c°). Ducînd prin P dreptele $RP \parallel AC$ și $PS \parallel BD$, $R \in AD$, $S \in BC$, obținem paralelogramul $MSPR$, cu diagonalele RS și MP, care se taie în O. Dar O fiind mijlocul diagonalei MP, este centrul paralelogramului $MNPQ$. Deci R, O, S sînt coliniare, fiind situate pe diagonala RS.

d°). Perpendicularele din D și C pe planul paralelogramului $MNPQ$ au picioarele, respectiv în D' și C'. Triunghiurile dreptunghice $DD'P$, $CC'P$ sînt egale, avînd ipotenuzele egale, $DP = CP$, și un unghi ascuțit egal și anume $\sphericalangle PDD' = \sphericalangle PCC'$ (avînd laturile respectiv paralele și ambele fiind ascuțite). Rezultă că $DD' = CC'$. Corpul de deasupra planului $MNPQ$ este format din piramida patrulateră $DMNPQ$ și piramida triunghiulară $DAMN$. Corpul de dedesubtul planului $MNPQ$ este format din piramida patrulateră $CMNPQ$ și piramida triunghiulară $CBMQ$. Pira-

Scanned with OKEN Scanner

midele patrulatere au același volum deoarece au aceeași bază și înălțimile egale ($DD' = CC'$). Deci:

$$\text{vol } (DMNPQ) = \text{vol } (CMNPQ), \tag{1}$$

$$\text{vol } (DAMN) = \text{vol } (NDAM) =$$

$$= \frac{1}{3}\text{aria } (DAM) \cdot NN_1 = \frac{1}{6}\text{aria } (ABD) \cdot NN_1, \tag{2}$$

NN_1 fiind perpendiculara din N pe fața DAB. Dar și:

$$\text{vol } (CBMQ) = \frac{1}{3}\text{aria } (BMQ) \cdot CC_1 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\text{aria } (ABD)}{4} \cdot CC_1 = \frac{1}{12}\text{aria } (ABD) \cdot CC_1,$$

CC_1 fiind perpendiculara din C pe planul DAB; dar din triunghiurile asemenea NN_1A și CC_1A rezultă:

$$\frac{CC_1}{NN_1} = \frac{AC}{NA} = 2;\ CC_1 = 2NN_1$$

deci:

$$\text{vol } (CBMQ) = \frac{1}{12}\text{aria } (ABD) \cdot 2NN_1 =$$

$$= \frac{1}{6}\text{aria } (ABD) \cdot NN_1. \tag{3}$$

Din (2) și (3) rezultă că piramidele triunghiulare au aceeași arie și proprietatea este demonstrată.

VI.40[1]. Scriem puterea punctelor A, B, C față de cercul $A'B'C'$:

$$AB' \cdot AB'' = AC' \cdot AC'',$$

$$BA' \cdot BA'' = BC' \cdot BC'' \qquad P = AA' \cap BB'$$

$$CA' \cdot CA'' = CB' \cdot CB''. \qquad P' = AA'' \cap BB''$$

Scanned with OKEN Scanner

Din aceste relații obținem:

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{AB''}{B''C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{CA''}{A''B}\cdot\frac{BC'}{C'A}\cdot\frac{BC''}{C''A}=1$$

(teorema lui *Carnot*), ceea ce, conform teoremei lui *Ceva*:

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1$$

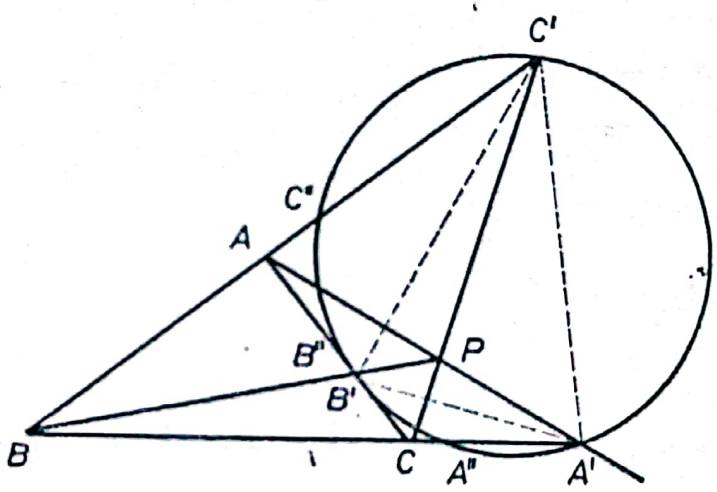


Fig. VI.40

(deoarece AA', BB', CC' sînt concurente în P) devine:

$$\frac{AB''}{B''C}\cdot\frac{CA''}{A''B}\cdot\frac{BC''}{C''A}=1,$$

de unde, potrivit teoremei reciproce a lui *Ceva*, dreptele AA''. BB'', CC'' sînt concurente.

VI.41[2]. Făcînd $x\to x-1$, obținem:

$$g(x-1)=\frac{g(x)}{1-g(x)}.$$

Dar:

$$g(x-2)=g(x-1-1)=\frac{g(x-1)}{1-g(x-1)}=$$

$$=\frac{\frac{g(x)}{1-g(x)}}{1-\frac{g(x)}{1-g(x)}}=\frac{g(x)}{1-2g(x)},$$

$$g(x-3)=g(x-2-1)=\frac{g(x-2)}{1-g(x-2)}=$$

$$=\frac{\frac{g(x)}{1-2g(x)}}{1-\frac{g(x)}{1-2g(x)}}=\frac{g(x)}{1-3g(x)}$$

și, prin inducție:

$$g(x-n)=\frac{g(x)}{1-ng(x)} \tag{1}$$

pentru orice $n\in N^*$.

Dacă există x_0 astfel ca $g(x_0)\neq 0$ atunci, luînd $n>\frac{1}{g(x_0)}$ obținem $g(x-n)<0$, contrar ipotezei că g ia numai valori pozitive.

Deci nu există nici un x_0 astfel încît $g(x_0)\neq 0$ deci, în concluzie, $g(x)=0$, $(\forall)\ x\in R$. Nu este posibil ca $g(x)=\frac{1}{n}$, $(\forall)\ x\in R$ (n fixat) deoarece în acest caz, din relația $(1)_* g(x-n)=+\infty$.

VI.42[3]. Să arătăm că:

$$[a\pm 1]_*=[a]_*\pm 1.$$

În adevăr, dacă $a=k+\varphi$, $\varphi\in[0,1)$, $k\in Z$, atunci:

$$a\pm 1=k\pm 1+\varphi$$

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$[a \pm 1]_* = k \pm 1 = [a]_* \pm 1.$$

Cu această observație, ecuația devine:

$$[4x]_* + [2x]_* + 5x - \left[x + \frac{1}{2}\right]_* - [x^2]_* -$$

$$- [4x]^* - [x]^* - 6 = 0.$$

Să arătăm că:

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = [2x]_* - [x]_*.$$

În adevăr, orice $x \in R$ se poate scrie fie ca $x = k + \alpha$, fie ca $x = k + \frac{1}{2} + \alpha$ unde $k \in Z$ iar $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$. În ambele cazuri, $[x]_* = k$.

Pentru $x = k + \alpha$:

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = \left[k + \alpha + \frac{1}{2}\right]_* = k, \; [2x]_* =$$

$$= [2k + 2\alpha]_* = 2k = 2[x]_*$$

deci:

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = [2x]_* - [x]_*.$$

Pentru $x = k + \frac{1}{2} + \alpha$:

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = \left[k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \alpha\right]_* =$$

$$= k + 1; \; [2x]_* = [2k + 1 + 2\alpha]_* = 2k + 1,$$

$$[x]_* = \left[k + \frac{1}{2} + \alpha\right]_* = k$$

Scanned with OKEN Scanner

deci și în acest caz:

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]_* = [2x]_* - [x]_*.$$

Cu aceasta, ecuația devine:

$$[x^2]_* = 5x - 6.$$

Din definiția părții întregi rezultă:

$$x^2 - 1 < [x^2]_* \leqslant x^2,$$

deci:

$$x^2 - 1 < 5x - 6 \leqslant x^2$$

și deducem de aici $5x - 6 \geqslant 0$ (deoarece $[x^2]_* \geqslant 0$) deci $x > 1$ și, rezolvînd dubla inecuație se obține:

$$x \in (1,\ 2] \cup \left[3,\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Ca prime soluții, $x = 2$ și $x = 3$. Cum $\frac{5+\sqrt{5}}{2} < 4$ este clar că $x^2 \in (1,\ 4] \cup [9,\ 16)$. Pentru $[x^2]_* = 2$, $5x - 6 = 2$ deci $x = \frac{8}{5}$ care verifică. Pentru $[x^2]_* = 3$, $x = \frac{9}{5}$, soluție care, de asemenea, verifică. Cazurile $[x^2]_* = 2$ și $[x^2]_* = 3$ au fost tratate anterior. Pentru $[x^2]_* = 10$, $x = \frac{16}{5}$, soluție care verifică. În continuare se obțin soluțiile $x = \frac{17}{5}$ și $x = \frac{18}{5}$. Ca atare, pentru ecuația din enunț avem soluțiile:

$$2,\ 3,\ \frac{8}{5},\ \frac{9}{5},\ \frac{16}{5},\ \frac{17}{5},\ \frac{18}{5}.$$

Scanned with OKEN Scanner

VI.43². Potrivit inegalității lui *Cauchy*:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 > n \sqrt[n]{(n!)^3}$$

și cum:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

(vezi III.P.136) se obține:

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} > n \sqrt[n]{(n!)^3}$$

adică:

$$\left[\frac{n(n+1)^2}{4}\right]^{\frac{n}{3}} > (n!).$$

Pentru $n = 21$, obținem:

$$2541^7 > 21!,$$

deci al doilea număr este mai mare.

VI.44. Este clar că:

$$x^3 - 12x^2 + 33x - 4 = (x-4)(x^2 - 8x + 1),$$

de unde și rădăcinile cerute:

$$x_1 = 4;\ x_2 = 4 + \sqrt{15};\ x_3 = 4 - \sqrt{15}.$$

VI.45. Dat fiind că $\{a\}_* \in [0, 1)$ $(\forall)\ a \in R$ obținem $0 \leqslant x^2 - 2 < 1$ deci cu condiția $x \geqslant 0$, $x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Fie $x = \sqrt{2} + t$, $t \in [0, \sqrt{3} - \sqrt{2})$ deci:

$$t^2 + 2t\sqrt{2} = \left\{\frac{t}{2}\right\}_* = \frac{t}{2},$$

deoarece $0 \leqslant \frac{t}{2} < \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} < 1$, de unde $t = 0$

deci $x = \sqrt{2}$ și $t = \frac{1}{2} - 2\sqrt{2}$ care nu convine.

VI.46[2]. Observăm că dacă din masa celor 13 greutăți scădem masa uneia dintre ele, obținem un număr par (greutățile sînt numere întregi), deci toate greutățile au aceeași paritate. Dacă toate sînt impare, scădem 1 din fiecare și proprietatea din enunț se menține. Analog, dacă toate sînt pare și împărțim pe fiecare cu 2.

După un anumit număr finit de operații, ajungem că toate greutățile să fie 0.

Dar prin aceste operații, din două greutăți neegale se obțin tot două neegale, deci cele inițiale au fost egale.

VI.47. a°). Cu formulele $r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c) = S$ (vezi IV.11.2.7) se obține:

$$2r_br_c - bc = 2 \cdot \frac{S^2}{(p-b)(p-c)} - bc = 2 \cdot$$

$$\cdot \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-b)(p-c)} - bc = 2p(p-a) -$$

$$- bc = \frac{1}{2}[(c+b)^2 - a^2 - 2bc] =$$

$$= \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = bc \cos A.$$

Analog, rezultă:

$$2r_cr_a - ca = ca \cos B,$$

$$2r_ar_b - ab = ab \cos C$$

și deci relația din enunț.

Raționînd similar, obținem relații analoage.

Pentru punctul b°) observăm că dacă în inegalitatea:

$$(x+y+z)^3 \geqslant 27xyz;\ x, y, z > 0$$

(vezi III.P.128) facem:

$x = a = 2R \sin A$, $y = b = 2R \sin B$, $z = c = 2R \sin C$,

obținem tocmai relația din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

VI.48*. Faptul că o mulțime de puncte este conținută într-un cerc de rază 1, este evident echivalent cu faptul că cercurile cu centrele în punctele respective și de rază 1 au intersecția nevidă. Să arătăm că, fiind date n cercuri în plan, cu proprietatea că oricare trei au intersecția nevidă, atunci toate cercurile au un punct comun.

Fie m numărul maxim de cercuri cu intersecția nevidă și, evident, $m \geqslant 3$. Să notăm cu $A_1, \ldots, A_m$ cercurile respective și cu G intersecția lor.

Să presupunem că $m < n$, adică există un cerc A astfel ca $A \cap G = \emptyset$. Există însă o dreaptă d care separă discul A de regiunea G adică $d \cap A = \emptyset$, $d \cap G = \emptyset$ și d intersectează orice segment determinat de un punct din G și unul din A.

Există i și j, $i, j \in \overline{1, m}$, astfel ca:

$$(A_i \cap d) \cap (A_j \cap d) = \emptyset.$$

Altfel ar rezulta că:

$$(A_1 \cap d) \cap (A_2 \cap d) \cap \ldots \cap (A_n \cap d) \neq \emptyset$$

adică $d \cap G \neq \emptyset$, ceea ce este fals.

Conform ipotezei:

$$A \cap A_i \cap A_j \neq \emptyset.$$

Fie X un punct din $A \cap A_i \cap A_j$ și Y un punct din G iar XY segmentul determinat de ele. Obținem:

$$XY \cap d \neq \emptyset.$$

Fie $Z = XY \cap d$, deci $XY \subset A_i$ și analog $XY \subset A_j$ deci $Z \in A_i \cap A_j$. Dar $Z \in d$ implică $Z \in (A_i \cap d) \cap (A_j \cap d)$, ceea ce este fals. Deci presupunerea făcută este falsă și, în definitiv, $m = n$.

Rezultă de aici că toate cercurile au intersecția nevidă deci există un cerc de rază 1 care conține toate punctele.

VI.49*. Unei submulțimi S a lui X îi putem pune în corespondență un cuvînt $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ cu $\alpha_i = 0$ dacă $i \notin S$ și $\alpha_i = 1$ dacă $i \in S$. Acest cuvînt format numai din simbolurile 0 și 1 nu va conține doi de 1 alăturați

Scanned with OKEN Scanner

din cauza restricției impuse mulțimii S de a nu conține doi întregi consecutivi.

Dar, la două submulțimi S_1 și S_2 diferite ale lui X le corespund două cuvinte diferite, în caz contrar, ele sînt egale, rezultă că această aplicație, avînd în vedere că și oricărui cuvînt $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ îi corespunde o submulțime S a lui X și numai una, este o bijecție astfel că vom număra aceste cuvinte deoarece două mulțimi între care putem stabili o bijecție au același număr de elemente (este vorba despre mulțimi finite).

Să considerăm $n-k$ cifre egale cu 0 și numerotate de la 1 la $n-k$ și să le adăugăm k cifre egale cu 1 astfel încît să nu avem doi de 1 adiacenți. Fiecare cifră 1 poate fi caracterizată prin numărul de ordine al cifrei care o precede. Deci trebuie să alegem k întregi din mulțimea $\{0, 1, \ldots, n-k\}$ ceea ce este posibil în $f(n, k) = C_{n-k+1}^{k}$ moduri.

Deci numărul submulțimilor lui X care nu conțin doi întregi consecutivi (inclusiv mulțimea vidă căreia îi corespunde un cuvînt $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ cu $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$) este egal cu:

$$F_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]_*} C_{n-k+1}^{k}.$$

Ne-am oprit la indicele $\left[\frac{n+1}{2}\right]_*$ deoarece pentru ca simbolul C_{n-k+1}^{k} să existe trebuie ca $n-k+1 \geqslant k$ deci $k \leqslant \frac{n+1}{2}$, adică ultima valoare luată de k este $\left[\frac{n+1}{2}\right]_*$.

VI.50*. Să presupunem că se dau n obiecte notate $i_1, i_2, \ldots, i_n$ pe care vrem să le aranjăm în m căsuțe distincte.

Dacă nu se pune nici o restricție asupra unei astfel de aranjări, atunci numărul total de posibilități de

Scanned with OKEN Scanner

aranjare este egal cu m^n, adică cu numărul funcțiilor definite pe o mulțime cu n elemente, cu valori într-o mulțime cu m elemente.

În adevăr, primul obiect i_1 poate ocupa oricare din cele m căsuțe deci poate fi distribuit în m moduri, al doilea, de asemenea, în m moduri, ..., al n-lea obiect i_n poate fi dispus, de asemenea, în m moduri, rezultînd, în final, $\underbrace{m \cdot n \ldots m}_{n \text{ ori}} = m^n$ posibilități de aranjare.

Vedem că fiecare aranjare este, de fapt, o funcție definită pe mulțimea obiectelor și cu valori în mulțimea căsuțelor. Dacă punem restricția ca obiectele să fie aranjate cel mult într-o căsuță, rezultă că funcția care definește aranjarea este injectivă, deoarece nu există două obiecte cu aceeași imagine (care merg într-o aceeași căsuță). Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie ca numărul căsuțelor să fie superior sau egal numărului obiectelor, deci $m \geqslant n$ și numărul de posibilități de aranjare este egal cu $m(m-1)\ldots(m-n+1)$, adică cu aranjamente de m luate cîte n. În adevăr, primul obiect, i_1 poate fi aranjat în m căsuțe, al doilea în $m-1$ căsuțe, excluzînd deci căsuța ocupată de i_1,..., al n-lea obiect poate fi aranjat în $m-n+1$ căsuțe (aceeași observație). Dacă $m=n$, atunci $m(m-1)\ldots(m-n+1)=m!$ și funcția care definește aranjarea este injectivă și surjectivă, deci bijectivă.

Dacă punem condiția ca aranjarea să se facă astfel încît să nu rămînă nici o căsuță goală, atunci problema are soluție numai dacă numărul obiectelor este mai mare sau egal cu numărul căsuțelor deci $n \geqslant m$ iar numărul de aranjări este egal cu numărul funcțiilor surjective de la o mulțime cu n elemente pe o mulțime cu m elemente și care este egal cu:

$$S_{n,m} = m^n - C_m^1(m-1)^n + C_m^2(m-2)^n - \\ - C_m^3(m-3)^n + \ldots + (-1)^{m-1}\, m,$$

fapt ce îl vom admite fără demonstrație.

Această rezolvare dă răspuns la o problemă identică: în cîte moduri putem împărți n obiecte diferite

la m persoane ($n \geqslant m$) așa încît fiecare persoană să primească cel puțin un obiect, rezultatul fiind tot $S_{n,m}$.

Să presupunem acum că ne interesează și ordinea celor n obiecte în cele m căsuțe, o aranjare putînd conține și căsuțe goale.

Să găsim deci numărul de aranjări a n obiecte în m căsuțe ordonate și să notăm acest număr cu $T_{n,m}$ Să considerăm pentru aceasta o aranjare a $n-1$ obiecte în m căsuțe ordonate:

$$i_1 i_2 \ldots |i_k i_{k+1} \ldots| \ldots i_{n-1}.$$

Această aranjare se poate nota printr-un șir de $n-1+m-1=n+m-2$ simboluri (litere și bare).

Un nou obiect i_n se poate adăuga unei astfel de aranjări în $n-1+m-1+1=n+m-1$ moduri diferite, ținînd seama că ordinea obiectelor într-o căsuță este esențială. Cum în acest mod se obțin toate aranjările a n obiecte în căsuțe ordonate fără repetiții, rezultă că:

$$T_{n,\,m} = (m+n-1)\,T_{n-1,\,m}.$$

Iterînd această relație de recurență obținem:

$$T_{n,m} = (m+n-1)\,T_{n-1,m} = (m+n-1)\,(m+n-2)\,T_{n-2,m} = \ldots = (m+n-1)\ldots(m+1)T_{1,m}.$$

Dar $T_{1,\,m}$ este tocmai numărul de moduri de aranjare a unui obiect în m căsuțe și este egal, evident, cu m, deci:

$$T_{n,m} = (m+n-1)\ldots(m+1)m = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}.$$

Fie acum A o mulțime de obiecte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ total ordonate în raport cu o relație de ordine, adică:

$$a_1 < \ldots < a_m$$

(de exemplu, o mulțime de numere reale ordonate cu relația obișnuită de ordine între numerele reale).

Scanned with OKEN Scanner

Amintim că o funcție f: $\{1, 2, \ldots, n\} \to A$ se numește crescătoare dacă $i \leqslant j$ implică $f(i) \leqslant f(j)$. O astfel de funcție se mai numește și cuvînt de lungime n, asociind în mod univoc funcției f cuvîntul $f(1)\, f(2) \ldots f(n)$ format cu „litere" din mulțimea A. Elementele $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ nu se înmulțesc, ci se scriu alăturat ca literele într-un cuvînt obișnuit. Deci un cuvînt $x_1 \ldots x_n$ cu $x_i \in A$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$ este crescător dacă $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. De exemplu, dacă A este mulțimea $\{a, b, c, d\}$ cu ordinea $a < b < c < d$, cuvintele crescătoare de lungime 3 formate cu litere din A sînt următoarele 20:

aaa, abb, acc, add, aab, abc, acd, aac, abd, aad,
bbd, bbc, bbb, bcc, bcd, bdd, ccc, ccd, cdd, ddd.

Pentru a găsi numărul cuvintelor crescătoare de lungime n formate cu m simboluri, vom proceda astfel: fiecărei aranjări a n obiecte, $1, 2, \ldots, n$, în m căsuțe ordonate, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ îi putem pune în corespondență un cuvînt crescător astfel:

$$\underbrace{|4|}_{a_1}\ \underbrace{|2,\ 5,\ 3,|}_{a_2}\ \underbrace{|\ |}_{a_3}\ \underbrace{|1,\ 6,\ 7|}_{a_4} \to a_1 a_2 a_2 \quad a_4 a_4 a_4$$

adică a_i se scrie de atîtea ori cîte obiecte sînt în căsuța a_i, indiferent de natura lor. Dacă în căsuța a_i nu se găsește nici un obiect, atunci litera a_i nu apare în cuvîntul crescător astfel format. Permutînd acum obiectele $1, 2, \ldots, n$ în $n!$ moduri diferite se observă că obținem un același cuvînt crescător, deoarece la alcătuirea unui cuvînt crescător prin procedeul de mai sus nu contează natura obiectelor, ci numai numărul lor. Întrucît un același cuvînt crescător provine exact din $n!$ aranjări diferite în căsuțe ordonate, rezultă că numărul cuvintelor crescătoare cu n litere formate dintr-un alfabet cu m litere, care este egal cu numărul funcțiilor crescătoare definite pe o mulțime cu n elemente cu valori într-o mulțime cu m elemente, ambele total ordonate, este egal cu:

$$\frac{T_{n,m}}{n!} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!},$$

Scanned with OKEN Scanner

număr care se mai numește *combinări cu repetiție* de m obiecte luate cîte n și care este, evident, egal cu C^n_{m+n-1}.

Revenind la problema care a făcut obiectul acestei expuneri, să notăm $S_k = \sum_{i=1}^{k} u_i$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sumele parțiale. Fiecare sumă este definită printr-un cuvînt $S_1 S_2 \ldots S_{n-1}$ crescător, cu proprietatea că $0 \leqslant S_1 \leqslant S_2 \leqslant \ldots \leqslant S_{n-1} \leqslant m$.

În adevăr, $u_i = S_i - S_{i-1}$, pentru $2 \leqslant i \leqslant n-1$ iar $u_1 = S_1$ și $u_n = m - S_{n-1}$

Deci numărul de moduri de a scrie pe m ca sumă a n întregi pozitivi este egal cu numărul cuvintelor crescătoare de lungime $n-1$, formate dintr-un alfabet cu m litere $\{0, 1 \ldots, m-1\}$, cu ordinea naturală:

$$0 < 1 < \ldots < m-1.$$

Deci numărul căutat este:

$$\frac{T_{n-1,\, m+1}}{(n-1)!} = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!\, m!}.$$

VI.51[1].. a°). Notăm:

$$\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}} = a, \quad \sqrt[3]{7-4\sqrt{3}} = b.$$

Evident:

$$x_1 = a + b, \quad ab = \sqrt[3]{49-48} = 1.$$

Folosind relația:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

obținem:

$$x^3 = 14 + 3x$$

deci x_1 este rădăcină a ecuației date.

b°). Rădăcinile x_2 și x_3 sînt date de ecuația:

$$\frac{x^3 - 3x - 14}{x - x_1} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

deci de ecuația:

$$x^2 + x_1 x + (x_1^2 - 3) = 0,$$

de unde:

$$x_{2,3} = \frac{-x_1 \pm \sqrt{12 - 3x_1^2}}{2}.$$

Este evident că $x_1 > 2$ deci $12 - 3x_1^2 < 0$ și prin urmare rădăcinile x_2 și x_3 nu sînt reale deci singura rădăcină reală este x_1.

VI.52[3]**.** Afirmația este valabilă oricare ar fi n, în sensul că se pot găsi n puncte în plan cu proprietatea cerută.

Fie d o dreaptă în plan și $A_2, \ldots, A_n \in d$, $A_1 \notin d$, $A_1A_2 \perp d$ (vezi fig. VI.52). Ideea este de a găsi o valoare pentru A_1A_2 astfel ca mărimea acestui segment să formeze numere pitagoreice cu mărimea segmentelor A_1A_j, A_2A_j, $j = 3, \ldots, n$. (este vorba de numere întregi).

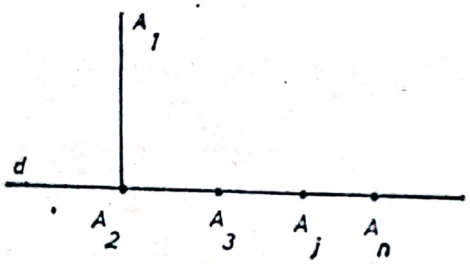


Fig. VI.52

Fie:

$$A_2A_j = a_j^2 - b_j^2$$

cu $a_j, b_j \in N$ și trebuie ca $A_1A_2 = 2a_jb_j$ să fie constant pentru orice $j = 3, \ldots, n$. Luînd:

$$A_1A_2 = 2^n = 2 \cdot 2^{n-j+1} \cdot 2^{j-2}, \ (\forall)\ j \in \overline{3, n}$$

găsim $a = 2^{n-j+1}$, $b_j = 2^{j-2}$, deci $A_1A_j = a_j^2 + b_j^2$.

VI.53. Cum:

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

se obține:

$$S = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \\ + \ldots + \frac{1}{(n+m)!} - \frac{1}{(n+m+1)!} = \frac{1}{n!} - \\ - \frac{1}{(m+n+1)!} = \frac{(n+m+1)! - n!}{n!(n+m+1)!}.$$

VI.54. Fie A' proiecția lui A pe planul P. Notăm $\sphericalangle A'OM = x$ și fie A_1 proiecția lui A' pe OM. După teorema celor trei perpendiculare, $AA_1 \perp OM$. Deci aria $(OMA) = \frac{1}{2} OM \cdot AA_1 = \frac{1}{2} R \cdot AA_1$ (R fiind raza cercului). Notăm $OA' = a$ (constantă) și $AA' = d$ (constantă) și deci:

$$A'A_1 = OA' \sin x = a \sin x,$$

$$AA_1 = \sqrt{A'A^2 + A'A_1^2} = \sqrt{d^2 + a^2 \sin^2 x}$$

și astfel:

$$\text{aria } OMA = \frac{R}{2} \sqrt{d^2 + a^2 \sin^2 x}.$$

Aria este maximă cînd $\sin^2 x$ este maxim, adică atunci cînd $x = 90°$ sau $x = 270°$. Deci poziția lui M se află la intersecția cercului cu diametrul perpendicular pe OA'. Se obțin două poziții pentru M, M_1 și M_2 și două triunghiuri egale OM_1A, OM_2A cu ariile:

$$\frac{1}{2} R \sqrt{a^2 + d^2}.$$

Aria este minimă cînd $\sin^2 x = 0$ deci cînd $x = 0°$ sau $x = 180°$ și este în acest caz egală cu $\frac{Rd}{2}$.

VI.55. a°). Ecuația se scrie succesiv:

$$\log_3 \frac{\log_2 x - 9}{1 - 4 \log_x 4} = \log_3 9,$$

$$\frac{\log_2 x - 9}{1 - \frac{8}{\log_2 x}} = 9, \quad \log_2 x - 9 = 9 - \frac{72}{\log_2 x},$$

$$\log_2^2 x - 18 \log x + 72 = 0,$$

$$(\log_2 x - 12)(\log_2 x - 6) = 0,$$

$$\log_2 x = 12 \text{ deci } x = 2^{12},$$

$$\log_2 x = 6 \text{ deci } x = 2^6.$$

Scanned with OKEN Scanner

b°). Evident:

$$1 + \cos 2ax = 2\cos^2 ax$$
$$1 - \cos 2ax = 2\sin^2 ax$$

și ecuația devine:

$$\frac{2\cos^2 ax}{2\sin ax} = \frac{2\sin ax \cos ax}{2\sin^2 ax}.$$

Ecuația are sens pentru $\sin ax \neq 0$ deci pentru $x \neq \frac{k\pi}{a}$, $k \in Z$, astfel că se obține:

$$\frac{2\cos ax}{2\sin ax}(\cos ax - 1) = 0,$$

de unde $\cos ax = 0$ adică $ax = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, deci $x = \frac{(2k+1)\pi}{2a}$, $k \in Z$ și $\cos ax = 1$ adică $x = \frac{2k\pi}{a}$, $k \in Z$, care nu corespunde căci dă $\sin ax = 0$, caz exclus anterior. Astfel se obțin soluțiile:

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2a}, \quad k \in Z, \ a \neq 0.$$

VI.56. a°). Evident:

$\measuredangle BB'M = 180° - (B + 90° - \alpha) = 90° - (B - \alpha)$,
$\measuredangle MC'C = 180° - (C + 90° - \alpha) = 90° - (C - \alpha)$

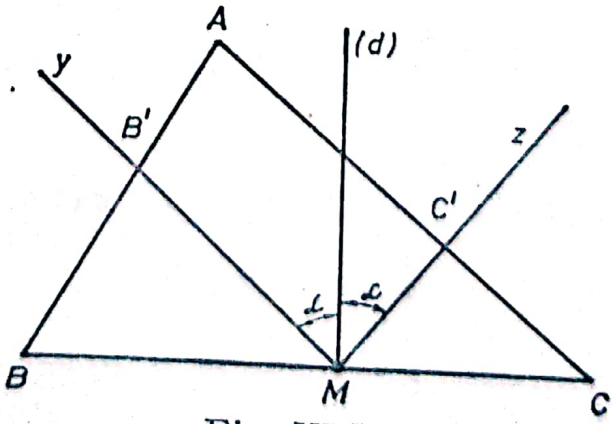


Fig. VI.56

În $\Delta BB'M$ aplicăm teorema sinusului și obținem:

$$\frac{BM}{\cos(B-\alpha)} = \frac{BB'}{\cos\alpha} = \frac{B'M}{\sin B};$$

$$BB' = \frac{x\cos\alpha}{\cos(B-\alpha)}.$$

Analog, din $\Delta MC'C$ se obține:

$$\frac{CC'}{\cos\alpha} = \frac{a-x}{\cos(C-\alpha)}; \quad CC' = \frac{(a-x)\cos\alpha}{\cos(C-\alpha)}.$$

b°). Ca triunghiul $B'MC'$ să existe în condițiile din enunț, trebuie ca $BB' < c$ și $CC' < b$; rezultă succesiv:

$$\frac{x\cos\alpha}{\cos(B-\alpha)} < c; \quad x < \frac{c\cos(B-\alpha)}{\cos\alpha};$$

$$\frac{(a-x)\cos\alpha}{\cos(C-\alpha)} < b; \quad x > a - \frac{b\cos(C-\alpha)}{\cos\alpha};$$

$$a - b\cos C - b\sin C\,\mathrm{tg}\,\alpha < x < c\cos B + c\sin B\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Dar:

$$a = b\cos C + c\cos B$$

și deci:

$$c\cos B - b\sin C\,\mathrm{tg}\,\alpha < x < c\cos B + c\sin B\,\mathrm{tg}\,\alpha. \qquad (1)$$

c°). În acest caz, $x = c\cos B$ și inegalitatea dublă (1) este satisfăcută deci triunghiul $B'MC'$ există.

Scanned with OKEN Scanner

Din a°):

$$BB' = \frac{c \cos B \sin A}{\cos\left(B + A - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{c \cos B \sin A}{\sin(B + A)} =$$

$$= \frac{c \cos B \sin A}{\sin C} = \frac{c}{\sin C} \cos B \sin A =$$

$$= \frac{a}{\sin A} \cos B \sin A = a \cos B$$

și, evident, aceasta înseamnă că $CB' \perp AB$.

Tot așa:

$$CC' = \frac{(a - c \cos B) \sin A}{\cos\left(C + A - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{(a - c \cos B) \sin A}{\sin B} =$$

$$= \frac{a}{b}(a - c \cos B) = \frac{a}{b}(b \cos C + c \cos B -$$

$$- c \cos B) = a \cos C$$

ceea ce ne indică $BC' \perp AC$. Deci CB', BC' sînt înălțimi în triunghiul ABC.

VI.57. Grupînd convenabil, ecuația ia forma:

$$(x - 1)(x^2 - 2mx + m - 1) = 0$$

de unde:

$$x_1 = 1, \; x_{2,3} = m \pm \sqrt{m^2 - m + 1}$$

Cum $m^2 - m + 1 > 0$, $(\forall)\, m \in R$, ecuația admite întotdeauna trei rădăcini reale. Pentru $m = 0$, se obține $(x - 1)^2 (x + 1) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

VI.58. Dacă X este o parte a lui E, vom nota complementara lui X în raport cu E prin $\mathbf{C}_X$. Folosind formula:

$$M - N = M \cap \mathbf{C}_N,$$

distributivitatea reuniunii față de intersecție și relațiile lui *De Morgan*:

$$\mathbf{C}_{M \cup N} = \mathbf{C}_M \cap \mathbf{C}_N; \quad \mathbf{C}_{M \cap N} = \mathbf{C}_M \cap \mathbf{C}_N,$$

membrul stîng al egalității din enunț devine:

$$[(A \cup B) - C] \cup [(B \cup C) - A] \cup [(C \cup A) - B] =$$
$$= [(A \cup B) \cap \mathbf{C}_C] \cup [(B \cup C) \cap \mathbf{C}_A] \cup [(C \cup A) \cap \mathbf{C}_B] =$$
$$= [(A \cup B \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup \mathbf{C}_A)] \cap [(B \cup C \cup \mathbf{C}_C) \cap$$
$$\cap (\mathbf{C}_C \cup \mathbf{C}_A)] \cup [(C \cup A) \cap \mathbf{C}_B] = [(A \cup B \cup C) \cap E \cap$$
$$\cap E \cap (\mathbf{C}_C \cup \mathbf{C}_A)] \cup [(C \cup A) \cap \mathbf{C}_B] = [(A \cup B \cup C) \cap$$
$$\cap \mathbf{C}_{C \cap A}] \cup [(C \cup A) \cap \mathbf{C}_B] = (A \cup B \cup C \cup C \cup A) \cap$$
$$\cap (A \cup B \cup C \cup \mathbf{C}_B) \cap [(C \cup A) \cup \mathbf{C}_{C \cap A}] \cap (\mathbf{C}_{C \cap A} \cup \mathbf{C}_B) =$$
$$= (A \cup B \cup C) \cap E \cap E \cap (\mathbf{C}_{C \cap A} \cup \mathbf{C}_B) =$$
$$(A \cup B \cup C) \cap (\mathbf{C}_{C \cap A} \cup \mathbf{C}_B) = A \cup B \cup C \cap \mathbf{C}_{A \cap B \cap C} =$$
$$= (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$$

și egalitatea este dovedită.

VI.59[3]**.** Pentru $n = 4$, avem configurația din fig. VI.59.1 deci, evident, este posibil un asemenea lucru.

Pentru $n = 5$, împărțirea nu este posibilă.

Pentru $n = 6$ împărțim pătratul dat în 9 pătrate egale, apoi patru dintre acestea le unificăm într-un singur pătrat (vezi fig. VI.59.2).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $n = 7$, împărțim pătratul în 4 pătrate egale și apoi unul dintre acestea în încă 4 pătrate egale (vezi fig. VI.59.3).

Pentru $n = 8$, împărțim pătratul în 16 pătrate egale apoi 9 dintre acestea le unificăm într-unul singur (vezi fig. VI.59.4).

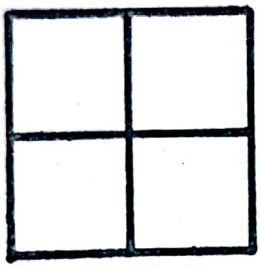


Fig. VI.59.1

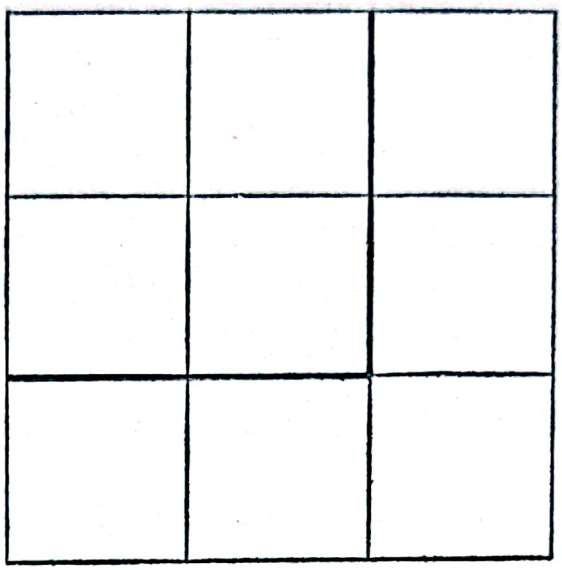


Fig. VI.59.2

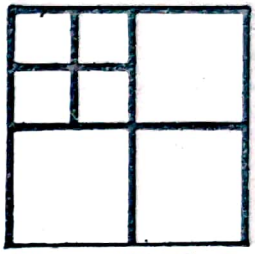


Fig. VI.59.3

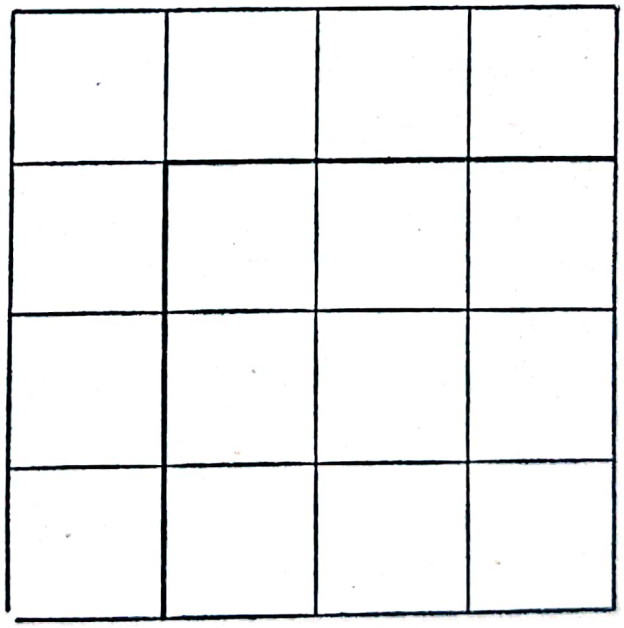


Fig. VI.59.4

Presupunem că putem împărți un pătrat în $6, 7, 8, 9, \ldots,$ n pătrate ($n \geqslant 9$). Dat fiind că îl putem împărți în $n - 2$ pătrate, împărțind un pătrat din configurație în altele 4, obținem un număr total de $(n - 3) + 4 = n + 1$

pătrate deci, potrivit principiului inducției matematice, putem împărți pătratul în $n > 5$ pătrate.

În cazul cubului, observăm că un cub poate fi înlocuit cu 8 sau 27 cuburi mai mici deci dacă putem umple cubul cu n cuburi atunci îl putem umple și cu $n + 7$ sau cu $n + 26$ cuburi. Va fi suficient să arătăm că afirmația este valabilă pentru $n = 58, \ldots, 64$, restul, anume că pentru $n = 8$, $n = 20$ (împărțim cubul în 27 de cuburi și unificăm 8), $n = 27$, $n = 38$ (împărțim cubul în 64 de cuburi și unificăm 27), etc., fiind evident, iar pentru $n \geqslant 58$, prin inducție. Vom reveni însă asupra cazului $n < 58$.

Pentru $n = 58$, împărțim întîi cubul în 27 de cuburi egale apoi 8 dintre ele le înlocuim cu un cub. Dintre cuburile mici rămase, împărțim două în cîte 27 de cuburi fiecare, apoi în fiecare din ele unim cîte 8 cuburi. Se obțin:

$$(27 - 7) + 2 \cdot 26 - 2 \cdot 7 = 58.$$

Pentru $n = 59$, împărțim cubul în 64 cuburi egale apoi 27 dintre acestea le unim într-un cub și din cele rămase 3 le împărțim în cîte 8 cuburi egale, deci:

$$64 - 26 + 3 \cdot 7 = 59.$$

Pentru $n = 60$, împărțim cubul în 27 cuburi egale apoi cîte unul din acestea în 27 și respectiv 8 cuburi deci:

$$27 + 26 + 7 = 60.$$

Pentru $n = 61$, împărțim cubul în 27 cuburi egale apoi 4 din cuburile care apar pe una din fețe, formînd un pătrat pe această față, le împărțim în cîte 27 cuburi egale. Aceste cuburi se pot uni cîte 8 ca să formeze 9 cuburi. Din celelalte cuburi de la împărțirea inițială se mai pot, de asemenea, uni 8 cuburi ca să formeze un singur cub și obținem în final:

$$23 + 4 \cdot 27 - 8 \cdot 9 + 9 - 8 + 1 = 61 \text{ cuburi.}$$

Pentru $n = 62$, împărțim cubul în 27 cuburi egale apoi 5 dintre ele în cîte 8 cuburi. Se găsesc în felul acesta deci:

$$22 + 8 \cdot 5 = 62 \text{ cuburi.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $n = 63$, analog cu $n = 61$:

$$63 = 27 + 3 \cdot 26 - 6 \cdot 7.$$

Pentru $n = 64 = 4^3$, este evident că se poate face o împărțire a cubului.

Revenim la cazul $n < 58$.

Pentru $n = 15$, împărțim cubul în 8 cuburi și unul dintre acestea în alte 8.

Pentru $n = 34$, împărțim cubul în 8 și unul dintre acestea în 27 cuburi.

Pentru $n = 41$, împărțim unul din cuburile de la cazul $n = 34$ în 8 cuburi.

Pentru $n = 38$, împărțim cubul în 64 de cuburi iar apoi unificăm 27.

Pentru cazul $n = 55$, considerăm cazul $n = 48$ și repetăm operația făcută anterior.

Pentru $n = 22$, împărțim cubul în 8 cuburi și două dintre acestea în $8 : 6 + 2 \cdot 8 = 22$.

Pentru $n = 48$, împărțim cubul în 22 cuburi și unul dintre acestea în $27 : 21 + 27 = 48$.

Pentru $n = 29$, împărțim cubul în 8 cuburi și 3 dintre acestea în cîte $8 : 5 + 3 \cdot 8 = 29$.

Pentru $n = 36$, împărțim cubul în 8 cuburi și 4 dintre acestea tot în $8 : 4 + 4 \cdot 8 = 36$.

Pentru $n = 43$, împărțim cubul în 8 cuburi și 5 dintre acestea tot în $8 : 3 + 5 \cdot 8 = 43$.

Pentru $n = 50$, împărțim cubul în 8 cuburi și 6 dintre acestea tot în $8 : 2 + 6 \cdot 8 = 50$.

Pentru $n = 45$, împărțim cubul în 38 cuburi și unul dintre ele în 8: $37 + 8 = 45$.

Pentru $n = 52$, împărțim cubul în 45 cuburi și unul dintre ele în $8 : 44 + 8 = 52$.

Pentru $n = 34$, împărțim cubul în 27 cuburi și unul dintre ele în $8 : 26 + 8 = 34$.

Pentru $n = 57$, împărțim cubul în 50 cuburi și unul dintre ele în $8 : 49 + 8 = 57$.

Pentru $n = 39$, împărțim cubul în 20 (împărțind cubul în 27 de cuburi și unim 8) cuburi și unul dintre ele în 27 în care unificăm $8 : 19 + 20 = 39$.

Pentru $n = 46$, împărțim cubul în 39 cuburi și unul dintre ele în $8 : 38 + 7 = 46$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $n = 53$, împărțim cubul în 27 cuburi și unul dintre ele în $27 : 26 + 27 = 53$.

Pentru $n = 42$, împărțim cubul în $5^3 = 125$ cuburi și unificăm $4^3 = 64$; $5^3 - 4^3 + 1 = 42$.

Lăsăm pe seama cititorului studierea celorlalte cazuri, constituind, credem un bun exercițiu de perspicacitate.

VI.60. Aducem expresia la același numitor și obținem:

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} - \sqrt{(a-b)(a-c)} =$$

$$= \sqrt{(a+b)(a-c)} + \sqrt{(a-b)(a+c)}.$$

Ridicînd la pătrat, desfăcînd parantezele și făcînd reducerea termenilor asemenea, obținem:

$$\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} = bc.$$

Printr-o nouă ridicare la pătrat, obținem:

$$a^2(a^2 - b^2 - c^2) = 0$$

și cum $a \neq 0$ rezultă:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ceea ce probează că, în adevăr, triunghiul este dreptunghic.

VI.61. Pentru $x \in (-\infty, 3)$, $x = \frac{7-a}{2} < 3$ și deci $a > 1$.

Pentru $x \in [3, 4]$, $a = 1$ și în acest caz orice $x \in [3, 4]$ constituie soluție.

Pentru $x \in [4, +\infty)$, $x = \frac{a+7}{2} > 4$, valabil pentru $a > 1$.

Rezultă că ecuația admite rădăcini reale pentru $a \in$ orice $[1, +\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

VI.62[1]. Evident:

$$\sin nA + \sin nB + \sin nC =$$

$$= 2 \sin \frac{n(A+B)}{2} \cos \frac{n(A-B)}{2} + 2 \sin \frac{nC}{2} \cos \frac{nC}{2}.$$

Cum $n = 2k+1$, $k \in N$, și $A+B+C = \pi$ rezultă:

$$2 \sin \frac{n(A+B)}{2} = \sin \frac{n(\pi - C)}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{nC}{2}$$

și în mod analog:

$$\sin \frac{nC}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n(A+B)}{2}.$$

Înlocuind în prima din relațiile stabilite, găsim:

$$E = 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{nC}{2} \cos \frac{n(A-B)}{2} +$$

$$+ 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n(A+B)}{2} \cos \frac{nC}{2} =$$

$$= 2(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{nC}{2} \left[\cos \frac{n(A+B)}{2} + \cos \frac{n(A-B)}{2} \right].$$

După transformarea sumei de cosinusuri în produs rezultă:

$$E = 4(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{nA}{2} \cos \frac{nB}{2} \cos \frac{nC}{2}.$$

VI.63[2]. a°). Este clar că:

$$MI = MF, \; M'I = M'E$$

deci perimetrul triunghiului AMM' este egal cu $AF + AE$. Analog, perimetrul triunghiului $N'CN$ este $EC + CD$ iar perimetrul triunghiului BPP' este $BD + BF$ deci, sumînd, obținem afirmația.

Scanned with OKEN Scanner

b°). Deoarece $MM' \| BC$, punctele D și I sînt diametral opuse în cercul înscris triunghiului ABC. Triunghiurile DEF și IKL sînt deci simetrice față de centrul W al acestui cerc și deci sînt egale și au laturile respectiv paralele.

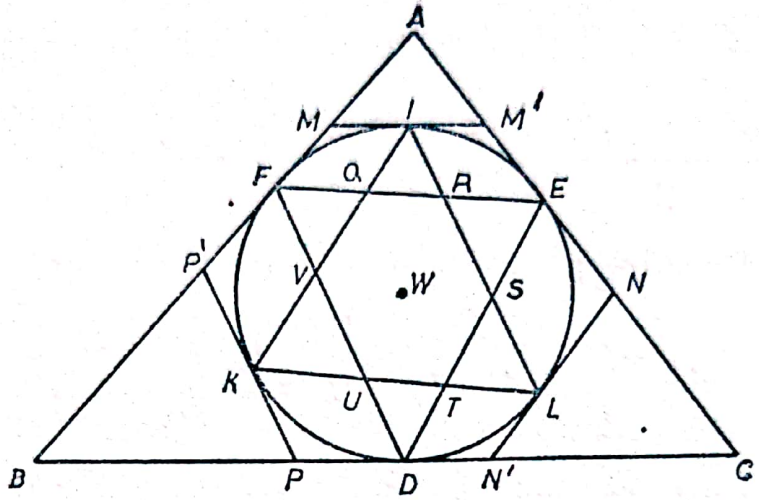


Fig. VI.63

c°). Punctele Q, T sînt simetrice față de W, ca intersecții de drepte simetrice, deci QT trece prin W. La fel, RU și SV trec prin W.

d°). Raportul de asemănare al triunghiurilor AMM' și ABC este egal cu raportul înălțimilor și cu raportul razelor cercurilor circumscrise, deci:

$$\frac{R_a}{R} = \frac{h_a - 2r}{h_a}$$

și analoagele. Rezultă:

$$\frac{R_a + R_b + R_c}{R} = 3 - 2r\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) =$$

$$= 3 - 2 = 1$$

deoarece:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Prin urmare:

$$R_a + R_b + R_c = R.$$

VI.64[3]. Folosim inegalitatea lui *Bernoulli*:

$(1+a)^n \geqslant 1 \Leftrightarrow na$, $(\forall)$ $n \in N$, $(\forall)$ $a \in R$, $a > -1$.

Să arătăm, prin inducție, că dacă $n, k \in N^*$, $k \leqslant n$, atunci:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}.$$

Raționăm prin inducție după k. Pentru $k=1$, evident:

$$1+\frac{1}{n} < 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

Pentru $k=2$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} < 1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}.$$

Presupunem că afirmația este valabilă pentru un $k \in N^*$, oarecare, adică:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}.$$

Înmulțind cu $1+\frac{1}{n}$, obținem:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}+\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}+\frac{k^2}{n^3} =$$

$$= 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k+1}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}$$

sau:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} < 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}-$$

$$-\frac{n(k+1)-k^2}{n^3} < 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2},$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece $n(k+1)-k^2 \geqslant 0$. Aceasta se arată astfel: prin ipoteză $k \leqslant n$ deci $k(k+1) \leqslant n(k+1)$ adică $n(k+1)-k^2-k \geqslant 0$ deci $n(k+1)-k^2 \geqslant k > 0$.

Fie:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

În baza inegalității lui *Bernoulli*:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

În baza celei de-a două inegalități (demonstrate):

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{n}{n} + \frac{n^2}{n^2} = 3.$$

Astfel $2 < a_n < 3$, $(\forall) n \in N^*$.

Evident:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot$$

$$\cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

și în baza inegalității lui *Bernoulli*:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \left(1-\frac{n}{n^2+3n+1}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1,$$

deci $a_{n+1} > a_n$, $(\forall) n \in N^*$.

VI.65[3]. a°). Fie mediana AM, $(M \in BC)$, pe care o prelungim cu $MA'' = AM$. Rezultă imediat că

Scanned with OKEN Scanner

$\Delta AMC = \Delta A''BM$ și deci $BA'' = AC$. Comparăm triunghiurile ABA'', $C'HB'$ și obținem:

$$AB = C'H, BA'' = AC = B'H, \sphericalangle C'HB' =$$
$$= 180° - \sphericalangle A = \sphericalangle B + \sphericalangle C$$

și:

$$\sphericalangle ABA'' = \sphericalangle B + \sphericalangle CBA'' = \sphericalangle B + \sphericalangle C.$$

Deci cele două triunghiuri ABA'', și $C'HB'$ sînt egale și rezultă $AA'' = B'C'$ adică $B'C' = 2AM$. Analog, $A'B' = 2BN$ și $A'C' = 2CP$ (BN, CP sînt celelalte două mediane).

b°). Evident:

$$\text{aria } (A'B'C') = \text{aria } (HB'C') + \text{aria } (HC'A') +$$
$$+ \text{aria } (HA'B').$$

Dar $\Delta HB'C' = \Delta ABA''$ și deci aria $(HB'C') =$ $=$ aria (ABA'') $=$ aria (ABM) $+$ aria (AMC) $=$ $=$ aria (ABC).

Analog:

$$\text{aria } (HC'A') = \text{aria } (ABC),$$
$$\text{aria } (HA'B') = \text{aria } (ABC).$$

Ca atare, aria $(A'B'C') = 3$ aria (ABC).

VI.66. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt omologice căci intersecțiile laturilor omologice sînt coliniare (L, M, N). Rezultă că AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente.

VI.67[2]**.** Dubla inegalitate se scrie, succesiv:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1 + \cos \frac{2k\pi}{4n+1}}{2} < n < \sum_{k=1}^{2n} \frac{1 - \cos \frac{2k\pi}{4n+1}}{2},$$

$$n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \cos \frac{2k\pi}{4n+1} < n < n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \cos \frac{2k\pi}{4n+1},$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \cos \frac{2k\pi}{4n+1} < 0.$$

Să dovedim ultima inegalitate. Se dezvoltă suma:

$$\sum_{k=1}^{2n} \cos \frac{2k\pi}{4n+1} = \cos \frac{2\pi}{4n+1} + \cos \frac{4\pi}{4n+1} +$$

$$+ \cos \frac{6\pi}{4n+1} + \ldots + \cos \frac{(4n-4)\pi}{4n+1} +$$

$$+ \cos \frac{(4n-2)\pi}{4n+1} + \cos \frac{4n\pi}{4n+1} =$$

$$= 2 \cos \frac{2n\pi + \pi}{4n+1} \left(\cos \frac{2n\pi - \pi}{4n+1} + \cos \frac{2n\pi - 3\pi}{4n+1} + \right.$$

$$\left. + \cos \frac{2n\pi - 5\pi}{4n+1} + \ldots + \cos \frac{3\pi}{4n+1} + \cos \frac{\pi}{4n+1} \right).$$

Cum:

$$\frac{2n\pi}{4n+1} < \frac{\pi}{2}$$

deoarece:

$$\frac{2n\pi}{4n+1} - \frac{\pi}{2} = \frac{4n\pi - 4n\pi - \pi}{2(4n+1)} < 0,$$

rezultă că:

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2n\pi}{4n+1} > \frac{2n\pi - \pi}{4n+1} > \frac{2n\pi - 3\pi}{4n+1} >$$

$$> \frac{2n\pi - 5\pi}{4n+1} > \ldots > \frac{\pi}{4n+1} > 0$$

deci:

$$\cos \frac{2n\pi - \pi}{4n+1} + \cos \frac{2\pi n - 3\pi}{4n+1} +$$

$$+ \ldots + \cos \frac{\pi}{4n+1} > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să studiem semnul lui:

$$\cos\frac{2n\pi+\pi}{4n+1};\quad \frac{2n\pi+\pi}{4n+1}>\frac{\pi}{2}$$

iar:

$$\frac{2n\pi+\pi}{4n+1}-\pi=\frac{2n\pi+\pi-4n\pi-\pi}{4n+1}=$$

$$=\frac{-2n\pi}{4n+1}<0$$

adică:

$$\frac{2n\pi+\pi}{4n+1}<\pi$$

și rezultă:

$$\cos\frac{2n\pi+\pi}{4n+1}<0.$$

Deducem:

$$\sum_{k=1}^{2n}\cos\frac{2n\pi}{4n+1}<0$$

și de aici dubla inegalitate:

$$\sum_{k=1}^{2n}\cos^2\frac{k\pi}{4n+1}<n<\sum_{k=1}^{2n}\sin^2\frac{k\pi}{4n+1}.$$

VI.68[2]**.** Folosind formula lui *Moivre* (presupunem $x\neq k\pi,\ k\in Z$):

$$\left(\frac{\cos x+\mathrm{i}\sin x}{\cos x}\right)^k=\frac{\cos kx+\mathrm{i}\sin kx}{\cos^k x}.$$

Dînd în relația anterioară lui k valori de la 0 la n și adunînd relațiile obținute:

$$1+\frac{\cos x+\mathrm{i}\sin x}{\cos x}+\left(\frac{\cos x+\mathrm{i}\sin x}{\cos x^2}\right)^2+\ldots+$$

$$+\left(\frac{\cos x+\mathrm{i}\sin x}{\cos x}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x}+\mathrm{i}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin kx}{\cos^k x}.$$

Dar primul membru se scrie:

$$\frac{\left(\frac{\cos x + i \sin x}{\cos x}\right)^{n+1} - 1}{\frac{\cos x + i \sin x}{\cos x} - 1} =$$

$$= \frac{\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x - \cos^{n+1} x}{i \sin x \cos^n x} =$$

$$= \frac{i[\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x] + \sin(n+1)x}{\sin x \cos^n x} =$$

$$= \frac{\sin(n+1)x}{\sin x \cos^n x} + i \frac{\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$$

deci, egalînd:

$$S_1 = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x \cos^n x}.$$

Dacă $x = k\pi$, $k \in Z$, $S_1 = n + 1$.

VI.69[1]. i°). Considerăm pe $E(a, b)$ ca funcție de b:

$$E(a, b) = f(b) = 2b^2 + 4b + 1 + 2a^2.$$

Minimul lui f este egal cu:

$$\frac{-(16 - 8 - 16a^2)}{8} = 2a^2 - 1.$$

Pentru $b = -1$.

Dar această funcție este minimă cînd $a = 0$ deci $\min_{a, b \in R} E(a, b) = -1$.

ii°). Evident:

$$E(a, b) = 2a^2 + 2b^2 + 4b + 2 - 1 = 2a^2 + 2(b+1)^2 - 1.$$

Din:

$$-4 \leqslant a \leqslant -2, \quad 2 \leqslant b \leqslant 3$$

deducem că minimul lui E se realizează pentru $a = -2$, $b = 2$ deci, în acest caz, $\min\limits_{\substack{a\in[-4,\,-2]\\ b\in[2,\,3]}} E = 25$.

VI.70. Să considerăm triunghiul ABC satisfăcînd datele problemei. Fie $AC = r\sqrt{3}$ latura triunghiului echilateral înscris în cerc, care subîntinde arcul $\widehat{AC}$ de măsură 120°. Latura $AB = r/2$ poate fi cu extremitatea în B în afara arcului AC sau pe arcul AC. Deci distingem două cazuri:

a°). B se află în afara arcului AC de măsură 120°. Avem:

$$\text{măs } \widehat{BC} = 120° + x$$

unde măs $\widehat{AB} = x$. Deci $BC = 2r \sin\dfrac{120° + x}{2} = 2r\sin\left(60° + \dfrac{x}{2}\right)$ și $AB = 2r \sin\dfrac{x}{2}$ de unde $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{4}$ și $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ iar $BC = 2r\cdot\left(\sin 60° \cos\dfrac{x}{2} + \cos 60° \sin\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{r}{4}(3\sqrt{5} + 1)$.

b°). B se află pe arcul $\widehat{AC}$ de măsură 120°). Avem:

$$BC = 2r \sin\left(60° - \frac{x}{2}\right) = \frac{r}{4}(3\sqrt{5} - 1).$$

VI.71. a°). Poziția punctului A' pe latura BC este dată de raportul:

$$\frac{BA'}{A'C} = k$$

deci:

$$\frac{BA'}{BC} = \frac{k}{k+1} \text{ și } \frac{A'C}{BC} = \frac{1}{k+1};\quad k > 0.$$

Dar:

$$\text{aria}(A'B'AC') = \text{aria}(ABC) - \text{aria}(BA'C') - \text{aria}(CA'B') \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

și:

$$\Delta BA'C' \sim \Delta ABC \sim \Delta CA'B'.$$

Din $\Delta BA'C' \sim \Delta ABC$ deducem:

$$\frac{\text{aria}(ABC)}{\text{aria}(BA'C')} = \frac{BC^2}{BA'^2} = \frac{(k+1)^2}{k^2};$$

din $\Delta CA'B' \sim \Delta ABC$:

$$\frac{\text{aria}(ABC)}{\text{aria}(CA'B')} = \frac{BC^2}{A'C^2} = (k+1)^2,$$

iar din $\Delta BA'C' \sim \Delta CA'B'$:

$$\frac{\text{aria}(CA'B')}{\text{aria}(BA'C')} = \frac{CA'^2}{BA'^2} = \frac{1}{k^2}.$$

Ținînd seama de (1) și de aceste relații putem exprima aria paralelogramului în funcție de aria $(BA'C')$ și aria $(CA'B')$. Astfel:

$$\text{aria}(A'B'AC') = \frac{(k+1)^2}{k^2}\text{aria}(BA'C') -$$

$$- \text{aria}(BA'C') - \frac{1}{k^2}\text{aria}(BA'C') =$$

$$= \frac{2}{k}\text{aria}(BA'C'), \qquad (2)$$

$$\text{aria}(A'B'AC') = (k+1)^2 \text{ aria}(CA'B') -$$

$$- k^2 \text{ aria}(CA'B') - \text{aria}(CA'B') = 2k \text{ aria}(CA'B'). \qquad (3)$$

Înmulțind relațiile (2) și (3) obținem:

$$\text{aria}(AB'AC') = 2\sqrt{\text{aria}(BA'C') \cdot \text{aria}(CA'B')}$$

adică relația cerută.

b°). De la punctul a°):

$$\text{aria}(CA'B') = \frac{1}{(k+1)^2}\text{aria}(ABC).$$

Scanned with OKEN Scanner

și (3) se scrie:

$$\text{aria}(A'B'AC') = \frac{2k}{(k+1)^2}\,\text{aria}(ABC).$$

De aici rezultă că maximul ariei paralelogramului $A'B'AC'$ are loc atunci cînd $\frac{2k}{(k+1)^2}$ este maxim, aria (ABC) fiind constantă. Dar:

$$\frac{2k}{(k+1)^2} = \frac{2}{k+\frac{1}{k}+2}$$

este maxim cînd $k+\frac{1}{k}$ este minim și cum;

$$\left(\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 \geqslant 0,\ (\forall)\ k>0,$$

rezultă:

$$k+\frac{1}{k}\geqslant 2,$$

cu egalitate pentru $k=1$. Deci maximul ariei paralelogramului $A'B'AC'$ este $\frac{1}{2}\,\text{aria}(ABC)$.

VI.72[3]**.** Raționăm prin inducție. Pentru $n=2$, afirmația este evidentă. Fie acum n intervale. Să notăm cu A intersecția a $n-1$ intervale (A este un interval) și conform inducției, $A\neq\emptyset$. Fie I_n al n-lea interval și să presupunem că $A\cap I_n=\emptyset$. Fie $A_0\in I_n$ punctul cel mai apropiat de A (A_0 poate fi una din extremitățile lui I_n, dacă I_n este închis). Deoarece $A_0\notin A$, există $I\neq I_n$ un interval din mulțimea considerată astfel încît $A_0\notin I$. Pe de altă parte $I\cap A\neq\emptyset$ și $I\cap I_n\neq\emptyset$. Fie $A_1\in I\cap A$ și $A_2\in I\cap I_n$. Atunci segmentul $A_1A_2\subset I$ deci $A_0\in A_1A_2$, contrar faptului că $A_0\notin I$. Rămîne că afirmația este valabilă și pentru n.

Scanned with OKEN Scanner

VI.73*. Continuăm soluția problemei VI.49. Calculînd cu formula stabilită, găsim $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, $F_2 = 3$ $F_3 = 5$, $F_4 = 8$, $F_5 = 13$ etc., Să arătăm că:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Să observăm că orice cuvînt de lungime n format cu 0 și 1 care nu conține doi de 1 consecutivi sau are pe ultima poziție 0 sau are pe ultimele două poziții 01, cuvintele care rămîn după eliminarea terminației 0 respectiv 01 au lungimile $n - 1$, respectiv $n - 2$ și nu conțin doi de 1 consecutivi.

Deci există o bijecție între cuvintele de lungime n formate cu 0 și 1 care nu conțin doi de 1 consecutivi și reuniunea mulțimilor disjuncte formate din cuvintele de lungime $n - 1$ care nu conțin doi de 1 consecutivi la care adăugăm pe poziția $n - 1$ un 1, respectiv din cuvintele de lungime $n - 2$ care nu conțin doi de 1 consecutivi la care adăugăm pe ultimele două poziții cifrele 0 și 1 în această ordine, deci:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Soluția ecuației $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ este:

$$F_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$$

unde λ_1, λ_2 sînt rădăcinile ecuației $\lambda^2 = \lambda + 1$, iar C_1 și C_2 sînt constante reale care se determină din condițiile:

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 2,$$

fapt ce se poate dovedi, de pildă, prin inducție matematică.

Rezolvînd, se obține:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2};$$

$$C_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}; \quad C_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$F_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n +$$

$$+\frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)^n$$

și egalînd cu expresia lui F_n din VI.49. obținem ceea ce trebuia demonstrat.

VI.74*. Să presupunem că $A \not\subset B$ și $X \neq A$. Înlocuind în ecuație pe X cu B obținem:

$$A \cup (B - B) = B \cup B$$

deci $A = B$, contrar ipotezei. Rezultă $X \neq B$ și $B - X \neq \emptyset$ deoarece dacă $B \subset X$ atunci $X = A$. Dacă înlocuim pe X cu $\emptyset$ obținem $A \cup B = B$ adică $A \subset B$, contrar ipotezei deci $X \neq \emptyset$. Să arătăm că $X \subset A$. Fie $x \in X$ și să demonstrăm că $x \in A$. Mai întîi $x \notin (B - X)$. În adevăr, $x \notin (B - X) \Leftrightarrow non\ x \in (B - X) \Leftrightarrow non\ (x \in B$ și $x \notin X) \Leftrightarrow non\ (x \in B)$ sau $non\ (x \notin X) \Leftrightarrow (x \notin B$ sau $x \in X)$ care este adevărată. Din egalitatea:

$$A \cup (B - X) = B \cup X$$

rezultă:

$$(B \cup X) \subset A \cup (B - X).$$

Deoarece $x \in B \cup X$, trebuie să avem și $x \in A \cup (B - X)$, însă cum $x \notin B - X$, rezultă $x \in A$. Am arătat că X trebuie să fie o parte a lui A.

Dacă $X \subset A$, atunci $A \cup (B - X) = A \cup B$. În adevăr, vom dovedi că:

$$A \cup (B - X) \subset A \cup B$$

și:

$$A \cup B \subset (B - X).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a \in A \cup (B - X)$ atunci $a \in A$ sau $a \in B - X$; $a \in A \Rightarrow a \in A \cup B$; $a \in B - X \Rightarrow a \in B$ și $a \notin X \Rightarrow a \in A \cup B$ și rezultă prima incluziune.

Pentru a doua incluziune, dacă $a \in A \cup B$ atunci $a \in A$ sau $a \in B$; dacă $a \in A$, atunci $a \in A \cup (B - X)$; dacă $a \in B$, avem posibilitățile: $a \in A$ sau $a \notin A$; $a \in B$ și $a \in A \Rightarrow a \in A \cup (B - X)$; $a \in B$ și $a \notin A$ implică $a \in B$ și $a \notin X$ (X fiind o parte a lui A) $\Rightarrow a \in B - X \Rightarrow a \in A \cup (B - X)$.

Ecuația propusă este deci echivalentă cu $B \cup X = A \cup B$ și $X \subset A$. Evident, orice parte X a lui A verifică incluziunea $B \cup X \subset A \cup B$. Pentru egalitate va trebui să avem și $(A \cup B) \subset (B \cup X)$, adică oricare ar fi $x \in A \cup B$ să avem și $x \in B \cup X$. Dacă $x \in B$ atunci $x \in B \cup X$ iar dacă $x \in A$ și $x \notin B$ atunci pentru a avea $x \in B \cup X$ trebuie ca $x \in X$ deci $x \in A$ și $x \notin B \Rightarrow x \in X$, adică $x \in A - B \Rightarrow x \in X$, $A - B \subset X$.

Reciproc, să verificăm că dacă $A - B \subset X$ atunci $(A \cup B) \subset (B \cup X)$; $A - B \subset X$ înseamnă că oricare ar fi $a \in A$ și $a \notin B$, avem $a \in X$. Fie $a \in A \cup B$ și să arătăm că $a \in B \cup X$; dacă $a \in B$ atunci $a \in B \cup X$; dacă $a \in A$ și $a \notin B$ atunci $a \in X$ (din ipoteza $A - B \subset X$) și deci $a \in B \cup X$. Am stabilit astfel că soluțiile ecuației propuse sînt toate părțile lui A ce conțin pe $(A - B)$. Dacă $A \subset B$ se arată în mod asemănător că orice parte a lui A este soluție.

Dacă $A = \emptyset$ ecuația admite numai soluția $X = \emptyset$ iar dacă $B = \emptyset$ ecuația are soluția $X = A$.

VI.75[2]. Vom trata cazul general în care, în loc de 1976 sînt considerate $n + 1 > 5$ puncte (cazul $n = 4$ este banal). Fie $n = 5$. Fie cele 6 puncte numerotate $A_1, \ldots, A_6$ și fie A_1, A_2, A_3, A_4 pe același cerc C și $A_5 \notin C$ (vezi fig. VI.75). Dacă $A_6 \notin C$ rezultă, conform ipotezei, că există un cerc C_1 astfel ca $A_1, A_2, A_5, A_6 \in C_1$ și există C_2 astfel ca $A_2, A_3, A_5, A_6 \in C_2$.

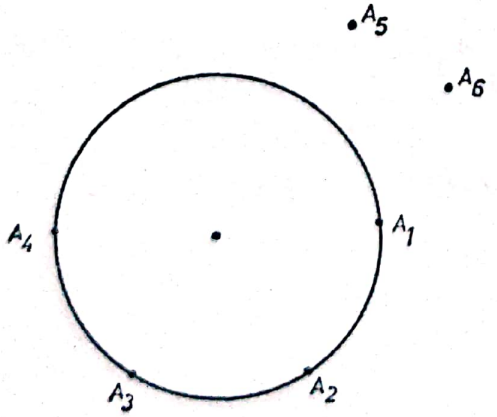


Fig. VI.75

Rezultă că A_2, A_5, A_6 se găsesc și pe C_1 și pe C_2 de unde, cum prin trei puncte necoliniare trece un singur cerc, rezultă că $C_1 \equiv C_2 \equiv C'$ deci $A_1, A_2, A_3, A_5, A_6 \in C'$ și cum $A_1, A_2, A_3 \in C$, rezultă $C \equiv C'$ deci $A_5 \in C$, și $A_6 \in C$, contrar ipotezei făcute. Deci unul din punctele A_5, A_6 se găsește pe cerc. Dacă $n > 5$ presupunem la fel $A_1, \ldots, A_4 \in C$ și $A_5 \notin C$ și luăm apoi punctele $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_k$ pentru $k > 5$ și calchiem raționamentul.

VI.76. Grupînd convenabil, găsim:

$$(3x - 2y)(2x - 3y) = 19$$

de unde avem și sistemele, dat fiind că 19 este număr prim:

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = 1 \\ 2x - 3y = 19 \end{array} \quad \text{cu } x = -7, \quad y = -11,$$

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = 19 \\ 2x - 3y = 1 \end{array} \quad \text{cu } x = 11, \quad y = 7,$$

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = -1 \\ 2x - 3y = -19 \end{array} \quad \text{cu } x = 7, \quad y = 11,$$

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = -19 \\ 2x - 3y = -1 \end{array} \quad \text{cu } x = -11, \quad y = -7.$$

VI.77. Fie S_n numărul cerut. Cele n cercuri se intersectează două cîte două și nu au nici un punct comun de intersecție. Considerînd $(n-1)$ cercuri, să stabilim o relație între numărul corespunzător S_{n-1} și S_n, numărul corespunzător la n cercuri.

Al n-lea cerc intersectează cele $(n-1)$ cercuri în maximum $2(n-1)$ puncte distincte. Oricare din aceste $2(n-1)$ puncte mai dau naștere pe sferă, unei noi regiuni pe lîngă cele S_{n-1} existente. Deci:

$$S_n = S_{n-1} + 2(n-1).$$

Iterînd această relație și adunînd cele $(n-1)$ obținute, găsim după oarecare reduceri:

$$S_n = n^2 - n + 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

VI.78[1]. Evident, $\frac{AC_1}{AC} = \cos A$. Deoarece (vezi fig. VI.78), B_1C_1 este *antiparalelă* la BC triunghiurile ABC și AB_1C_1 sînt asemenea. Dacă ele, au respectiv ariile S și S_1, atunci:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{AC_1}{AC}\right)^2 = \cos^2 A.$$

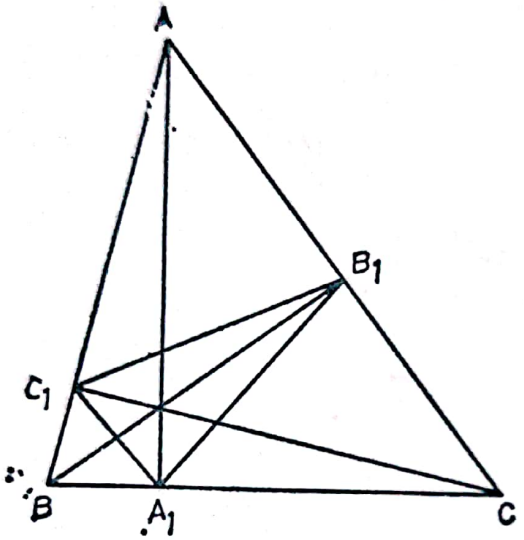


Fig. VI.78

Dar:

$$R_1 = \frac{AB_1 \cdot AC_1 \cdot B_1C_1}{4S_1},$$

$$AB_1 = c \cos A,$$
$$AC_1 = b \cos A,$$
$$B_1C_1 = a \cos A,$$

astfel că:

$$R_1 = \frac{abc \cos^3 A}{4S \cos^2 A},$$

$$R_1 = \frac{abc \cos A}{4 \cdot \frac{abc}{4R}} = R \cos A$$

și încă două relații analoage.

Ca atare:

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R^2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C). \quad (1)$$

Dacă S_0 este aria triunghiului $A_1B_1C_1$, atunci:

$$S_0 = \frac{B_1C_1 \cdot C_1A_1 \cdot A_1B_1}{4 \cdot \frac{R}{2}},$$

fiindcă raza cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ (*cercul lui Euler*) este $\frac{R}{2}$. În continuare:

$$S_0 = \frac{abc \cos A \cos B \cos C}{2R}.$$

Dar:

$$r_0 = \frac{2S_0}{B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1}$$

și, conform relației sinusului:

$$B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1 = a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2R(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C$$

deci:

$$r_0 = \frac{2\cdot 8R^3\sin A\sin B\sin C\cos A\cos B\cos C}{8R^2\sin A\sin B\sin C} = 2R\cos A\cos B\cos C.$$

În felul acesta:

$$R(R - r_0) = R^2(1 - 2\cos A\cos B\cos C). \quad (2).$$

Comparînd relațiile (1) și (2) și știind că:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

rezultă:

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R(R - r_0).$$

VI.79. *Soluția I.* Soluțiile ecuațiilor $\sin x = 0$, $\cos x = 0$ nu convin, astfel că facem ipoteza $\sin x\cos x \neq 0$. Înmulțind ecuația cu $\cos x$ se obține:

$$8\cos^2 x = \sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 1,$$

$$\frac{8}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} x} + 1,$$

$$\operatorname{tg}^3 x + \sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 7\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

care se constată că are rădăcini date de $\operatorname{tg} x_1 = \sqrt{3}$ și împărțind polinomul trigonometric $\operatorname{tg}^3 x + \sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 7\operatorname{tg} x + \sqrt{3}$ cu $\operatorname{tg} x - \sqrt{3}$, obținem cîtul $\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1$ care, egalat cu zero, dă celelalte rădăcini:

$$\operatorname{tg} x_2 = 2 - \sqrt{3},\ \operatorname{tg} x = -2 - \sqrt{3}.$$

Din $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ rezultă $x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z.$

Din $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$ rezultă:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{-6 + 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

și deci $2x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$, deci $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z.$

Din $\operatorname{tg} x = -2 - \sqrt{3}$ rezultă $\operatorname{tg}(\pi - x) = 2 + \sqrt{3}$ deci $\operatorname{tg} 2(\pi - x) = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{-6 - 4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ și deci $2(\pi - x) = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$, de unde $x = \frac{7\pi}{12} + k\frac{\pi}{2},$ $k \in Z$. Dar $\frac{7\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2} + (k+1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12} + k_1\frac{\pi}{2}$, $k_1 \in Z$, deci nu s-a obținut soluție distinctă.

Soluția a II-a. Împărțind ecuația cu 2 obținem:

$$4\cos x = \frac{\sqrt{3}/2}{\sin x} + \frac{1/2}{\cos x}.$$

Dar:

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

și ecuația se scrie, succesiv:

$$4\cos x = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin x} + \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos x};$$

$$4\sin x\cos^2 x = \cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$2\sin 2x\cos x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

și transformînd produsul în sumă:

$$\sin 3x + \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

În continuare:

$$\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right);$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0,$$

de unde:

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \text{ și } x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z.$$

VI.80. Pentru determinarea tuturor cuplurilor (x, y) ce aparțin lui S trebuie rezolvat sistemul:

$$3|x| + 2y = 1,$$
$$x + 3|y| = 15. \qquad (1)$$

Distingem 4 cazuri:

a°). $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Sistemul devine:

$$3x + 2y = 1$$
$$x + 3y = 15$$

care are drept soluție

$$x = -\frac{27}{7}, \quad y = \frac{44}{7}$$

care însă nu verifică $x \geqslant 0$.

b°). $x < 0$, $y < 0$. Se obține sistemul:

$$-3x + 2y = 1$$
$$x - 3y = 15$$

care conduce la

$$x = -\frac{33}{7}, \quad y = -\frac{46}{7}$$

și care verifică $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$ dar care nu sînt numere întregi (prin ipoteză, S este formată numai din cupluri de numere întregi).

c°). $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$. Se obține $x = 3$, $y = -4$ care verifică toate condițiile deci $(3, -4) \in S$.

d°). $x < 0$, $y > 0$. Sistemul devine:

$$-3x + 2y = 1$$
$$x + 3y = 15$$

care dă soluția:

$$x = \frac{27}{11}, \quad y = \frac{46}{11}$$

care nu verifică condițiile impuse. În concluzie:

$$S = \{(3, -4)\}.$$

VI.81. Notînd $\log_{a^n} b^n = y$ obținem $b^n = a^{ny}$ și logaritmînd în baza a:

$$n \log_a b = ny, \quad y = \log_a b$$

deci afirmația este dovedită.

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza egalității stabilite:

$$\log_{\sqrt{2}} x = \log_2 x^2 \text{ și } \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 x^{-1}$$

astfel că ecuația se scrie:

$$\log_2 x + \log_2 x^2 + \log_2 x^{-1} = 2 \text{ sau } \log_2 x = 1$$

de unde $x = 2$.

VI.82. a°). Fie AB o coardă într-un cerc de rază R și x arcul subîntins, fie deasupra coardei, fie dedesubtul ei.

Să ducem diametrul AM și obținem:

$$AB = 2R \sin \frac{x}{2}$$

dacă x este arcul de deasupra coardei. Fie y arcul dedesubtul coardei.

În acest caz:

$$x + y = 2\pi$$

deci $x = 2\pi - y$ adică $\frac{x}{2} = \pi - \frac{y}{2}$ și deci $\sin \frac{x}{2} = \sin \frac{y}{2}$.

Din măs $\widehat{AB}$ = măs = $\widehat{CD}$ = măs $\widehat{BC}$ rezultă $BC \parallel AD$ deci $ABCD$ este un trapez. În plus, el este isoscel. Laturile se și obțin imediat, aplicînd formula de mai sus:

$$AB = 2R \sin a,\ BC = 2R \sin a,\ CD = 2R \sin a,\ AD = 2R \sin 3a.$$

$$\text{Aria } (ABCD) = \frac{(AD + BC)}{2} i,$$

unde:

$$i = CC_1 = CD \sin 2a = 2R \sin a \sin 2a \ (CC_1 \perp AD)$$

Scanned with OKEN Scanner

și astfel:

$$\text{aria } (ABCD) = \frac{(2R \sin 3a + 2R \sin a)\, 2R \sin a \sin 2a}{2} =$$

$$= 2R^2 \sin^3 2a.$$

b°). Ecuația din care se obține a este:

$$4R^2 \sin^2 a + 4R^2 \sin^2 2a + 4R^2 \sin^2 3a = 8R^2$$

sau, succesiv:

$$\sin^2 a + \sin^2 2a + \sin^2 3a = 2,$$

$$\sin^2 a + 4 \sin^2 a \cos^2 a + \sin^2 a(3 - 4 \sin^2 a)^2 = 2,$$

$$8 \sin^6 a - 14 \sin^4 a + 7 \sin^2 a - 1 = 0,$$

$$(8 \sin^6 a - 1) - 7 \sin^2 a (2 \sin^2 a - 1) = 0,$$

$$(2 \sin^2 a - 1)(4 \sin^4 a + 2 \sin^2 a + 1) -$$

$$- 7 \sin^2 a (2 \sin^2 a - 1) = 0$$

sau, în final:

$$(2 \sin^2 a - 1)(4 \sin^4 a - 5 \sin^2 a + 1) = 0,$$

deci:

$$\sin a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

și din:

$$4 \sin^4 a - 5 \sin^2 a + 1 = 0$$

găsim:

$$\sin a_3' = 1, \quad \sin^2 a'' = \frac{1}{4}.$$

Din $\sin^2 a' = 1$ se obține $\sin a_{3,4} = \pm 1$ și din $\sin^2 a'' = +\frac{1}{4}$, $\sin a_{5,6} = \pm \frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvarea acestor ecuații nefiind, presupunem, dificilă, o omitem. Urmează discuția soluțiilor care este, de asemenea, ușoară.

În adevăr, trebuie ca $6a < 2\pi$ deci $a < \frac{\pi}{3}$ ca să avem trapezul $ABCD$ înscris în cerc. Deci corespund arcele date de $\sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ adică $a = \frac{\pi}{4}$ și $a = \frac{\pi}{6}$, corespunzător ecuației $\sin a = \frac{1}{2}$.

c°). Relația se scrie, succesiv:

$$4R^2 \sin^2 a - 4R^2 \sin^2 2a = 4\sqrt{3}R^2 \sin^2 3a,$$

$$\sin^2 a - \sin^2 2a = \sqrt{3} \sin^2 3a,$$

$$\sin^2 a(1 - 4\cos^2 a) = \sqrt{3} \sin^2 a(1 - 4\cos^2 a)^2$$

și cum $\sin^2 a \neq 1$, obținem:

$$(1 - 4\cos^2 a)(\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\cos^2 a - 1) = 0$$

și de aici:

$$1 - 4\cos^2 a = 0$$

de unde $\cos a = \frac{1}{2}$ deci $a = \frac{\pi}{3}$ $\left(\text{amintim că } a \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)\right)$ pentru care se obține triunghiul echilateral ABC cu $D \equiv A$ și ecuația:

$$\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\cos^2 a - 1 = 0$$

de unde $\cos^2 a = \frac{\sqrt{3} - 1}{4\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{12} < \frac{1}{4}$ și $a > \frac{\pi}{3}$ așa că nu corespunde.

Rămîne singura soluție a triunghiului echilateral.

Scanned with OKEN Scanner

și astfel:

$$\text{aria } (ABCD) = \frac{(2R \sin 3a + 2R \sin a)\, 2R \sin a \sin 2a}{2} =$$

$$= 2R^2 \sin^3 2a.$$

b°). Ecuația din care se obține a este:

$$4R^2 \sin^2 a + 4R^2 \sin^2 2a + 4R^2 \sin^2 3a = 8R^2$$

sau, succesiv:

$$\sin^2 a + \sin^2 2a + \sin^2 3a = 2,$$

$$\sin^2 a + 4 \sin^2 a \cos^2 a + \sin^2 a(3 - 4 \sin^2 a)^2 = 2,$$

$$8 \sin^6 a - 14 \sin^4 a + 7 \sin^2 a - 1 = 0,$$

$$(8 \sin^6 a - 1) - 7 \sin^2 a (2 \sin^2 a - 1) = 0,$$

$$(2 \sin^2 a - 1)(4 \sin^4 a + 2 \sin^2 a + 1) -$$

$$- 7 \sin^2 a (2 \sin^2 a - 1) = 0$$

sau, în final:

$$(2 \sin^2 a - 1)(4 \sin^4 a - 5 \sin^2 a + 1) = 0,$$

deci:

$$\sin a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

și din:

$$4 \sin^4 a - 5 \sin^2 a + 1 = 0$$

găsim:

$$\sin a_3' = 1, \quad \sin^2 a'' = \frac{1}{4}.$$

Din $\sin^2 a' = 1$ se obține $\sin a_{3,4} = \pm 1$ și din $\sin^2 a'' = +\frac{1}{4}$, $\sin a_{5,6} = \pm \frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvarea acestor ecuații nefiind, presupunem, dificilă, o omitem. Urmează discuția soluțiilor care este, de asemenea, ușoară.

În adevăr, trebuie ca $6a < 2\pi$ deci $a < \frac{\pi}{3}$ ca să avem trapezul $ABCD$ înscris în cerc. Deci corespund arcele date de $\sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ adică $a = \frac{\pi}{4}$ și $a = \frac{\pi}{6}$, corespunzător ecuației $\sin a = \frac{1}{2}$.

c°). Relația se scrie, succesiv:

$$4R^2 \sin^2 a - 4R^2 \sin^2 2a = 4\sqrt{3}R^2 \sin^2 3a,$$

$$\sin^2 a - \sin^2 2a = \sqrt{3} \sin^2 3a,$$

$$\sin^2 a(1 - 4\cos^2 a) = \sqrt{3} \sin^2 a(1 - 4\cos^2 a)^2$$

și cum $\sin^2 a \neq 1$, obținem:

$$(1 - 4\cos^2 a)(\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\cos^2 a - 1) = 0$$

și de aici:

$$1 - 4\cos^2 a = 0$$

de unde $\cos a = \frac{1}{2}$ deci $a = \frac{\pi}{3}$ $\left(\text{amintim că } a \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)\right)$ pentru care se obține triunghiul echilateral ABC cu $D \equiv A$ și ecuația:

$$\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\cos^2 a - 1 = 0$$

de unde $\cos^2 a = \frac{\sqrt{3} - 1}{4\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{12} < \frac{1}{4}$ și $a > \frac{\pi}{3}$ așa că nu corespunde.

Rămîne singura soluție a triunghiului echilateral.

Scanned with OKEN Scanner

VI.83[1]. Că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram, rezultă din (vezi fig. VI.83):

$$\frac{AN}{AD} = \frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CD}$$

și deci $AM = CP$. Dar $\Delta AMN = \Delta CPQ$ de unde $MN = PQ$ și deoarece $MN \parallel PQ$, patrulaterul $MNPQ$

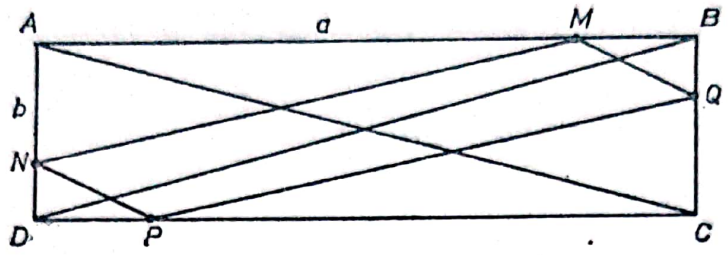


Fig. VI.83

este paralelogram. Mai rezultă și $\Delta NDP = \Delta MBQ$. Deci:

$$\text{aria}(MNPQ) = \text{aria}(ABCD) - 2(\text{aria}\ (AMN) + \text{aria}\ (MBQ))$$

și cum aria $(AMN) = \frac{bx^2}{2a}$ căci $AN = \frac{bx}{a}$;

aria $(MBQ) = \frac{b(a-x)^2}{2a}$, astfel că aria $(MNPQ) = \frac{b}{a}(-2x^2 + 2ax)$.

În cazul în care aria paralelogramului $MNPQ$ este $\frac{1}{8}$ din aria dreptunghiului $ABCD$, pentru determinarea lui x avem ecuația:

$$-2x^2 + 2ax = \frac{a^2}{8}$$

adică:

$$16x^2 - 16ax + a^2 = 0$$

care ne dă:

$$x_1 = \frac{2a + a\sqrt{3}}{4}, \quad x_2 = \frac{2a - a\sqrt{3}}{4}.$$

Ambele soluții corespund și cele două paralelograme corespunzătoare sînt egale, fiind simetrice în raport cu axele de simetrie ale dreptunghiului.

VI.84². a°). Triunghiul BDE (vezi figura VI.84) este isoscel deoarece patrulaterul $BCDE$ fiind inscriptibil, are loc:

$$\sphericalangle BED = \sphericalangle ACB, \quad \sphericalangle EBD = \sphericalangle ABT =$$

$$= \frac{\text{măs } \overset{\frown}{AB}}{2} = \sphericalangle ACB$$

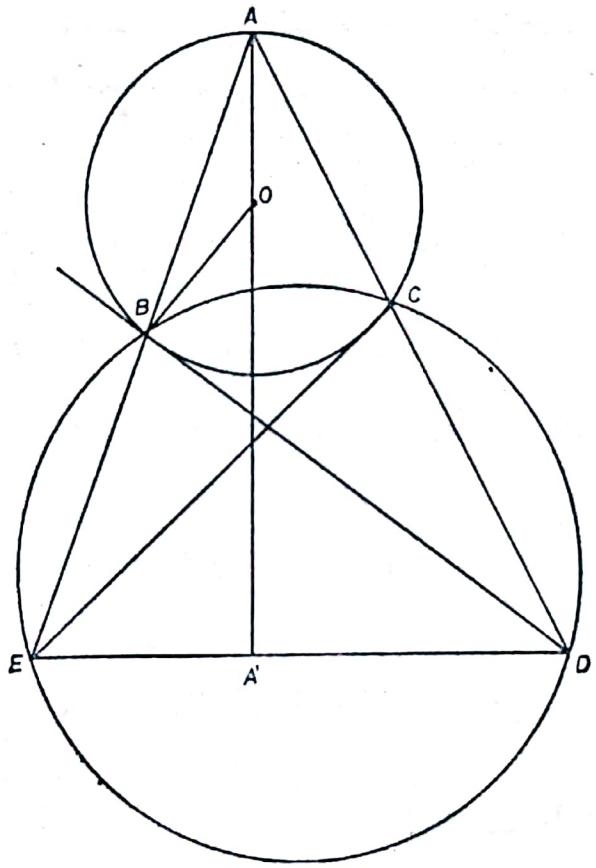


Fig. VI.84

(T fiind un punct pe dreapta BD, să zicem simetricul lui D față de B) și deci $\sphericalangle BED = \sphericalangle EBD$, astfel că triunghiul BDE este isoscel.

b°). Puterea lui D față de cercul O, ne dă:

$$DB^2 = DC \cdot DA.$$

Urmează că $DE = DB$ verifică această relație, adică:

$$DE^2 = DC \cdot DA$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce înseamnă, după cum se știe, că DE este tangentă la cercul circumscris triunghiului ACE.

c°). Evident, $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$ și deci $\sphericalangle EAO = \frac{180° - 2\sphericalangle ACB}{2} = 90° - \sphericalangle ACB$.

Prelungim pe AO pînă în A', intersecția ei cu DE. În triunghiul AEA', $\sphericalangle AED = \sphericalangle ACB$ și deci $\sphericalangle AED + \sphericalangle EAA' = \sphericalangle ACB + 90° - \sphericalangle ACB = 90°$ astfel că $AO \perp DE$.

VI.85[3]**.** a°). Punctul I fiind pe axa radicală și pe mediatoarea segmentului $P'P$, are loc:

$$IQ \cdot IP = IQ' \cdot IP'$$

și:

$$IP = IP',$$

deci:

$$IQ = IQ'. \tag{1}$$

Egalitatea (1) conduce la $PQ = P'Q'$. Deci:

$$\frac{IQ}{PQ} = \frac{IQ'}{Q'P'}$$

și:

$$QQ' \parallel PP'. \tag{2}$$

b°). Din (2) rezultă că $PQRA$ și $AP'Q'R'$ sînt trapeze isoscele astfel că:

$$PQ = AR = AR' = P'Q'. \tag{3}$$

Triunghiul RAR' este isoscel (conform cu (3)) deci $\sphericalangle ARR' = \sphericalangle AR'R$; dar $RQ' \parallel AP'$ de unde $\sphericalangle ARR' = \sphericalangle R'AP'$ și $\sphericalangle R'RA = \sphericalangle RAP$ și deci $\sphericalangle RAP = \sphericalangle Q'P'A$ de unde $RA \parallel Q'P'$; deci $Q'R = AP'$ (laturi opuse în paralelogram).

c°). Mediatoarele laturilor BP și BP' trec prin O și O', fixe, centrele cercurilor date (notăm, pentru comoditate, prin O, O' și centrele cercurilor considerate).

Scanned with OKEN Scanner

Unghiul mediatoarelor avînd laturile perpendiculare pe laturile unghiului PBP' este sau egal sau suplementar cu acesta. Dar $\sphericalangle PBP' = 180° - (\sphericalangle BPP' + \sphericalangle BP'P) =$ constant (deoarece $\sphericalangle BP'A + \sphericalangle APB =$ $=$ măs $\overset{\frown}{AB}$). Deci locul geometric este format din arcele capabile de unghiul mediatoarelor, simetrice față de linia centrelor OO'.

VI.86[1]. Problema se încadrează în tipurile clasice. Pentru rezolvarea ei ne putem prevala de relațiile metrice în triunghi, cunoscute încă de la capitolul de trigonometrie.

VI.87[3]. a°). Din egalitatea triunghiurilor EAC și BAG, avînd cîte două laturi respectiv egale și unghiurile cuprinse între ele, respectiv egale, $\sphericalangle EAC = \sphericalangle BAG = 90° + \sphericalangle A$, rezultă $EC = BG$.

b°). Ducem din A pe EC și BG perpendicularele AA' și AA'' care fiind înălțimi în triunghiurile egale EAC și BAG, relativ la laturi egale, rezultă $AA' = AA''$. Triunghiurile dreptunghice $AA'P$ și $AA''P$ sînt egale avînd și ipotenuza AP comună și rezultă că $\sphericalangle A'PA = \sphericalangle A''PA$ deci $\sphericalangle EPA = \sphericalangle GPA$, adică AP este bisectoarea unghiului EPG.

c°). Ducem BH și CK perpendiculare pe AM. Evident $\sphericalangle ABH = \sphericalangle EAI$ avînd laturile perpendiculare; la fel $\sphericalangle ACK = \sphericalangle GAI$.

Triunghiurile ABH și EAI sînt egale avînd $AB = AE$, $\sphericalangle ABH = \sphericalangle EAI$, $\sphericalangle AHB = \sphericalangle EIA = 90°$.

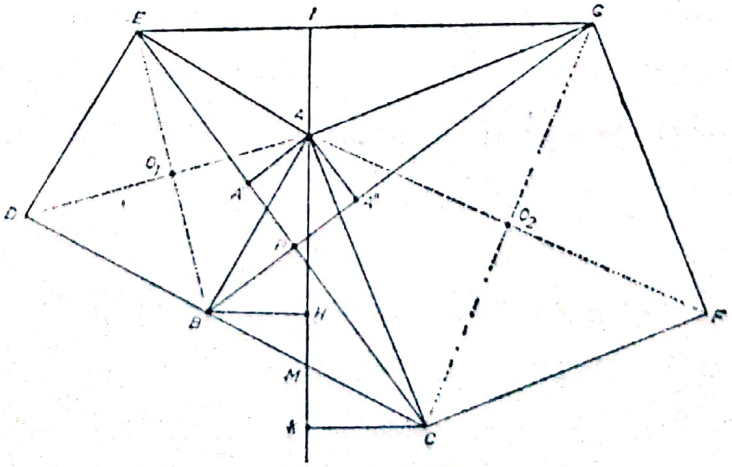


Fig. VI.87

Scanned with OKEN Scanner

Analog, triunghiurile ACK și AGI sînt egale. Rezultă $EI = AH$ și $IG = AK$, de asemenea, $AI = BH$ și $AI = CK$ și astfel triunghiurile dreptunghice BHM și CKM sînt egale, de unde $BM = MC$ adică AM este mediană în triunghiul ABC, iar $2AM = AH + AK = EG$.

d°). $\sphericalangle EPG = 180° - \sphericalangle A'AA''$ însă $\sphericalangle A'AA'' = \sphericalangle A'AC + \sphericalangle CAA'' = \sphericalangle A'AC + \sphericalangle AGB = \sphericalangle A'AC + \sphericalangle ACE = 90°$ deci $\sphericalangle EPG = 90°$.

e°). Punctele B, D, E, A, P sînt pe cercul cu diametrul EB și centru O_1 iar punctele A, G, F, C, P sînt pe cercul cu diametru CG și centrul în O_2 deci AP este coarda comună în cele două cercuri, iar linia centrelor O_1O_2 este mediatoarea coardei comune.

VI.88*. Fie M situat interior triunghiului ABC (nu și pe laturi). Distanțele punctului M la laturile BC, AC, AB le notăm respectiv cu d_a, d_b, d_c. Notăm cu H_a, H_b, H_c picioarele înălțimilor și cu $h_a = AH_a$, $h_b = BH_b$, $h_c = CH_c$. Presupunem că lungimile laturilor triunghiului ABC se află în următoarea ordine:

$$a > b > c.$$

Paralela dusă prin M la BC taie laturile AB, AC respectiv în D și E. Notăm cu D', E' respectiv proiecțiile punctelor D și E pe laturile AC, AB. Deoarece $ah_a = bh_b = ch_c$ și $a > b > c$ rezultă $h_a < h_b < h_c$.

Punctele de pe dreapta DE au aceeași distanță la latura BC, egală cu d_a. Să găsim punctele segmentului DE pentru care $d_b + d_c$ este maximă, respectiv minimă.

Astfel:

$$d_b \cdot AE + d_c \cdot AD = 2S_{AME} + 2S_{AMD} =$$
$$= 2S_{ADF} = \text{constant}.$$

Dar:

$$2S_{ADE} = EE' \cdot AD = DD' \cdot AE.$$

Conform teoremei lui *Thales*:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} < 1$$

Scanned with OKEN Scanner

deci $AD < AE$. Deci:

$$EE' \cdot AD = d_b \cdot AE + d_c \cdot AD > d_b \cdot AD + d_c \cdot AD \Rightarrow EE' > d_b + d_c,$$

$$DD' \cdot AE = d_b \cdot AE + d_c \cdot AD < d_b \cdot AE + d_c \cdot AE \Rightarrow DD' < d_b + d_c.$$

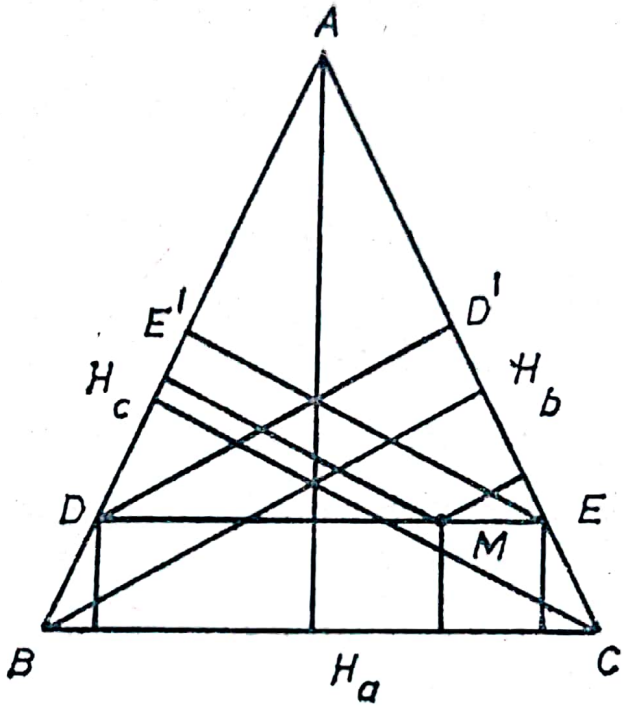


Fig. VI.88

Cele două relații obținute mai sus se mai scriu:

$$d_a + DD' < d_a + d_b + d_c < d_a + EE'$$

deci oricare ar fi punctul M în interiorul triunghiului ABC, extremele sumei $d_a + d_b + d_c$ trebuie căutate pe laturile triunghiului ABC. Aplicînd același raționament punctului E mobil pe latura AC, găsim:

$$h_a < d_a + EE' < h_c$$

și punctului D mobil pe latura AB găsim că:

$$h_a < d_a + DD' < h_c,$$

aceste inegalități avînd loc oricare ar fi punctele E pe AC, respectiv D pe AB. Deoarece am obținut că:

$$d_a + DD' < d_a + d_b + d_c < d_a + EE',$$

folosind inegalitățile obținute pentru $d_a + EE'$, respectiv $d_a + DD'$, obținem:

$$h_a < d_a + d_b + d_c < h_c.$$

Cînd punctul M se găsește în vîrful A, respectiv în vîrful C, suma:

$$d_a + d_b + d_c$$

ia evident valorile h_a, respectiv h_c, deci dacă punctul M este mobil în interiorul și pe laturile triunghiului ABC:

$$h_a \leqslant d_a + d_b + d_c \leqslant h_c,$$

extremele avînd loc în vîrfurile A, respectiv C (deoarece am presupus că $a > b > c$), deci, în general;

$$h \leqslant d_a + d_b + d_c \leqslant H$$

unde h și H sînt cea mai mică și cea mai mare dintre înălțimile triunghiului ABC; maximul are loc în vîrful triunghiului corespunzător (opus) laturii cele mai mici și minimul are loc în vîrful triunghiului opus laturii celei mai mari. În particular, triunghiul ABC poate fi echilateral și $h = H$, deci din inegalitatea:

$$h \leqslant d_a + d_b + d_c \leqslant H$$

deducem că oricare ar fi punctul M mobil în interiorul și pe laturile triunghiului echilateral ABC;

$$d_a + d_b + d_c = \text{constant}$$

și anume egală cu înălțimea triunghiului, proprietate dealtfel cunoscută.

VI.P.89. Dacă $b = 0$ atunci:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \tag{1}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0. \tag{2}$$

Relația (2) se mai poate scrie:

$$x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, ținînd seama de (1), se obține:

$$-x_1x_2(x_1+x_2)+x_3x_4(x_1+x_2)=0$$

și deci:

$$x_1+x_2=0 \tag{2'}$$

sau

$$x_1x_2=x_3x_4, \tag{2''}$$

Dacă $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ și $x_1x_2=x_3x_4$ rezultă și $x_1^2+x_2^2=x_3^2+x_4^2$.

Dacă $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ și $x_1+x_2=0$ din $x_3+x_4=0$, rezultă $x_1=-x_2$ și $x_3=-x_4$.

Renumerotînd altfel rădăcinile se obțin relațiile:

$x_1^2+x_2^2=x_3^2+x_4^2$, $x_1+x_2+x_3+x_4=0$.

Dacă:

$x_1^2+x_2^2=x_3^2+x_4^2$ cum $x_1+x_2+x_3+x_4=0$,

atunci:

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(x_3+x_4)^2-2x_3x_4$$

și deci:

$$x_1x_2=x_3x_4.$$

Dar:

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-b \tag{3}$$

se mai poate scrie:

$$x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)=-b,$$

$$x_1x_2(x_3+x_4+x_1+x_2)=-b$$

și deci $b=0$.

VI.P.90. a°). Pentru $n=3$ se obține ecuația:

$$(x+2)(x-1)(x-4)=0$$

și deci:

$$x_1=-2;\ x_2=1;\ x_3=4.$$

Scanned with OKEN Scanner

Verificare:

$E(-2) = (-3 + i\sqrt{3})^3 + (-3 - i\sqrt{3})^3 = 0,$

$E(1) = (i\sqrt{3})^3 + (-i\sqrt{3})^3 = 0,$

$E(4) = 3\sqrt{3}\,[(\sqrt{3} + i)^3 + (\sqrt{3} - i)^3] = 0.$

b°), c°). Ecuația se scrie:

$$\left(\frac{x - 1 + i\sqrt{3}}{x - 1 - i\sqrt{3}}\right)^n = -1.$$

Numărul:

$$K = (x - 1 + i\sqrt{3})$$

are modulul:

$$\rho = \sqrt{x^2 - 2x + 4},$$

Notînd $K = \rho\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, obținem:

$$\operatorname{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{x - 1},$$

cu:

$$\cos\,\alpha = \frac{x - 1}{\rho},\quad \sin\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\rho}.$$

Ecuația se scrie:

$$(\cos\,2\alpha + i\,\sin\,2\alpha)^n = -1,$$

de unde:

$$\cos 2n\,\alpha = -1;\ \sin 2n\,\alpha = 0,$$

deci $2n\,\alpha = (2k + 1)\,\pi$, $k \in \overline{0,\ n-1}$ deci

$$\alpha = \frac{2k + 1}{2n}\,\pi,\quad k \in \overline{0,\ n-1}$$

și deci:

$$\frac{\sqrt{3}}{x - 1} = \operatorname{tg}\frac{2k + 1}{2n}\,\pi,\quad k \in \overline{0,\ n-1}$$

de unde:

$$x = \sqrt{3}\,\operatorname{ctg}\frac{2k + 1}{2n}\,\pi + 1,\quad k \in \overline{0,\ n-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Ecuația $P_n(x) = 0$ se mai poate scrie:

$$[\sqrt{x^2 - 2x + 4}]^n [(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n + (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n] = 0$$

și deci:

$$\cos n\alpha = 0;\ \alpha = k\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n},\ k \in Z,$$

unde:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{x - 1}.$$

Soluțiile sînt:

$$x = \sqrt{3} \operatorname{ctg}\left[k\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right] + 1, \text{ cu } k \in Z \text{ și } n \in N^*.$$

VI.P.91. Se observă că $(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = 1$ și deci, folosind substituția $(\sqrt{2}+1)^{\sin\frac{x}{2}} = y$ cu $y \in (0, +\infty)$, ecuația se reduce la:

$$y^2 - ay + 1 = 0.$$

Această ecuație are rădăcini reale dacă $a \geqslant 2$ și anume:

$$(\sqrt{2}+1)^{\sin\frac{x}{2}} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

și deci:

$$\sin\frac{x}{2} = [\log_a(a \pm \sqrt{a^2 - 4}) - \log_a 2] : \log_a(\sqrt{2} + 1).$$

Ecuația trigonometrică are soluții numai dacă există valori ale lui a, $a \geqslant 2$, pentru care:

$$\log_a 2 - \log_a(\sqrt{2} + 1) \leqslant \log_a(a \pm \sqrt{a^2 - 4}) \leqslant \log_a(\sqrt{2} + 1) + \log_a 2$$

Scanned with OKEN Scanner

sau încă:

$$2(\sqrt{2}-1) \leqslant a \pm \sqrt{a^2-4} \leqslant 2(\sqrt{2}+1).$$

Dacă vom considera semnul + înaintea radicalului, dubla inegalitate este satisfăcută numai dacă $a = 2\sqrt{2}$.

Se obțin ecuațiile simple:

$$(\sqrt{2}+1)^{\sin\frac{x}{2}} = \sqrt{2}+1$$

și deci:

$$\sin\frac{x}{2} = 1;\ \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in Z,\ x = 4k\pi + \pi,\ k \in Z.$$

Verificare:

$$(\sqrt{2}+1)^{\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)} + (\sqrt{2}-1)^{\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= (\sqrt{2}+1)^1 + (\sqrt{2}-1)^1 = 2\sqrt{2}.$$

Dacă, în loc de $\sin\frac{x}{2}$, ar fi $\cos\frac{x}{2}$, condiția pentru a ar fi aceeași, iar soluția $x = 4k\pi,\ k \in Z$.

Cînd se înlocuiește $\sin\frac{x}{2}$ prin $\frac{\sin x}{2}$, condiția privitoare la a se scrie astfel, succesiv:

$$4(\sqrt{2}-1) \leqslant (a \pm \sqrt{a^2-4})^2 \leqslant 4(\sqrt{2}+1),$$

$$2\sqrt{2}-2 \leqslant a^2 - 2 \pm a\sqrt{a^2-4} \leqslant 2\sqrt{2}+2,$$

$$2\sqrt{2} \leqslant a^2 \pm a\sqrt{a^2-4} \leqslant 2\sqrt{2}+4.$$

Revenind la ecuația propusă, considerarea și a cazului cînd în fața expresiei $\sqrt{a^2-4}$ se află semnul — conduce la o discuție analoagă.

În definitiv, pentru $a^2 = 2 + 2\sqrt{2}$, se obține ecuația:

$$(\sqrt{2}+1)^{\frac{\sin x}{2}} + (\sqrt{2}-1)^{\frac{\sin x}{2}} = \sqrt{2+2\sqrt{2}}.$$

Prin ridicare la pătrat, rezultă:

$$y_{1,2} = \sqrt{2} \pm 1 \text{ unde } y = (\sqrt{2}+1)^{\sin x}$$

și deci:

$$\sin x_{1,2} = \pm 1;\ x = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in Z.$$

În general, ecuația:

$$(\sqrt{2}+1)^{\frac{\sin x}{k}} + (\sqrt{2}-1)^{\frac{\sin x}{k}} = a;\quad a > 0,$$

admite soluții date de:

$$\sin x = k\,\frac{\log_a(a \pm \sqrt{a^2-4}) - \log_a 2}{\log_a(\sqrt{2}+1)}$$

cu condiția:

$$2^k(\sqrt{2}-1) \leqslant (a \pm \sqrt{a^2-4})^k \leqslant 2^k(\sqrt{2}+1).$$

PROBLEME ALESE

VI.92. Să se determine forma generală a numerelor naturale ale căror pătrate se termină cu cel puțin două cifre de 4.

VI.93[1]**.** Să se arate că un poligon cu 15 laturi nu poate fi tăiat în paralelograme.

VI.94. Să se exprime $x, y \in R$ din ecuația:

$$z_1 x + z_2 y = z_3$$

Scanned with OKEN Scanner

în funcție de $z_1, z_2, z_3 \in C - R$, menționînd și condițiile (dacă există) ca ecuația să admită soluție unică.

VI.95[2]**.** Să se rezolve în numere naturale nenule ecuația:

$$(x^2 - y^2)(z - 1) = 2xz - 1.$$

VI.96[2]**.** Dovediți că pentru orice $n \in N$, $n > 4$, există un poliedru cu n fețe cu proprietatea că suma distanțelor de la oricare punct interior la fețe (sau la planele ce suportă aceste fețe) este constantă.

Notă. Numim plan ce *suportă* o figură f, planul care conține toate punctele lui f.

VI.97[1]**.** Cîte tipuri de poligoane regulate se pot înscrie într-o elipsă cu axele inegale?

VI.98. Dovediți, prin mijloace elementare, că suma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

este infinită.

VI.99*. Să se determine rădăcinile ecuației:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(\varphi + k\alpha)\, x^k = 0.$$

Cazuri particulare.

VI.100[3]**.** Care este numărul maxim de semidrepte din spațiu ce pornesc din același punct și fac două cîte două numai unghiuri obtuze?

VI.101[2]**.** Se dau în plan 5 puncte. Printre dreptele care unesc aceste 5 puncte cîte două, nu se află drepte paralele, perpendiculare sau coincidente. Prin fiecare dintre aceste puncte date se duc perpendiculare pe toate dreptele ce se pot construi cu celelalte patru puncte date.

Scanned with OKEN Scanner

Care este numărul maxim de puncte de intersecție a acestor perpendiculare, în afara punctelor date?

(Olimpiada Internațională de Matematică)

VI.102*. Să se arate că oricum am împărți mulțimea N^*a numerelor naturale în $k \geqslant 2$ submulțimi disjuncte și nevide (disjuncte două cîte două), în cel puțin una există trei numere x, y, z astfel ca:

$$x + y = z.$$

VI.103[1]. Un segment de lungime l este acoperit de 43 de segmente așa încît orice grupă de 42 de segmente nu acopere segmentul de lungime l și astfel încît nici un segment să nu acopere pe altul. Să se arate că se pot alege din cele 43 de segmente o grupă de segmente disjuncte două cîte două (fără puncte comune) astfel ca suma lungimilor lor să fie cel puțin $l/2$.

(Olimpiadă, U.R.S.S.)

VI.104*. Să se găsească toate soluțiile în numere raționale ale ecuației:

$$x^y = y^x$$

cu $x \neq y$.

Să se găsească toate soluțiile în numere naturale ale acestei ecuații, în aceeași condiție $x \neq y$.

VI.105*. Pe întregul plan se dispun pătrate 1×1, asemănătoare celor de pe hîrtia milimetrică. Planul este astfel împărțit în pătrate de aceeași mărime.

Să se arate că, pentru orice număr natural k, există în plan un cerc care are în interior exact k vîrfuri de pătrate. Dacă r este raza unui astfel de cerc, să se calculeze numărul către care tinde raportul:

$$\frac{r_k}{\sqrt{k}}$$

cînd variabila k tinde către infinit.

(Valeriu Mangu, Rev. „514", IV. 43)

VI.106[2]. Fie c un număr rațional, pozitiv și diferit de 1. Să se arate că există cel puțin o partiție $P =$

$= \{A, B\}$ cu $A \neq B$, a mulțimii numerelor naturale fără 0, astfel ca mulțimea $K = K_A \cup K_B$, unde:

$$K_A = \left\{ \frac{x_i}{x_j} \,\middle|\, x_i,\ x_j \in A,\ i \neq j \right\},$$

$$K_B = \left\{ \frac{x_i}{x_j} \,\middle|\, x_i,\ x_j \in B,\ i \neq j \right\}$$

să nu conțină pe c. Să se găsească o astfel de partiție.

(Valeriu Mangu, Rev. „514", IV. 33; G.M.B., 15658)

VI.107*. Să se demonstreze că pentru orice întreg pozitiv m, există o mulțime E, finită, nevidă, de puncte în plan, cu proprietatea:
dacă A este un element al mulțimii E, există în E, m și numai m puncte situate la distanța 1 de A.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

VI.108. Există, oare, pe o circumferință de rază 1, un număr de 1975 puncte distincte astfel încît distanța (în linie dreaptă) între oricare două să fie un număr rațional?

(Olimpiada Internațională de Matematică)

VI.109*. Dovediți că pe circumferința unui cerc de rază r, în așa fel încît $r^2 \in Q$, este posibil să găsim o infinitate de puncte astfel încît distanța dintre oricare două să fie număr rațional.

VI.110[1]. Fie A suma cifrelor numărului 4444^{4444}, B suma cifrelor lui A.
Să se calculeze suma cifrelor lui B.

(Olimapiada Internațională de Matematică)

VI.111*. Fie A_1 suma cifrelor lui a^n, a și n fiind numere naturale.
Fie A_2 suma cifrelor lui A_1, ..., A_k suma cifrelor lui A_{k-1}.
Continuînd în acest mod, ajungem la un t astfel încît $0 < A_t \leqslant 9$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se calculeze A_t (o generalizare a problemei VI.110).

VI.112*. Să se arate că:

$$\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n} i_1 i_2 \ldots i_m = C_{n+m-1}^{2m-1}, \quad i_s \in N^*.$$

(Matematika v škole, 1968)

VI.113[3]. Să se determine soluțiile în numere reale ale sistemului de ecuații:

$$\begin{aligned} 2x_1x_2 &= x_1^2 + 2, \\ 2x_2x_3 &= x_2^2 + 2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2x_nx_1 &= x_n^2 + 2. \end{aligned}$$

VI.114*. a°). Dovediți că:

$$\sec\frac{\pi}{11} + \sec\frac{3\pi}{11} + \sec\frac{5\pi}{11} + \sec\frac{7\pi}{11} + \sec\frac{9\pi}{11} = 6.$$

b°). Care este ecuația de gradul 5 care admite drept rădăcini numerele:

$$\sec\frac{\pi}{11}, \quad \sec\frac{3\pi}{11}, \quad \sec\frac{5\pi}{11}, \quad \sec\frac{7\pi}{11}, \quad \sec\frac{9\pi}{11}?$$

VI.115*. Să se arate ecuația de mai jos admite cel mult n rădăcini reale:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i x + b_i| + a_0 x + b_0 = 0$$

$$\left(\text{știind că } n \geqslant 2, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i \neq 0, \quad \sum_{m=0}^{i-1} a_m - \sum_{m=i}^{n} a_m \neq 0, \right.$$
$$\left. (\forall)\, i \in \{1, \ldots, n\}\right).$$

VI.116[2]. Dacă $(G, *)$ este grup necomutativ, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x * a = y * y \\ x * b = y * c. \end{cases}$$

(D. M. Bătinețu, G.M.B)

Scanned with OKEN Scanner

VI.117[2]**.** Se notează $[x]_*$ partea întreagă a numărului x, adică cel mai mare întreg nesuperior lui x.

Să se calculeze suma:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]_* + \left[\frac{n+2}{2^2}\right]_* + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]_* + \ldots$$

pentru fiecare număr pozitiv n, apoi să se demonstreze valabilitatea rezultatului obținut.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

VI.118[1]**.** Să se arate că există o infinitate de numere prime, fără a folosi ideea lui *Euclid*.

VI.119*. (*Lagrange*). Orice număr întreg $n \geqslant 0$ poate fi scris ca sumă de patru pătrate ale unor numere întregi.

VI.120*. Se consideră familia de polinoame P_n definită prin relația de recurență astfel:

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x, \text{ iar } P_n(x) = x^n - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]_*} C_n^k P_{n-2k}(x),$$

unde $n = 2, 3, \ldots$

Să se demonstreze că rădăcinile polinomului P_n sînt toate reale și ele au forma:

$$x_k = 2\cos\frac{(2k+1)\,\pi}{2n},\quad k = 0, 1, \ldots, n-1,\ n \geqslant 1.$$

(Ioan Tomescu, G.M.B., 12909)

VI.121[2]**.** Să se determine toate soluțiile reale $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ale sistemului de ecuații:

i°). $(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leqslant 0;$

ii°). $(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leqslant 0;$

iii°). $(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leqslant 0;$

iv°). $(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leqslant 0;$

v°). $(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leqslant 0.$

(Olimpiada Internațională de Matematică)

Scanned with OKEN Scanner

VI.122*. Se dau mulțimile finite $A_1, A_2, \ldots, A_n$ care au același număr de elemente și se notează $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Pentru un indice $k (1 \leqslant k \leqslant n)$ fixat, orice reuniune de k mulțimi dintre $A_1, A_2, \ldots, A_n$ este egală cu S, iar orice reuniune de mai puțin de k mulțimi este o submulțime proprie a lui S.

Să se exprime în funcție de n și k:

1°). Numărul minim de elemente din S;

2°). Numărul elementelor din fiecare mulțime A, cînd numărul elementelor din S este minimal;

3°). Numărul elementelor comune la j dintre mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cînd S are un număr minim de elemente.

(The Am. Math. Monthly)

VI.123*. a°). Dovediți că orice număr rațional pozitiv se poate exprima ca o sumă finită de termeni din șirul $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, nu toți egali între ei.

b°). Dovediți că suma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

nu poate fi un număr întreg pentru nici o valoare a lui n mai mare decît 1.

c°). Să se arate că în șirul $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{(n-1)}{n}$; unde n este un număr natural mai mare decît 2, numărul de termeni care sînt fracții ireductibile este par.

VI.124[2]. Fie $A_1, \ldots, A_n$ vîrfurile unui poligon regulat și P un punct în planul poligonului.

Să se arate că se poate construi un poligon cu laturile de lungime $PA_1, PA_2, \ldots, PA_n$ (o generalizare a problemei lui *D. Pompei*).

VII.125*. a°). Să se arate că într-un poligon cu exact n axe de simetrie se poate înscrie un poligon

regulat cu d laturi, oricare ar fi d divizor al lui $2n$, cu $d \geqslant 3$.

b°). Să se arate că pentru orice poligon convex se poate construi un triunghi echilateral cu vîrfurile pe laturile sale.

c°). Să se arate că toate axele de simetrie ale unui poligon sînt concurente.

VI.126*. a°). Să se arate că întregul spațiu poate fi umplut cu o îmbinare de octaedre și tetraedre regulate.

b°). Să se arate că întregul spațiu poate fi umplut cu dodecaedre rombice.

c°). Să se arate că nu se poate face o pardosire a planului cu poligoane convexe egale, cu mai mult de 16 laturi.

VI.127*. a°). Dacă n numere prime sînt în progresie aritmetică, atunci rația progresiei se divide prin fiecare număr prim $p < n$.

(Cantor)

b°). Dovediți că există o infinitate de numere prime de forma $4m + 3$.

c°). Dovediți că nu pot exista progresii aritmetice infinite (cu rația nenulă) formate din termeni numai numere prime.

d°). Dovediți că pentru fiecare $k \in N^*$ există k numere consecutive cu proprietatea că toate sînt numere compuse.

VI.128*. Fie x și y două numere reale pozitive. Condiția necesară și suficientă ca șirurile:

$$[x]_*, [2x]_*, [3x]_*, \ldots$$

$$[y]_*, [2y]_*, [3y]_*, \ldots$$

să reprezinte împreună toate numerele naturale fără repetare este ca x și y să fie iraționale și să existe relația:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

VI.129. Dovediți că pentru orice număr natural $n > 1$ are loc:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{3}{2}.$$

VI.130*. Fie $a \in N^*$, $a > 1$, arbitrar. Scriem numerele naturale de la 1 la a (inclusiv 1 și a) în ordinea firească. Asupra acestui șir de numere facem următoarele operații: pornind de la 1, ștergem din șirul scris numerele ce apar din 2 în 2. Unele locuri rămîn în felul acesta goale. Pornind tot de la 1, ștergem din 3 în 3 numerele ce apar, iar în cazul în care dăm peste un loc gol (numărul din acel loc a fost șters în operația precedentă) scriem numărul din nou (care a fost pe acel loc la începutul acestor operații).

Continuăm raționamentul de a ori. Dovediți că numerele rămase sînt toate pătrate perfecte.

Exemplu pentru $a = 10$ (cînd ștergem un număr, în locul său punem —):

1°). 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;
2°). 1, —, 3, —, 5, —, 7, —, 9, —;
3°). 1, —, —, —, 5, 6, 7, —, —, —;
4°). 1, —, —, 4, 5, 6, 7, 8, —, —;
5°). 1, —, —, 4, —, 6, 7, 8, —, 10;
6°). 1, —, —, 4, —, —, 7, 8, —, 10;
7°). 1, —, —, 4, —, —, —, 8, —, 10;
8°). 1, —, —, 4, —, —, —, —, —, 10;
9°). 1, —, —, 4, —, —, —, —, 9, 10;
10°). 1, —, —, 4, —, —, —, —, 9, —.

VI.131*. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\frac{x_1}{a_1 + \lambda_1} + \frac{x_2}{a_2 + \lambda_1} + \ldots + \frac{x_n}{a_n + \lambda_1} - 1 = 0,$$

$$\frac{x_1}{a_1 + \lambda_2} + \frac{x_2}{a_2 + \lambda_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n + \lambda_2} - 1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x_1}{a_1 + \lambda_n} + \frac{x_2}{a_2 + \lambda_n} + \ldots + \frac{x_n}{a_n + \lambda_n} - 1 = 0,$$

$$a_i \neq a_j, \ (\forall)\ i \neq j;\ i, j \in \overline{1, n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

VI.132*. a°). Să se calculeze minimul produsului:

$$P = x_1! \, x_2! \ldots x_n!$$

cînd suma:

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

este constantă ($x_i \in N^*$, $i \in \{1, \ldots, n\}$).

b°). Să se calculeze minimul sumei:

$$T = x_1! + x_2! + \ldots + x_n!$$

cînd suma:

$$K = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

este constantă ($x_i \in N^*$, $i \in \{1, \ldots, n\}$).

c°). Să se calculeze:

$$\max (n_1 n_2 \ldots n_k)$$

unde $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, $n_i \in N^*$, $(\forall)\, i \in \{1, \ldots, k\}$.

VI.133*. a°). Să se găsească o soluție în numere naturale a ecuației:

$$x^4 + y^5 = z^7.$$

b°). Chestiune analoagă pentru ecuația:

$$x^5 + y^{11} = z^8.$$

VI.134*. a°). Să se determine curba de lungime minimă care împarte aria unui triunghi echilateral în două părți egale, avînd capetele pe laturi diferite.

b°). Șase discuri circulare plane sînt așezate astfel încît nici un disc nu conține, în interior sau pe frontieră, centrul altuia.

Dovediți că nu există nici un punct comun celor șase discuri.

VI.135*. Să se arate că ecuația:

$$x^2 + y^3 + z^4 = k^5$$

are o infinitate de soluții în numere naturale nenule.

Scanned with OKEN Scanner

Să se găsească o astfel de soluție.

VI.136*. Să se demonstreze că fiecare număr rațional pozitiv poate fi reprezentat ca suma cuburilor a trei numere raționale pozitive.

VI.137*. Se consideră șirul c_n definit astfel:

$$c_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_8,$$
$$c_2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_n = a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere reale, care nu sînt egale cu zero.

Știind că printre termenii șirului c_n o infinitate de termeni sînt egali cu zero, să se determine numerele n pentru care $c_n = 0$.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

VI.138*. Fie în plan un pătrat de latură 50, o linie frîntă L situată în pătrat astfel ca distanța de la fiecare punct din interiorul pătratului la punctul cel mai apropiat al liniei L este inferior lui 1.

Dovediți că lungimea lui L este superioară lui 1248.

VI.139*. Să se arate că pentru $n \geqslant 20$:

$$4^{\frac{2n}{3}} > 4n(2n)^{\sqrt{2n}}.$$

VI.140[2]. Fie O un punct în planul triunghiului ABC; dreptele BO, CO taie laturile AC, AB în B_1, C_1; o secantă arbitrară dusă prin O taie aceleași laturi în β și γ. Atunci:

$$\frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{B_1 A}{B_1 C} + \frac{\gamma B}{\gamma A} \cdot \frac{C_1 A}{C_1 B} = 1$$

(o generalizare a teoremei lui *van Aubel*).

Scanned with OKEN Scanner

VI.141*. Se consideră șirul de numerele reale $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ cu proprietatea că $1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$ și cu ajutorul lui se formează șirul $\{b_n\}$, $n \in N^*$, astfel:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

a°). Să se arate că $0 \leqslant b_n < 2$ pentru orice $n \in N^*$.

b°). Să se arate că pentru $(\forall)c \in [0, 2)$ există un șir $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ cu proprietatea că $1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots a_n \leqslant \ldots$ astfel încît $b_n > c$ pentru o infinitate de indici n.

(Olimpiada Internațională de Matematică)

INDICAȚII

VI.95[2]. Se folosesc substituții convenabile și se aduce ecuația la o formă cunoscută.

VI.97[1]. Se folosește o proprietate caracteristică a poligoanelor regulate.

VI.99*. Se pornește de la o ecuație trigonometrică, exprimată și sub formă polinomială..

VI.102*. Se procedează prin reducere la absurd.

VI.104*. Se folosește scrierea numerelor raționale ca raport de numere întregi.

VI.105*. Se ordonează distanțele de la un punct P al planului la punctele laticiale (vîrfurile pătratelor).

VI.112*. Să poate raționa prin inducție.

VI.113[3]. Se scrie sub o altă formă sistemul.

VI.114*. Se pornește de la o ecuație trigonometrică scrisă și sub formă polinominală.

Scanned with OKEN Scanner

VI.115*. Se demonstrează prin reducere la absurd.

VI.117[2]. Se poate raționa prin inducție.

VI.118[1]. Se raționează prin reducere la absurd.

VI.119*. Se demonstrează întîi că orice număr prim se poate scrie ca sumă de patru pătrate de numere întregi. Se folosesc identități cunoscute.

VI.120*. Se face o substituție convenabilă și se determină expresia generală a lui P_n.

VI.123*. a°). Se are în vedere că:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)},$$

VI.127*. b°). Se are în vedere că orice număr de forma $4m + 3$ are un divizor prim de aceeași formă.

VI.131*. Se construiește o funcție ajutătoare.

VI.133*. a°), b°). Se pornește de la o identitate cunoscută.

VI.134*. a°). Curba cerută este un cerc.

VI.137*. Se arată că $c_n = 0$ pentru toți n impari.

VI.138*. Se poate folosi așa-numitul principiu al cutiei.

SOLUȚII

VI.92. Se observă imediat că $12^2 = 144$, $1038^2 = 1077444$ deci numerele 12 și 1038 se bucură de proprietatea din enunț.

Să tratăm problema pentru cazul general, anume să determinăm numerele naturale (sau forma acestora) cu proprietatea că pătratele lor se termină cu cel puțin două cifre egale.

Scanned with OKEN Scanner

Distingem mai multe cazuri:

1°). Dacă pătratul numărului natural N_1, $N_1 \leqslant 10^n/2$, cu n cifre, $n \geqslant 2$, se termină cu exact k cifre egale, cu a, $k \leqslant n$:

$$N_1^2 = A \cdot 10^k + a \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k \text{ de } 1}, \quad a \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\},$$

atunci și pătratul numărului $N_1' = 10^n - N_1$ se termină cu exact k cifre egale cu a:

$$N_1'^2 = B \cdot 10^k + a \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k \text{ de } 1}.$$

În adevăr, fie N_1, $N_1 \leqslant 10^n/2$ un număr natural cu $n \geqslant 2$ cifre astfel ca:

$$N_1^2 = A \cdot 10^k + a \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k \text{ de } 1}, \quad a \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}.$$

Atunci:

$$N_1' = 10^n - N_1$$

implică:

$$N_1'^2 = (10^n - N_1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n N_1 + N_1^2 =$$

$$= 10^{2n} - 2 \cdot 10^n N_1 + 10^k A + a \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k \text{ de } 1} =$$

$$= 10^k(10^{2n-k} - 2 \cdot 10^{n-k} N_1 + A) + a \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k \text{ de } 1} =$$

$$= 10^k B + a \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k \text{ de } 1},$$

ceea ce demonstrează că și numărul N_1', asociat lui N_1, are pătratul terminat cu aceleași cifre egale ca și pătratul lui N_1.

Această observație importantă ne permite să determinăm toate numerele naturale cu n cifre, avînd proprietatea menționată; dacă se cunosc numerele N_1 inferioare lui $10^n/2$ cu această proprietate, cu ajutorul

Scanned with OKEN Scanner

relației $N_1' = 10^n - N_1$. Rezultatul stabilit anterior arată, de asemenea, că numerele naturale $N_1 \leqslant 10^n/2$, cu n cifre, cu această proprietate, sînt asociate.

2°). Dacă pătratul numărului natural N_1, cu $n \geqslant 2$ cifre, $N_1 \leqslant 10^n/4$, se termină cu exact k cifre egale cu a, $k \leqslant n$:

$$N_1^2 = A \cdot 10^k + a \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k \text{ de } 1}, \quad a \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\},$$

atunci și numărul $N_1' = 10^n/2 - N_1$ se bucură de aceeași proprietate:

$$N_1'^2 = B \cdot 10^k + a \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k \text{ de } 1}.$$

În adevăr, fie N_1 un număr natural cu n cifre, $N_1 \leqslant 10^n/4$, $n \geqslant 2$, astfel ca:

$$N_1^2 = A \cdot 10^k + a \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k \text{ de } 1}, \quad a \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Atunci, pentru $N_1' = 10^n/2 - N_1$, are loc:

$$N_1'^2 = (10^n/2 - N_1)^2 = 10^{2n}/2^2 - 10^n \cdot N_1 + N_1^2 =$$

$$= 10^n \cdot 5^n \cdot 2^{n-2} - 10^n N_1 + 10^k A + a \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k \text{ de } 1} =$$

$$= 10^k(10^{n-k} \cdot 5^n \cdot 2^{n-2} - 10^{n-k}N + A) +$$

$$+ a \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k \text{ de } 1} = B \cdot 10^k + a \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k \text{ de } 1},$$

ceea ce arată că și numărul N_1', asociat lui N_1, cu proprietatea $N_1 + N_1' = 10^n/2$, are pătratul terminat cu aceleași cifre egale ca și pătratul lui N_1.

Deducem de aici că dacă numărul natural $N_1 \leqslant 10^n/4$, $n \geqslant 2$, cu n cifre, posedă proprietatea enunțată, mai există atunci încă 3 numere de n cifre cu aceeași proprietate, adică numerele:

$$N_1, \quad 10^n/2 - N_1, \quad 10^n/2 + N_1 \quad 10^n - N_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

În cele ce urmează vom determina numerele cu două sau mai multe cifre care au proprietatea menționată.

Ultima cifră a lui N_1 poate fi oricare din numerele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Între ultima cifră a lui N_1 și ultima cifră a numărului N_1^2 stabilim următoarea corespondență:

— ultima cifră a lui N_1 : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

— ultima cifră a lui N_1^2 : 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1,

ceea ce arată că pătratul unui număr N_1 poate avea ultimele cifre egale cu numai unul din numerele 1, 4, 5, 6, 9, 0, dacă acest lucru este posibil.

Pentru numerele naturale de forma $10^m \cdot A$, m, $A \in N^*$, avem următoarea proprietate:

Orice număr de forma $10^m \cdot A$, m, $A \in N^*$, posedă proprietatea studiată și numărul cifrelor ultime, egale între ele (în cazul acesta 0) ale numărului N_1^2 este $2m$ căci $(10^m \cdot A)^2 = 10^{2m} \cdot A^2$ (în ipoteza că $_*(A, 10) = 1$).

Vom determina mai întîi numerele de două cifre, ale căror pătrate au cel puțin ultimele două cifre egale, căutînd să vedem ce cifră putem așeza la stînga numerelor de o cifră. Cu alte cuvinte trebuie studiată ecuația:

$$(10a + u)^2 = A \cdot 10^2 + k \cdot 11, \quad a \in \{1, \ldots, 9\},$$

unde:

$k = 1$ pentru $u = 1$ sau $u = 9$;
$k = 4$ pentru $u = 2$ sau $u = 8$;
$k = 9$ pentru $u = 3$ sau $u = 7$;
$k = 6$ pentru $u = 4$ sau $u = 6$;
$k = 5$ pentru $u = 5$.

Studiind ecuația în cazurile specificate mai sus stabilim:

3°). Nu există numere naturale de două cifre ale căror pătrate să se termine cu cel puțin două cifre egale, astfel ca pătratul să aibă forma:

$$10^2 \cdot A + k \cdot \overline{11}$$

pentru $k = 1, 5, 6, 9$.

Numerele naturale de două cifre ale căror pătrate se termină cu cifre egale au pătratele de forma:

$$10^2 \cdot A + k \cdot \overline{11}$$

unde $k = 4$.

Rezultă de aici o consecință importantă, anume că dacă pătratul unui număr natural N, cu $n \geqslant 2$ cifre se termină cu două cifre identice, acestea nu pot fi decît 44. Numerele de două cifre ale căror pătrate se termină cu cel puțin două cifre de 4 sînt:

$$12,\ 38,\ 62,\ 88$$

căci:

$$12^2 = 144,\ 38^2 = 1444,\ 62^2 = 3844,\ 88^2 = 7744.$$

Din studiul făcut rezultă că forma tuturor numerelor naturale ale căror pătrate se termină cu cel puțin două cifre egale este:

$$100n + 50k - 38,\quad n \in N,\ k \in \{1, 2\},$$

pentru numerele ale căror ultime două cifre sînt 12, respectiv 62, respectiv:

$$100n + 50k - 12,\quad n \in N,\quad k \in \{1, 2\},$$

pentru numerele ale căror ultime două cifre sînt 88 respectiv 62.

VI.93[1]. Tratăm cazul general. Presupunem că un poligon cu n laturi poate fi descompus în paralelograme. Cum orice latură a poligonului va fi suportul unei laturi a unui paralelogram, iar latura opusă a paralelogramului astfel obținut va fi latură a unui alt paralelogram sau va juca același rol etc., rezultă că laturile poligonului sînt paralele două cîte două (3 laturi nu pot fi paralele căci poligonul este convex) adică poligonul are un număr par de laturi deci n trebuie să fie par. Dar 15 este impar.

VI.94. Fie $z_j = a_j + ib_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$, $i = \sqrt{-1}$, $a_j, b_j \in R$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația se scrie, succesiv:

$$x(a_1 + ib_1) + y(a_2 + ib_2) = a_3 + ib_3,$$

$$(a_1x + a_2y) + i(b_1x + b_2y) = a_3 + ib_3,$$

de unde, identificînd părțile reale și respectiv imaginare:

$$a_1x + a_2y = a_3,$$

$$b_1x + b_2y = b_3,$$

adică, rezolvînd sistemul:

$$x = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_2b_1 - a_1b_2};$$

$$y = \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

În continuare:

$$x = \frac{a_2b_3 + ib_2b_3 - ib_2b_3 - a_3b_2}{a_2b_1 + ib_1b_2 - ib_1b_2 - a_1b_2} = \frac{b_3z_2 - b_2z_3}{b_1z_2 - b_2z_1};$$

$$y = \frac{a_1b_3 + ib_1b_3 - ib_1b_3 - a_3b_1}{a_1b_2 + ib_1b_2 - ib_1b_2 - a_2b_1} = \frac{b_3z_1 - b_1z_3}{b_2z_1 - b_1z_2}.$$

Dar dacă $z = a + ib$ iar φ este argumentul lui z:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}; \quad \varphi = \operatorname{arc\ tg}\frac{b}{a} = \arg z; \quad a =$$

$$= \rho\cos\varphi = |z|\cos(\arg z) \quad b = |z|\sin(\arg z).$$

În final:

$$x = \frac{|z_3|z_2\sin(\arg z_3) - |z_2|z_3\sin(\arg z_2)}{|z_1|z_2\sin(\arg z_1) - |z_2|z_1\sin(\arg z_2)};$$

$$y = \frac{|z_3|z_1\sin(\arg z_1) - |z_1|z_3\sin(\arg z_1)}{|z_2|z_1\sin(\arg z_2) - |z_1|z_2\sin(\arg z_1)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția cerută este:

$$|z_2|\, z_1 \sin(\arg z_2) \neq |z_1|\, z_2 \sin(\arg z_1).$$

VI.95[2]. Cu substituțiile:

$$a = x + y,$$
$$b = x - y,$$
$$c = z$$

ecuația devine:

$$abc + 1 = ab + bc + ca. \tag{1}$$

Dar a, b, c sînt numere naturale căci dacă $x \leqslant y$ atunci $x^2 - y^2 \leqslant 0$ adică $2xz - 1 \leqslant 0$, absurd. Din (1) deducem:

$$abc < abc + 1 = ab + bc + ca$$

deci:

$$1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \tag{2}$$

Relația (1) este însă simetrică în raport cu a, b, c în sensul că schimbînd între ele rolul variabilelor, ecuația nu își schimbă forma. Ca atare, putem presupune fără a restrînge generalitatea, că $a \leqslant b \leqslant c$. Astfel, relația (2) devine (nu ținem deocamdată seama de unde provine ecuația (1)):

$$1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{3}{a}$$

de unde $a < 3$.

Dacă $a = 1$, ecuația (1) devine:

$$bc + 1 = b + c + bc \text{ adică } b + c = 1,$$

absurd, deoarece b, $c \in N^*$.

Dacă $a = 2$, ecuația (1) devine:

$$2bc + 1 = 2b + 2c + bc \text{ adică } bc + 1 = 2b + 2c. \tag{3}$$

Însă:

$$bc < bc + 1 = 2b + 2c \text{ deci } 1 < \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \leqslant \frac{4}{b}$$

de unde $b < 4$.

Dacă $b = 3$ atunci $c = 5$.

Dacă $b = 2$ atunci ecuația (3) este imposibilă.

Dacă $b = 1$ atunci $c = -1$ și soluția nu convine.

Rămîne $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$. Permutînd aceste valori obținem noi soluții pentru ecuația (1).

Așadar obținem sistemele:

$$1°).\ \begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

care nu convine;

$$2°).\ \begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

care nu convine;

$$3°).\ \begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 3 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

care dă $x = 4, y = 1, z = 2$ (s-a ținut seama că $x + y > x - y$).

Ca atare, ecuația propusă are o singură soluție, anume cea de mai sus.

VI.96[2]. Considerăm un tetraedru regulat $WABC$ și M un punct în interiorul său. Folosind notațiile obișnuite, se obține:

$$V_{MWAB} = \frac{1}{3} d_{WAB} \cdot A_{WAB}, \tag{1}$$

$$V_{MWBC} = \frac{1}{3} d_{WBC} \cdot A_{WBC}, \tag{2}$$

$$V_{MWAC} = \frac{1}{3} d_{WAC} \cdot A_{WAC}, \tag{3}$$

$$V_{MABC} = \frac{1}{3} d_{ABC} \cdot A_{ABC}, \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde d_{WAC} reprezintă distanța de la punctul M la fața WAC etc., V_{MWAB} reprezintă volumul tetraedrului $MWAB$ iar A_{WAC} aria feței WAC etc. Cum:

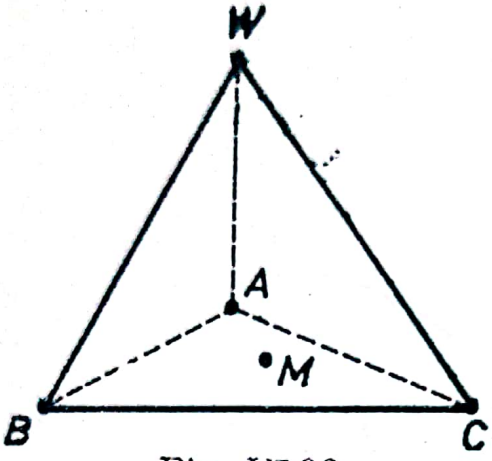


Fig. VI.96

$$A_{WAB} = A_{WBC} = A_{WAC} = A_{BAC} = K$$

deoarece tetraedrul este regulat, rezultă, adunînd relațiile (1) — (4):

$$d_{WAB} + d_{WBC} + d_{WAC} = \frac{3V}{K} = \text{constant},$$

unde V este volumul tetraedrului $WABC$. Deci pentru $n = 4$ afirmația este adevărată. Tăiem vîrfurile A și C cu două plane paralele. În felul acesta am obținut un poliedru cu 6 fețe. Suma distanțelor de la un punct M interior la cele două plane este mereu constantă, egală cu distanța dintre cele două plane, oricare ar fi poziția punctului M în interiorul poliedrului și cum suma distanțelor la celelalte fețe (sau la planele ce suportă aceste fețe) este constantă, avînd în vedere concluzia precedenă, rezultă că suma distanțelor la toate planee ce suportă fețele este constantă. Repetînd raționamentul ori judecînd prin inducție matematică, obținem valabilitatea afirmației pentru n par.

Pentru cazul cînd n este impar, considerăm o piramidă echifacială cu baza un dreptunghi (de aceeași arie cu oricare din fețe) și repetăm judecata.

Problema în plan: pentru orice $n > 3$ există un poligon cu n laturi cu proprietatea că suma distanțelor de la orice punct interior la laturi sau la dreptele ce suportă laturile este constantă se rezolvă analog, pentru n impar considerînd un triunghi echilateral, iar pentru n par un dreptunghi (problema a făcut obiectul unui subiect de la prima probă de baraj din 1975, organizată în vederea selecționării echipei țării la Olimpiada Internațională de Matematică).

Scanned with OKEN Scanner

VI.97[1]. Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc. Rezultă că putem avea doar două poligoane regulate înscrise într-o elipsă cu axele inegale deoarece numărul maxim al punctelor de intersecție ale unui cerc cu o elipsă este 4 (vezi fig. VI.91.1, VI.97.2).

Există deci doar triunghiul echilateral și pătratul.

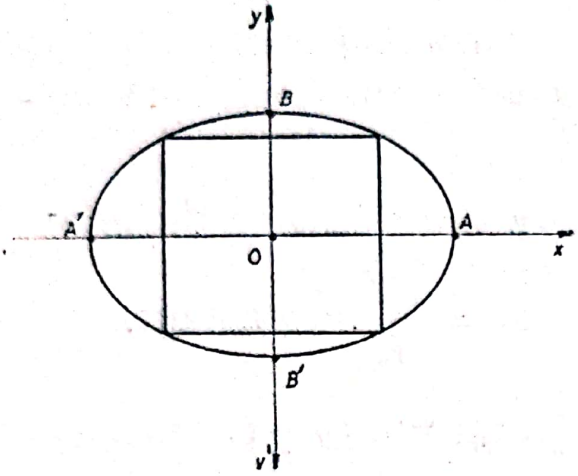


Fig. VI.97.1

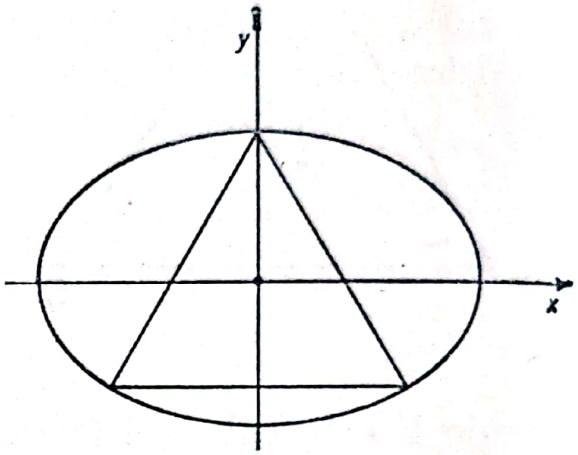


Fig. VI.97.2

VI.98. Evident:

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\left(1+\frac{1}{2^1}\right)+\left(\frac{1}{2^1+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right).$$

Cum:

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n}>\underbrace{\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{ termeni}}\geqslant\frac{1}{2}$$

rezultă:

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}>\frac{n}{2}$$

deci, cînd n crește nemărginit, suma:

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

crește nemărginit.

VI.99*. Fie:

$$u = \cos \alpha + i \sin \alpha, \qquad i = \sqrt{-1},$$
$$t = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

și:

$$t(1 + ux)^n = M + iN_1. \tag{1}$$

În acest caz:

$$\bar{t}(1 + \bar{u}x)^n = M - iN_1 \tag{2}$$

unde $\bar{z}$ reprezintă conjugatul numărului z. În urma dezvoltării găsim:

$$M = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(\varphi + k\alpha)\, x^k$$

și, adunînd relațiile (1) și (2):

$$M = \frac{t(1 + ux)^n + \bar{t}(1 + \bar{u}x)}{2}$$

astfel că ecuația:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(\varphi + k\alpha)\, x^k = 0 \tag{3}$$

este echivalentă cu ecuația:

$$t(1 + ux)^n + \bar{t}(1 + \bar{u}x)^n = 0. \tag{4}$$

Această ecuație se mai scrie:

$$\frac{t(1 + ux)^n}{\bar{t}(1 + \bar{u}x)^n} = -1 = \cos \pi + i \sin \pi = , k \in Z,$$
$$= \cos(2k + 1)\pi + i \sin(2k + 1)\pi$$

sau:

$$\frac{(1 + ux)^n}{(1 + \bar{u}x)^n} = [\cos(2k + 1)\pi + i \sin(2k +$$

$$+ 1)\pi] \cdot \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \cos[(2k + 1)\pi -$$

$$- 2\varphi] + i \sin[2k + 1)\pi - 2\varphi].$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă deci că soluțiile ecuației (4) sînt date de:

$$\frac{1 + ux_k}{1 + \bar{u}x_k} = \cos\frac{(2k+1)\pi - 2\varphi}{n} + \\ + i\sin\frac{(2k+1)\pi - 2\varphi}{n},$$

unde k ia valorile $0, \ldots, n-1$. Calculul rădăcinilor x_k, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, fiind presupunem, acum simplu, îl omitem.

Ne facem datoria de a specifica aici că problema a fost preluată dintr-o lucrare de excepție din literatura sovietică de specialitate, СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ (Culegere de probleme de algebră superioară) de *D. Fadeev* și *I. Sominsky* ce conține numeroase aplicații ale numerelor complexe.

VI.100[3]**.** Considerăm doi vectori $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ formînd un unghi obtuz. Ducem prin originea lor planele perpendiculare pe $\bar{v}_1$, respectiv $\bar{v}_2$. Ele determină un diedru mai mic decît 90° în care trebuie să se afle ceilalți vectori (figura VI. 100 reprezintă secțiunea dreaptă a construcției: regiunea haşurată este cea permisă) Ne alegem un triedru de referință $Oxyz$, Oz fiind muchia diedrului. Vectorii $\bar{v}_3$ și $\bar{v}_4$ sînt aflați în regiunea per-

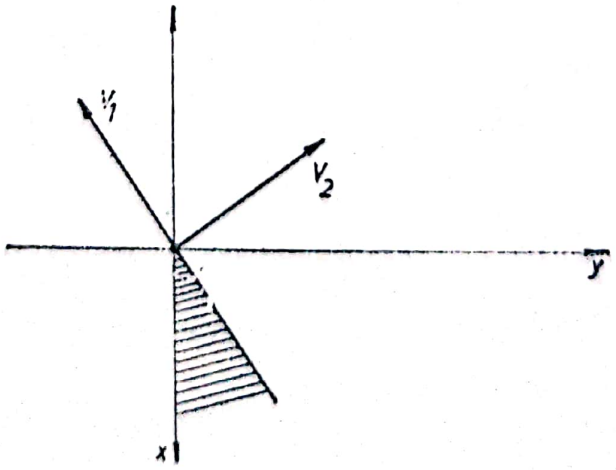


Fig. VI.100

misă cu x_i și y_i pozitivi $i = 3, 4$). Unghiul lor fiind obtuz, produsul componentelor scalare este negativ:

$$x_3x_4 + y_3y_4 + z_3z_4 < 0$$

(deducem acest lucru din formula ce exprimă cosinusul unui unghi) ceea ce arată că z_3 și z_4 sînt de semne contrare. Un al 5-lea vector $\bar{v}_5$, ca să formeze un unghi obtuz cu $\bar{v}_3$ trebuie ca $z_3z_5 < 0$. Deci z_5 ar trebui să fie de semn contrar și cu z_3 și cu z_4, contrar faptului că z_3 și z_4 sînt de semne contrare. Ca atare, nu pot exista decît cel mult 4 vectori formînd doi cîte doi unghiuri obtuze.

VI.101[2]. *Soluția I.* Fie A, B, C, D, E cele 5 puncte date. Din punctul A, de exemplu, se pot duce $C_4^2 = 6$ perpendiculare pe dreptele determinate de celelalte 4 puncte. Prin urmare, din cele 5 puncte se pot duce 30 de perpendiculare. Acestea se pot intersecta în $C_{30}^2 = 435$ puncte. Deoarece din A se duc 6 perpendiculare, cele $C_6^2 = 15$ puncte de intersecție ale lor confundate în A nu pot fi luate în considerare. Pentru cele 5 puncte vor fi deci de scăzut $15 \cdot 5 = 75$ puncte. Deoarece perpendicularele din A, B, C pe dreapta DE sînt paralele, cele $C_3^2 = 3$ puncte de intersecție ale lor nu se iau în considerare. Cum în total sînt $C_5^2 = 10$ drepte, rezultă că se vor scădea încă $3 \cdot 10$ puncte. În sfîrșit, în triunghiul ABC, înălțimile fiind concurente iar numărul total al triunghiurilor ce se pot forma fiind $C_5^3 = 10$, rezultă că se vor scădea alte $2 \cdot 10$ puncte.

În total, numărul maxim de puncte distincte de intersecție este $435 - 75 - 30 - 20 = 310$.

Soluția a II-a. Prin fiecare punct dat trec cîte 4 drepte care mai trec încă printr-un punct din cele 4 rămase și se pot duce cîte 6 perpendiculare. Determinăm mai întîi punctele de intersecție a perpendicularelor ce sînt duse din A și B. Pentru a obține puncte distincte, considerăm în primul rînd cele 3 perpendiculare ce se pot duce din A pe BC, BD, BE și cele 6 perpendiculare ce se pot duce din B pe AC, AD, AE, CD, CE și DE. Cele $3 \cdot 6 = 18$ puncte de intersecție sînt distincte, în condițiile problemei.

Scanned with OKEN Scanner

În al doilea rînd, se consideră celelalte 3 perpendiculare duse din A pe CD, CE, DE; fiecare dintre ele intersectează 5 dintre perpendicularele duse din B pe AC, AD, AE, CD, CE și DE (perpendiculara din A pe CD, de exemplu, nu intersectează perpendiculara din B pe CD). Rezultă astfel încă $3 \cdot 5 = 15$ puncte de intersecție. Așadar, perpendicularele duse din A și B se intersectează în $18 + 15 = 33$ puncte.

Deoarece cu cele 5 puncte se pot forma $C_5^2 = 10$ perechi de puncte, rezultă că numărul total al perpendicularelor punctelor de intersecție este $33 \cdot 10 = 330$.

Pentru ca să se obțină puncte distincte, trebuie să se scadă numărul ortocentrelor celor $C_5^3 = 10$ triunghiuri ce se pot forma cu ajutorul punctelor date; cum aceste ortocentre au fost numărate de 3 ori (ca intersecția celor 3 înălțimi, luate cîte două), se va scădea numărul de $10 \cdot 2$ puncte, așa că numărul maxim al punctelor de intersecție rămîne $330 - 20 = 310$.

VI.102*. Să presupunem, prin absurd, că am împărțit mulțimea numerelor naturale în k submulțimi de tipul cerut în așa fel încît nici o submulțime să nu conțină trei numere x, y, z așa încît:

$$x + y = z.$$

Deoarece numărul submulțimilor este finit iar numărul numerelor naturale este infinit, urmează că există cel puțin o submulțime — pe care să o notăm C_1 — care conține o infinitate de numere. Fie:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$$

numerele submulțimii C_1.

Să construim acum șirul:

$$x_2 - x_1 < x_3 - x_1 < \ldots < x_n - x_1 < \ldots$$

obținut, după cum se vede, din cel precedent, scăzînd primul termen din toți ceilalți.

Nici unul din termenii acestui șir nu poate fi cuprins în C_1 căci altfel am avea în C_1 o soluție a ecuației din enunț. Acești termeni sînt deci împărțiți în $k - 1$

Scanned with OKEN Scanner

submulțimi și există cel puțin una care conține o infinitate din ei. Fie:

$$x_{\alpha_1} - x_1 < x_{\beta_1} - x_1 < x_{\nu_1} - x_1 < \dots \qquad (2)$$

termenii din șirul (1) care îi conține această submulțime (să o numim C_2).

Să construim acum șirul:

$$x_{\beta_1} - x_{\alpha_1} < x_{\nu_1} - x_{\alpha_1} < x_{\theta_1} - x_{\alpha_1} < \dots \qquad (3)$$

obținut din șirul (2) scăzînd primul termen $x_{\alpha_1} - x_1$ din toți ceilalți.

Nici unul din termenii șirului (3) nu se găsește nici în C_1 nici în C_2. În adevăr, dacă s-ar găsi în C_2 atunci ar avea loc, de exemplu:

$$x_{\theta_1} - x_{\alpha_1} = x_{\alpha_1} - x_1,$$

$$(x_{\theta_1} - x_1) - (x_{\alpha_1} - x_1) = x_{\alpha_1} - x_1,$$

$$(x_{\theta_1} - x_1) = (x_{\alpha_1} - x_1) + (x_{\alpha_1} - x_1),$$

adică am avea în C_2 o soluție a ecuației din enunț.

Dacă un termen al șirului (3) s-ar găsi în C_1 atunci am obține o soluție în C_1.

Rezultă că termenii șirului (3) sînt împărțiți în $k - 2$ clase (submulțimi) și cel puțin una din ele conține o infinitate de termeni ai șirului (3). Fie C_3 o asemenea clasă și:

$$x_{\alpha_2} - x_{\alpha_1} < x_{\beta_2} - x_{\alpha_1} < \dots \qquad (4)$$

termenii din șirul (3) pe care îi conține C_3. Să construim șirul:

$$x_{\beta_2} - x_{\alpha_2} < x_{\gamma_2} - x_{\alpha_2} < x_{\theta_2} - x_{\alpha_2} < \dots \qquad (5)$$

obținut scăzînd din (4) primul termen din toți ceilalți. Nici unul din termenii șirului (5) nu se găsește nici în C_1 nici în C_2 și nici în C_3 pentru motivele evocate anterior (se repetă judecata).

Există, așadar, o clasă C_4 care conține o infinitate din termenii șirului (5), din cele $k - 3$ clase rămase.

Scanned with OKEN Scanner

Continuînd în același mod ajungem la ultima clasă C_k și care conține o infinitate de termeni de forma:

$$x_{\alpha_{k-1}} - x_{\alpha_{k-2}} < x_{\beta_{k-1}} - x_{\alpha_{k-2}} < x_{\gamma_{k-1}} - x_{\alpha_{k-2}} < \dots$$

și care nu se află în nici una din clasele $C_1, C_2, \dots, C_{k-1}$.

Dacă din acest șir formăm unul nou scăzînd primu. termen din toți ceilalți, termenii acestui șir nu pot face parte, potrivit raționamentului folosit la fiecare etapă, din nici una din cele k clase, ceea ce contrazice ipoteza, anume că toate numerele naturale au fost împărțite în k submulțimi.

Potrivit principiului reducerii la absurd, afirmația din enunț este dovedită.

VI.103[1]**.** Putem generaliza, considerînd că segmentul de lungime l este acoperit de $n (n \geqslant 3)$ segmente disjuncte, în așa fel încît oricare grupă de $n - 1$ segmente am lua din ele, segmentul să nu fie acoperit. Să observăm că, în acest caz, nici o grupă de 3 din cele n segmente nu poate avea puncte comune. Numerotăm atunci cele n segmente în ordinea originii lor (capătul din stînga) și punem în grupa I cele cu număr fără soț și în grupa a II-a pe cele ale căror număr este par. Cum suma lungimilor tuturor segmentelor este $\geqslant l$, suma lungimilor tuturor segmentelor din una din grupe este $\geqslant l/2$.

VI.104*. Presupunem că numerele raționale x, y sînt astfel încît, fără a restrînge generalitatea, $y > x$ (căci $x \neq y$). Atunci numărul:

$$\omega = \frac{x}{y - x} > 0 \qquad (1)$$

este un număr rațional.

Din (1) deducem:

$$y = \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) x$$

și din această cauză:

$$x^y = x^{\left(1 + \frac{1}{\omega}\right) x}$$

Scanned with OKEN Scanner

și cum:

$$x^y = y^x,$$

rezultă succesiv:

$$x^{\left(1+\frac{1}{\omega}\right)x} = y^x,$$

$$x^{1+\frac{1}{\omega}} = y = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)x,$$

$$x^{\frac{1}{\omega}} = 1 + \frac{1}{\omega},$$

$$x = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}, \quad y = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega+1}. \tag{2}$$

Să considerăm fracțiile ireductibile $\frac{n}{m}$ și $\frac{r}{s}$ egale, respectiv, cu ω și x. Din (2) se obține:

$$\left(\frac{m+n}{n}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{r}{s};$$

$$\frac{(m+n)^n}{n^n} = \frac{r^m}{s^m}. \tag{3}$$

Potrivit ipotezei, numerele m și n sînt prime între ele și, ca atare, și numerele $m+n$ și n și deci și $(m+n)^n$ și n^n sînt prime între ele.

Analog, r și s și r^m și s^m sînt prime între ele.

Rezultă deci că fracțiile din relația (3) sînt fracți ireductibile deci:

$$(m+n)^n = r^m$$

și:

$$n^n = s^m.$$

Din:

$$(m+n)^n = r^m = t$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece $*(m, n) = 1$, deducem că t este puterea mn a unui număr natural, $t = k^{mn}$, $k \in N^*$ deci:

$$m + n = k^m, \quad r = k^n$$

și, analog, există $l \in N^*$, astfel încît:

$$n = l^m, \quad s = l^n.$$

Așadar:

$$m + l^m = k^m$$

deci $k \geqslant l + 1$. Dacă $m > 1$, atunci:

$$k^m \geqslant (l+1)^m \geqslant l^m + ml^{m-1} + 1 > l^m + m$$

deci $k^m > l^m + m$, absurd. Ca atare, $m = 1$ deci:

$$\omega = \frac{n}{m} = n.$$

În cazul acesta, formulele (2) devin:

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{3'}$$

(în care $n \in N^*$) care exprimă toate soluțiile în numere raționale ale ecuației din enunț.

Pentru a găsi soluțiile în numere naturale ale ecuației propuse, folosim faptul că (vezi VI. 6d):

$$2 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 < \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 <$$

$$< \ldots < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \ldots < 3$$

de unde se deduce imediat că x este număr natural pentru $n = 1$ deci $x = 2$ și, implicit, $y = 4$ (evident că și $x = 4$, $y = 2$ verifică ecuația căci ea este simetrică în raport cu x și y, însă am presupus $y > x$).

VI.105*. Fie un sistem de axe rectangulare xOy și P punctul de coordonare $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3}\right)$. Vom arăta că

Scanned with OKEN Scanner

există un cerc de rază r_n care conține în interior exact n astfel de vîrfuri (pe care le vom numi, potrivit terminologiei curente, puncte laticiale), cu centrul în P.

Oricare două puncte laticiale distincte se află la distanțe diferite de punctul P. Alegem originea sistemului xOy într-un astfel de punct laticial, în așa fel ca toate vîrfurile considerate să aibă coordonatele numere întregi (acest lucru este, evident, posibil). În adevăr, prin absurd, fie Q_1 și respectiv Q_2 două puncte laticiale, de coordonate (diferite) (a, b) respectiv (c, d), situate la egală distanță de P. Potrivit formulei care exprimă distanța dintre două puncte în plan:

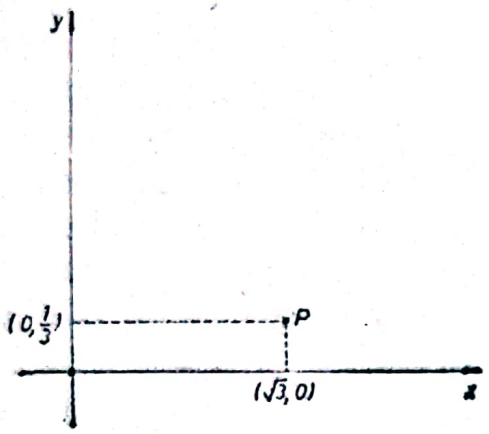


Fig. VI.105

$$(a-\sqrt{3})^2+\left(b-\frac{1}{3}\right)^2=(c-\sqrt{3})^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)^2$$

cu $a, b, c, d \in Z$ potrivit observației precedente (formula ce se poate demonstra folosind, de pildă, teorema lui *Pitagora*).

Deducem:.

$$2(c-a)\sqrt{3}=c^2+d^2-a^2-b^2+\frac{2}{3}(b-d)$$

și cum membrul al doilea al egalității este un număr rațional, rezultă $c = a$ și deci:

$$(b-d)\left(b+d-\frac{2}{3}\right)=0.$$

Cum $b+d \in Z$, rezultă $b+d-\frac{2}{3} \notin Z$ deci $b = d$ adică Q_1 și Q_2 sînt confundate, contrar ipotezei că punctele Q_1 și Q_2 sînt distincte. Oricum, ele sînt confundate.

Fie k un număr natural dat. Există, evident, cercuri care conțin în interior mai mult de k puncte laticiale

Scanned with OKEN Scanner

(luînd, de exemplu raza $\geqslant k$). Fie G un astfel de cerc care are, în interiorul său, un număr finit de astfel de puncte.

Deoarece distanțele de la P pînă la aceste puncte sînt diferite, rezultă că le putem ordona într-un șir finit, după distanțele crescătoare la punctul P. Fie $q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots$ acest șir. Fie atunci un cerc Ω care are centrul în P și trece prin q_{k+1}. Este clar că acest cerc conține în interiorul său exact k vîrfuri de pătrate.

Pentru a demonstra partea a doua a problemei, considerăm un punct Q în plan și un cerc K, de centru Q și de rază dată r. În jurul fiecărui punct laticial M desenăm un pătrat cu centrul M și de laturi 1, paralele cu axele de coordonate. Fie S partea acoperită de pătratele desenate în jurul tuturor punctelor laticiale situate în cercul K. Dacă punctele laticiale sînt în număr de n, atunci, evident, aria lui S va fi egală cu n.

Fie K_1 cercul de centru Q și de rază $r + \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Dat fiindcă $\sqrt{\frac{1}{2}}$ este cea mai mare distanță dintre punctele unui pătrat de latură 1 și centrul lui, obținem ușor că interiorul cercului K_1, împreună cu circumferința lui acoperă pe S. Deoarece aria cercului K_1 este $\pi(r + 1/\sqrt{2})^2$ iar aria lui S este n, obținem că:

$$n \leqslant \pi\left(r + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 .$$

Analog, deducem că S acoperă interiorul și frontiera cercului de centru Q și de rază $r - 1/\sqrt{2}$, de unde inegalitatea:

$$\pi\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant n.$$

Aceste inegalități ne dau:

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant r \leqslant \sqrt{\frac{n}{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \leqslant \frac{r}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

deci:

$$\left| \frac{r}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Cînd n tinde către infinit, $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ tinde către zero deci $\left| \frac{r}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right|$ tinde către zero, adică $\frac{r}{\sqrt{n}}$ tinde către $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

VI.106[2]. Problema, în modul în care este pusă, admite următorul enunț echivalent:
există o partiție $P = \{A, B\}$, $A \neq B$ a mulțimii numerelor naturale astfel încît și în mulțimea A și în mulțimea B să nu existe x, y astfel ca:

$$y = cx.$$

Putem presupune că $c > 1$, în caz contrar notăm $c_1 = \frac{1}{c} > 1$ și schimbăm rolulvariabilelor.

Fie $x \in N^*$ arbitrar. Există atunci $k \in N^*$ unic determinat astfel încît:

$$c^k \leqslant x < c^{k+1} \tag{1}$$

anume $k = [\log x]_*$ (excludem cazul lui $x = 1$, partiția cerută fiind oarecare cînd $c \notin N^*$ și $A = \{1\}$, $B = N^* - \{1\}$ cînd $c \in N^*$). Este evident că, pentru un k fixat pot exista mai multe numere x cu proprietatea (1).

În mulțimea A punem toți acei $x \in N^*$ cu proprietatea că, în relația (1), k este și par și numai pe aceștia iar în B celelalte numere. Din (1) deducem:

$$c^{k+1} \leqslant cx < c^{k+2}$$

de unde se vede că x și $cx = y$ nu pot aparține aceleiași mulțimi căci k și $k + 1$ sînt de parități opuse (unul este par iar altul este impar).

Cu aceasta problema este rezolvată.

VI.107*. (Soluție dată la Olimpiadă de concurentul român *Dan Timotin*, absolvent al liceului „*Nicolae Bălcescu*" — București).

Vom demonstra prin inducție. Propoziția din enunț este adevărată pentru $m = 1$, luînd două puncte în plan la distanța 1.

Să presupunem că există o mulțime E, avînd de exemplu k elemente și care satisface condițiile problemei pentru un m oarecare. Considerăm o mulțime E' definită prin translația lui E într-o anumită direcție cu modulul 1.

Există cel mult $k \cdot m$ direcții de translație pentru care două puncte din E și E' pot coincide; putem alege deci o direcție pentru care punctele lui E și E' să fie distincte.

Orice punct din E se află la distanța 1 de omologul său din E'; există, după cum se poate verifica ușor, cel mult $2(k - 1)$ direcții de translație prin care un punct din E ar putea ajunge la distanța 1 de un punct neomolog (căci cercurile de rază 1 cu centrele în cele două puncte au cel mult două puncte de intersecție).

În total, pot exista $2k\ (k - 1)$ astfel de direcții; putem alege din infinitatea de direcții de translație, una pentru care acest lucru să nu se întîmple. În acest caz, reuniunea lui E cu E' are, după cum se verifică ușor, proprietatea că orice punct are exact $m + 1$ puncte din mulțime (m din ipoteza inducției și un punct omolog) la distanța 1.

Am arătat deci că propoziția, fiind adevărată pentru un m oarecare, ea este adevărată și pentru $m + 1$ și cum ea este adevărată pentru $m = 1$, rezultă, potrivit principiului inducției matematice, că ea este adevărată pentru orice $m \in N^*$.

VI.108. Afirmația este adevărată pentru un număr $n \geqslant 2$, $n \in N^*$, arbitrar de puncte.

Scanned with OKEN Scanner

Evident (vezi fig. VI.113):

$$MN = 2 \sin(\beta - \alpha)$$

conform formulei sinusului. Dar:

$$2 \sin(\beta - \alpha) = \frac{4 \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta - \alpha}{2}} =$$

$$= 4 \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right)^2} \cdot$$

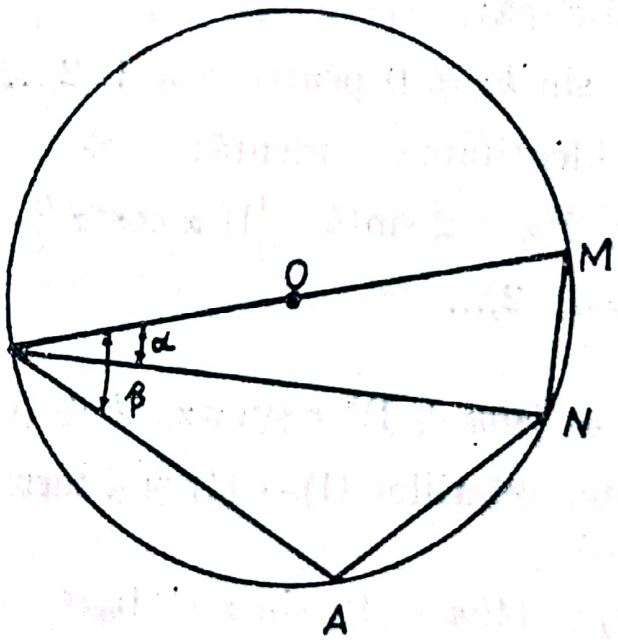


Fig. VI.113

Există însă o infinitate de arce distincte $s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încît $\operatorname{tg} \frac{s}{2}$ să fie număr rațional, pentru motivul

că $\operatorname{tg}\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = R^+$ deci o infinitate de arce MN cu lungime rațională.

Cu aceasta enunțul este demonstrat.

VI.109*. Fie K circumferința unui cerc de rază r cu $r^2 = l/m$; $l, m \in N^*$. Ca atare, $mr = \sqrt{lm} \geqslant 1$ de unde:

$$4lm + 1 - 4mr = (2mr - 1)^2 \geqslant 1$$

astfel că:

$$0 < \frac{4mr}{4lm + 1} < 1.$$

Există unghiul α, $0 < \alpha < \pi/2$ așa fel încît:

$$\sin \alpha = \frac{4mr}{4lm + 1}, \quad \cos \alpha = \frac{4lm - 1}{4lm + 1}. \tag{1}$$

Să arătăm că:

$$\sin k\alpha \neq 0 \text{ pentru } k = 1, 2,... \tag{2}$$

Are loc identitatea evidentă:

$$\sin(k + 2)\alpha = 2 \sin(k + 1)\ \alpha \cos \alpha - \sin k\alpha \tag{3}$$

pentru $k = 1, 2,...$

Fie:

$$t_k = (4lm + 1)^k\ r \sin k\alpha, \quad k \in N^*. \tag{4}$$

În virtutea relațiilor (1) — (4) și a formulei $mr^2 = l$, obținem:

$$t_1 = (4lm + 1)r \sin \alpha = 4mr^2 = 4l,$$

$$t_2 = (4lm + 1)^2 r \sin 2\alpha = 2(4lm + 1)^2 r \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= 8mr^2(4lm - 1) = 8l(4lm - 1) \tag{5}$$

astfel încît t_1 și t_2 sînt numere naturale. Obținem, din relațiile (3) și (4), prin inducție, că:

$$t_{k+2} = 2(4lm - 1)t_{k+1} - (4lm + 1)^2\ t_k \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru $k = 1, 2,\ldots$ și că t_k sînt numere întregi pentru $k = 1, 2,\ldots$.

Numărul $h = 4lm + 1$ este impar și prim cu fiecare dintre numerele 2, l și $4lm - 1$; din (5) rezultă $t_1 < h$ astfel încît $_*(t_1, h) = 1$.

De asemenea, $_*(t_2, h) = 1$. De aici deducem, din formula (6), prin inducție, că numerele $t_k (k = 1, 2,\ldots)$ nu sînt divizibile prin h și deci sînt diferite de 0. Din (4) obținem, în final, că întrucît $t_k \neq 0$, sin $k\alpha \neq 0$ pentru orice $k \in N^*$.

Luăm acum pe circumferința K a cercului un punct P_0 și formăm un șir infinit $P_1, P_2,\ldots$ de puncte pe K, astfel încît unghiurile $P_{k-1}OP_k$, O fiind centrul cercului de circumferință K, să fie egale toate cu 2α; $k \in N^* - \{1\}$. Dacă u și v sînt numere naturale, $u \neq v$, atunci unghiurile P_uOP_v vor fi, evident, egale cu $2(u - v)\alpha$ și deoarece r este raza cercului de circumferință K, distanța dintre punctele P_u și P_v va fi $2r \mid \sin (u - v)\alpha \mid$ Dar deoarece, din (4) și raționamentele anterioare:

$$t_k = (4lm + 1)^k r \sin k\alpha \neq 0$$

este rațional, decudcem că:

$$2r \mid \sin(v-u)\ \alpha \mid \neq 0$$

este număr rațional, în virtutea relației (2). Așadar, punctele $P_1, P_1,\ldots$ sînt toate distincte iar distanțele dintre ele, două cîte două, sînt raționale.

VI.110. Fie:

$$M = \overline{a_1a_2\ldots a_k}$$

scrierea în baza 10 a unui număr oarecare M, natural (aici $a_i \in \overline{0, 9}$, $(\forall)\ i \in \{1, 2,\ldots, k\}$). Atunci:

$$M = a_k + 10a_{k-1} + \ldots + 10^{k-1}a_1 = a_k + (9 +$$

$$+ 1)\ a_{k-1} + \ldots + (9 + 1)^{k-1}a_1 = a_k + a_{k-1}(\mathfrak{M}9 + 1) +$$

$$+ \ldots + (\mathfrak{M}9 + 1)\ a_1 = \mathfrak{M}9 + a_1 + \ldots + a_k$$

de unde se deduce că diferența dintre un număr și suma cifrelor sale este multiplu de 9. Deci:

$$4444 = -2(\text{mod } 9)$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că, după oarecari calcule:

$$4444^{4444} = (-2)^{4444} = 16 \pmod 9.$$

Deci B este congruent cu 16 modulo 9. Fie C suma cifrelor lui B.

Evident:

$$B - C \equiv 0 \pmod 9,$$

$$C \equiv 16 \pmod 9,$$

$$C \equiv 7 \pmod 9.$$

Dar și:

$$4444^{4444} < (10)^{4 \cdot 4444} = 10^{17776}.$$

Cum numărul:

$$10^{17776}$$

are 17777 cifre, rezultă că 4444^{4444} are, de asemenea, cel mult 1776 cifre (căci 10^{17776} este cel mai mic număr care are 17777 cifre și, vizibil, $4444^{4444} < 10^{17776}$) deci:

$$A \leqslant 9 \cdot 17776 < 180000$$

De aici este ușor de dedus că:

$$B \leqslant 5 \cdot 9 = 45$$

și, în fine, că suma cifrelor lui B nu depășește pe cea a lui 39 adică 12. Cum $B \equiv 7 \pmod 9$ rezultă chiar $B = 7$.

VI.111*. Considerăm un număr natural n scris în baza 10. Adunîndu-i cifrele obținem un număr $n_1 < n$. Adunînd cifrele lui n_1 găsim un număr $n_2 < n_1$. Continuăm procedeul pînă cînd obținem un număr format dintr-o singură cifră, pe care o notăm $\blacktriangledown(n)$ (care poate fi oarecare din numerele 1, 2, 3, ..., 9 sau 0 cînd $n = 0$).

Să arătăm că dacă $m, n \in N^*$ atunci:

$$\blacktriangledown(m + n) = \blacktriangledown(\blacktriangledown(m) + \blacktriangledown(n)),$$

$$\blacktriangledown(mn) = \blacktriangledown(\blacktriangledown(m) \cdot \blacktriangledown(n)).$$

În adevăr, fie:

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0,$$

unde $0 \leqslant a_1, a_1, \ldots, a_k \leqslant 9$ (presupunem $a_k \neq 0$). Atunci:

$$n_1 = a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0$$

și, potrivit observației precedente (vezi VI.115 împreună cu soluția ei) $n \equiv n_1 \pmod 9$. Analog, $n_1 \equiv n_2 \pmod 9$ deci $n \equiv n_2 \pmod 9$ adică, în final:

$$n \equiv \blacktriangledown(n) \pmod 9.$$

Fie $m, n \in N^*$. Din $n \equiv \blacktriangledown(n) \pmod 9$ și $m \equiv \blacktriangledown(m) \pmod 9$ deducem:

$$m + n \equiv \blacktriangledown(m) + \blacktriangledown(n) \pmod 9$$

și cum:

$$\blacktriangledown(m + n) \equiv m + n \pmod 9$$

obținem:

$$\blacktriangledown(m + n) \equiv \blacktriangledown(n) + \blacktriangledown(m) \pmod 9$$

sau, deoarece:

$$\blacktriangledown(n) + (m) \equiv \blacktriangledown(\blacktriangledown(n) + \blacktriangledown(m)) \pmod 9$$

obținem:

$$\blacktriangledown(m + n) \equiv \blacktriangledown(m) + \blacktriangledown(n) \equiv \blacktriangledown(\blacktriangledown(n) + \\ + \blacktriangledown(m)) \pmod 9.$$

Deoarece numerele extreme sînt de o singură cifră și diferite de zero (excludem deci cazul cînd unul dintre ele este 0 iar celălalt 9), obținem, în final:

$$\blacktriangledown(m + n) = \blacktriangledown(\blacktriangledown(m) + \blacktriangledown(n)).$$

Analog pentru a doua egalitate.

Revenind la problema propusă, avem că:

$$\blacktriangledown(a^n) = \blacktriangledown(\blacktriangledown(a) \cdot \blacktriangledown(a^{n-1})) = \blacktriangledown(\blacktriangledown(a) \cdot \blacktriangledown(\blacktriangledown(a) \cdot \\ \cdot \blacktriangledown(a^{n-2}))) = \ldots = \blacktriangledown(\blacktriangledown(a) \cdot \blacktriangledown(\blacktriangledown(a) \ldots (\blacktriangledown(a) \cdot \blacktriangledown(a) \ldots)).$$

Scanned with OKEN Scanner

Continuînd deci pînă cînd toți „a" figurează la puterea I, obținem formula cerută.

Ca atare, cunoscînd pe $\blacktriangledown(a)$ putem determina pe $\blacktriangledown(a^n)$. În plus, șirul:

$$u_k = \blacktriangledown(\blacktriangledown(a) \cdot \blacktriangledown(\blacktriangledown(a) \cdot \blacktriangledown(\ldots \blacktriangledown(\blacktriangledown(a) \cdot \blacktriangledown(a))\ldots)$$

unde a figurează de k ori, este periodic, pentru orice $\blacktriangledown(a) = t$.

În adevăr, dacă, de exemplu, $t = 3$ atunci $u_1 = 3$ și:

$$\blacktriangledown(a) \cdot \blacktriangledown(a) = 9$$

deci:

$$u_2 = 9,$$

apoi:

$$u_3 = \blacktriangledown(\blacktriangledown(a) \cdot \blacktriangledown(\blacktriangledown(a) \cdot \blacktriangledown(a))) = \blacktriangledown(27) = 9$$

deci $u_k = 9$, $(\forall)\ k \in N^* - \{1\}$.

Dar și:

$$u_k = \blacktriangledown(\blacktriangledown(a) \cdot u_{k-1}).$$

Pentru problema precedentă, $\blacktriangledown(4444) = 7$ și, prevalîndu-se de raționamente asemănătoare problemei VI. 115 pentru a demonstra că numărul căutat este mai mic ca 10, găsim (deci egal cu $\blacktriangledown(4444^{4444})$):

$$\blacktriangledown(4444^{4444}) = 7$$

căci:

$$u_1 = \blacktriangledown(4444) = 7,$$

$$u_2 = \blacktriangledown(4444^2) = \blacktriangledown(\blacktriangledown(4444) \cdot \blacktriangledown(4444)) = \blacktriangledown(49) =$$
$$= \blacktriangledown(13) = 4,$$

$$u_3 = \blacktriangledown(4444^3) = \blacktriangledown(\blacktriangledown(4444) \cdot \blacktriangledown(4444^2)) =$$
$$= \blacktriangle(7 \cdot 4) = \blacktriangledown(28) = \blacktriangledown(10) = 1,$$

$$u_4 = \blacktriangledown(4444^4) = \blacktriangledown(\blacktriangledown(4444) \cdot \blacktriangledown(4444^3)) =$$
$$= \blacktriangledown(7 \cdot 1) = 7$$

Scanned with OKEN Scanner

deci, în general:

$$u_{3k+1} = 7,$$
$$u_{3k+2} = 4,$$
$$u_{3k+3} = 1,$$

oricare ar fi $k \in N$.

Cum $4444 = 1481 \cdot 3 + 1$ rezultă că numărul căutat este 7, așa cum am afirmat înainte.

VI.112*. Demonstrăm afirmația prin inducție. Fie, pentru simplificarea limbajului:

$$\sum_{i_1+\ldots+i_m=n} i_1 \ldots i_m = S_m^n.$$

Pentru $m = 1$:

$$S_1^n = \sum_{i=n} i = n = C_n^1.$$

Fie $k \in N^*$ și $S_m^n = C_{n+m-1}^{2m-1}$ pentru toți $m \leqslant k$. Să arătăm că și $S_{k+1}^n = C_{n+k}^{2k+1}$. Numărul i_{k+1} care apare în suma $i_1 + \ldots + i_m$ după care este extinsă suma din enunț poate lua ca valoare oricare din numerele 1, 2, ..., $n - k$ astfel că:

$$S_{k+1}^n = 1 \cdot S_k^{n-1} + 2 \cdot S_k^{n-2} + 3 \cdot S_k^{n-3} + \ldots + (n-k) S_k^k$$

și, folosind ipoteza de inducție:

$$S_{k+1}^n = 1 \cdot C_{n+k-2}^{2k-1} + 2 \cdot C_{n+k-3}^{2k-1} + 3 \cdot C_{n+k-4}^{2k-1} + \ldots + (n-k)\, C_{2k-1}^{2k-1}.$$

Cu notațiile $n - k = r$, $2k - 1 = p$, obținem:

$$S_{k+1}^n = 1 \cdot C_{p+r-1}^p + 2 \cdot C_{p+r-2}^p + \ldots + r C_p^p = t_r^p.$$

Pentru $r = 1$, găsim $t_1^p = C_p^p = 1 = C_{p+1}^{p+1}$ și:

$$t_{r+1}^p = 1 \cdot C_{p+r}^p + 2 \cdot C_{p+r-1}^p + 3 \cdot C_{p+r-2}^p + \ldots + (r+1) C_p^p = (C_{p+r}^p + C_{p+r-1}^p + \ldots + C_p^p) + t_r^p.$$

Dar:

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_{p+r}^p = C_{p+r+1}^{p+1}. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, folosind identitatea:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

se obține:

$$C_k^k = C_{k+1}^{k+1};\ C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1} = C_{k+2}^{k+1};\ C_{k+2}^k + C_{k+2}^{k+1} = C_{k+3}^{k+1};\ \ldots;\ C_{k+m-1}^k + C_{k+m-1}^{k+1} = C_{k+m}^{k+1}$$

și, adunînd termen cu termen egalitățile de mai sus avem, după oarecari reduceri:

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1}$$

adică o variantă a egalității (1).

Presupunînd că:

$$t_r^p = C_{p+r+1}^{p+2}$$

obținem:

$$t_{r+1}^p = C_{p+r+1}^{p+1} + C_{p+r+1}^{p+2} = C_{p+r+2}^{p+2}$$

astfel că formulele:

$$t_r^p = C_{p+r+1}^{p+2},\ S_{k+1}^n = C_{n+k}^{2k+1},\ S_m^n = C_{n+m-1}^{2m-1}$$

sînt adevărate.

VI.113[3]. Fie $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ o soluție reală a sistemului. Sistemul mai poate fi scris și sub forma:

$$\begin{aligned} 2x_2 &= x_1 + \frac{2}{x_1}, \\ 2x_3 &= x_2 + \frac{2}{x_2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2x_1 &= x_n + \frac{2}{x_n}, \end{aligned} \qquad (1)$$

în ipoteza că $x_1 \ldots x_n \neq 0$. Dacă există un $k \in N^*$ pentru care $x_k = 0$ atunci $x_k^2 + 2 = 0$, absurd în numere reale, deci, oricum $x_1 \ldots x_n \neq 0$. În plus, numerele

Scanned with OKEN Scanner

$x_k'(k \in \{1, \ldots, n\})$ sînt de același semn, astfel că, pe lîngă soluția $(x_1', \ldots, x_n')$ există și soluția $(-x_1', \ldots, -x_1')$ deci, în cazul în care există o soluție, putem presupune că ea este formată numai din numere strict pozitive (să remarcăm că dacă există $x_k < 0$ atunci $x_i < 0$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$).

Fie, deci, $x_k' > 0$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Din inegalitatea:

$$x_k' + \frac{2}{x_k'} \geqslant 2\sqrt{2}$$

pentru orice $k \in \{1, \ldots, n\}$, deducem:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k' + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k'} \geqslant 2n\sqrt{2}.$$

Dar, adunînd egalitățile (1), avem:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k' = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k'}.$$

Deci:

$$n\sqrt{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k' = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k'} \leqslant n\sqrt{2},$$

deoarece din:

$$2x_2 = x_1 + \frac{2}{x_1} \geqslant 2\sqrt{2}$$

rezultă:

$$\frac{1}{x_2'} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{adică} \quad 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k'} \leqslant n\sqrt{2}$$

deci:

$$n\sqrt{2} = \sum_{k=1}^{n} x_k' = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k'}, \quad x_k' = 2, (\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

de unde rezultă că singurele soluții sînt:

$$(\sqrt{2}, \ldots, \sqrt{2}) \text{ și } (-\sqrt{2}, \ldots, -\sqrt{2}).$$

Scanned with OKEN Scanner

VI.1142*. Considerăm ecuația trigonometrică:

$$\cos 6x + \cos 5x = 0 \tag{1}$$

pe care o mai putem scrie:

$$2 \cos \frac{11x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \tag{1'}$$

și care are soluțiile date de:

$$\cos \frac{11x}{2} = 0 \text{ respectiv } \cos \frac{x}{2} = 0$$

adică:

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{11}, \; k \in Z, \text{ respectiv } x = (2k+1)\pi, \; k \in Z.$$

Dar:

$$\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x,$$

$$\cos 6x = 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 x + 18 \cos^2 x - 1,$$

deci:

$$\cos 5x + \cos 6x = 32 \cos^6 x + 16 \cos^5 x - 48 \cos^4 x - 20 \cos^3 x + 18 \cos^2 x + 5 \cos x - 1.$$

Ecuația:

$$P(t) = 32t^6 + 16t^5 - 48t^4 - 20t^3 + 18t^2 + 5t - 1 = 0$$

admite, după cum se poate constata cu ușurință, rădăcina $t = -1$ și, după împărțirea cu $t + 1$ se constată că nu mai admite această rădăcină adică $P(-1) = 0$ și $Q(-1) \neq 0$ unde:

$$Q(t) = \frac{P(t)}{t+1} = 32t^5 - 16t^4 - 32t^3 + 12t^2 + 6t - 1.$$

Rezultă deci că ecuația $P(t) = 0$ admite rădăcinile:

$$\cos(\pi + 2k\pi) = \cos \pi = -1$$

Scanned with OKEN Scanner

și:

$$\cos\frac{\pi}{11},\ \cos\frac{3\pi}{11},\ \cos\frac{5\pi}{11},\ \cos\frac{7\pi}{11},\ \cos\frac{9\pi}{11}$$

(pentru ceilalți k obținem aceleași rădăcini) deci ecuația:

$$32t^5 - 16t^4 - 32t^3 + 12t^2 + 6t - 1 = 0 \qquad (2)$$

admite rădăcinile:

$$\cos\frac{\pi}{11},\ \cos\frac{3\pi}{11},\ \cos\frac{5\pi}{11},\ \cos\frac{7\pi}{11},\ \cos\frac{9\pi}{11}.$$

Fie $y = \frac{1}{t}$. Obținem prin împărțirea ecuației (2) cu t^5:

$$32 - 16\cdot\frac{1}{t} - 32\cdot\frac{1}{t^2} + 12\cdot\frac{1}{t^3} + 6\cdot\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^5} = 0$$

deci ecuația:

$$y^5 - 6y^4 - 12y^3 + 32y^2 + 16y - 32 = 0$$

admite rădăcinile:

$$y_1 = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{11}} = \sec\frac{\pi}{11},\quad y_2 = \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{11}} = \sec\frac{3\pi}{11},$$

$$y_3 = \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{11}} = \sec\frac{5\pi}{11},\quad y_4 = \frac{1}{\cos\frac{7\pi}{11}} = \sec\frac{7\pi}{11},$$

$$y_5 = \frac{1}{\cos\frac{9\pi}{11}} = \sec\frac{9\pi}{11}.$$

Folosind relațiile între rădăcini și coeficienți, obținem:

$$\sec\frac{\pi}{11} + \sec\frac{3\pi}{11} + \sec\frac{5\pi}{11} + \sec\frac{7\pi}{11} + \sec\frac{9\pi}{11} = 6,$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

VI.115*. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că:

$$\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2} > \ldots > \frac{b_n}{a_n}$$

(schimbînd, de exemplu, ordinea modulilor în sumă). Excludem deocamdată cazurile în care există i, j astfel încît:

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j}$$

și pe acelea cînd $a_i = 0$. În plus, să observăm că putem presupune $a_i > 0$, deoarece $|a_i x + b_i| = |-a_i x - b_i|$.

Numerele:

$$-\frac{b_i}{a_i};$$

unde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, împart dreapta reală în $n + 1$ intervale și deci, în general, ecuația din enunț poate avea $n + 1$ soluții deoarece considerînd că x aparține fiecărui interval în parte, avem $n + 1$ explicitări diferite a modulilor.

De exemplu, dacă $x \in \left(-\infty, -\frac{b_1}{a_1}\right)$ atunci:

$$x < -\frac{b_i}{a_i}; \quad (\forall)\ i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

deci $a_i x + b_i < 0$ și ecuația se scrie:

$$-\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i) + a_0 x + b_0 = 0.$$

Dacă:

$$-\frac{b_1}{a_1} \leqslant x \leqslant -\frac{b_2}{a_2}$$

atunci:

$$a_1 x + b_1 \geqslant 0 \text{ și } a_2 x + b_2 \leqslant 0$$

Scanned with OKEN Scanner

și cum:

$$-\frac{b_2}{a_2} < -\frac{b_k}{a_k}, \quad (\forall)\, k \in \{3, \ldots, n\},$$

rezultă:

$$a_k x + b_k < 0, \quad (\forall)\, k \in \{3, \ldots, n\},$$

astfel că ecuația ia forma:

$$a_1 x + b_1 - \sum_{i=2}^{n} (a_i x + b_i) + a_0 x + b_0 = 0$$

etc.

Fie:

$$K_i = \left[-\frac{b_{i-1}}{a_{i-1}}; \quad -\frac{b_i}{a_i} \right], \quad i \in \{2, \ldots, n\}$$

și intervalele nemărginite:

$$I_1 = \left(-\infty, -\frac{b_1}{a_1} \right], \quad I_2 = \left[-\frac{b_n}{a_n}, \quad +\infty \right).$$

Pentru ca ecuația să admită $n + 1$ rădăcini reale, este necesar ca în fiecare din aceste intervale să aibă cîte o rădăcină (dacă ar exista două, explicitarea modulelor este aceeași deci avem o singură rădăcină, absurd).

Fie $x_i \in K_i$, $i \in \{2, \ldots, n\}$, rădăcină a ecuației. Ecuația se scrie:

$$x_i = -\frac{\sum_{m=0}^{i-1} b_m - \sum_{m=i}^{n} b_i}{\sum_{m=0}^{i-1} a_m - \sum_{m=i}^{n} a_m}, \quad i \in \{2, \ldots, n\}$$

(numitorii sînt, prin ipoteză, nenuli).

Rezultă deci că:

$$-\frac{b_{i-1}}{a_{i-1}} < -\frac{\sum_{m=0}^{i-1} b_m - \sum_{m=i}^{n} b_m}{\sum_{m=0}^{i-1} a_m - \sum_{m=i}^{n} a_m} < -\frac{b_i}{a_i}; \quad i \in \{2, \ldots, n\};$$

Scanned with OKEN Scanner

inclusiv:

$$x_1 < -\frac{b_1}{a_1} \text{ și } x_{n+1} > -\frac{b_n}{a_n}$$

căci I_1 și I_2 sînt intervale nemărginite.

Inegalitățile de mai sus se scriu:

$$\frac{b_0 - b_1 - \ldots - b_n}{a_0 - a_1 - \ldots - a_n} > \frac{b_1}{a_1}, \tag{1'}$$

$$\frac{b_2}{a_2} < \frac{b_0 + b_1 - \ldots - b_n}{a_0 + a_1 - \ldots - a_n} < \frac{b_1}{a_1}; \tag{2'}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}} < \frac{b_0 + \ldots + b_i - b_{i+1} - \ldots - b_n}{a_0 + \ldots + a_i - a_{i+1} - \ldots - a_n} < \frac{b_i}{a_i}, \tag{i'}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{b_0 + b_1 + \ldots + b_n}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n} < \frac{b_n}{a_n}. \tag{n'}$$

Grupăm aceste inegalități astfel:

$$\frac{b_0 - b_1 - \ldots - b_n}{a_0 - a_1 - \ldots - a_n} > \frac{b_1}{a_1};$$

$$\frac{b_0 + b_1 - \ldots - b_n}{a_0 + a_1 - \ldots - a_n} < \frac{b_1}{a_1}; \tag{1''}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{b_0 + \ldots + b_{i-1} - b_i - \ldots - b_n}{a_0 + \ldots + a_{i-1} - a_i - \ldots - a_n} > \frac{b_i}{a_i};$$

$$\frac{b_0 + \ldots + b_i - b_{i+1} - \ldots - b_n}{a_0 + \ldots + a_i - a_{i+1} - \ldots - a_n} < \frac{b_i}{a_i}; \tag{i''}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{b_0 + \ldots + b_{n-1} - b_n}{a_0 + \ldots + a_{n-1} - a_n} > \frac{b_n}{a_n};$$

$$\frac{b_0 + b_1 + \ldots + b_n}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n} < \frac{b_n}{a_n}. \tag{n''}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relația (i″) se mai poate scrie:

$$[a_ib_0 + \ldots + a_ib_{i-1} - a_ib_i - \ldots - a_ib_n - a_0b_i - \\ - \ldots - a_{i-1}b_i + a_ib_i + \ldots + a_nb_i] : [a_i(a_0 + \\ + \ldots + a_{i-1} - a_i - \ldots - a_n)] > 0,$$

$$[a_ib_0 + \ldots + a_ib_i - a_ib_{i+1} - \ldots - a_ib_n - a_0b_i - \\ - \ldots - a_ib_i + a_{i+1}b_i + \ldots + a_nb_i] : [a_i(a_0 + \\ + \ldots + a_i - a_{i+1} - \ldots - a_n] < 0.$$

Dar a_ib_i are în ambele expresii coeficientul zero deci numărătorii fracțiilor de mai sus sînt identici.

Vom nota expresiile de la numărător cu $A_i (i \in \in \{1, \ldots, n\})$ deci grupele de inegalități (1″), (2″), ..., (n″) se scriu (avînd în vedere că $a_i > 0$, $(\forall)\, i \in \{1, \ldots, n\}$):

$$\frac{A_1}{a_0 - \ldots - a_n} > 0; \quad \frac{A_1}{a_0 + a_1 - \ldots - a_n} < 0, \quad (1''')$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{A_i}{a_0 + \ldots + a_{i-1} - \ldots - a_n} > 0;$$

$$\frac{A_i}{a_0 + \ldots + a_i - a_{i+1} - \ldots - a_n} < 0, \quad (i''')$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{A_n}{a_0 + \ldots + a_{n-1} - a_n} > 0; \quad \frac{A_n}{a_0 + \ldots + a_n} < 0. \quad (n''')$$

Pentru ca inegalitățile să aibă loc, este necesar, potrivit relației (i‴):

$$(a_0 + \ldots + a_{i-1} - \ldots - a_n)\,(a_0 + \ldots + a_i - \ldots - a_n) < 0,$$

pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dacă în ultima relație:

$$a_0 + \ldots + a_{n-1} - a_n > 0,$$

$$a_0 + \ldots + a_n < 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci, schimbînd sensul primei inegalități și adunînd:

$$2a_n < 0,$$

contrar ipotezei deci:

$$a_0 + \ldots + a_{n-1} - a_n < 0,$$
$$a_0 + \ldots + a_n > 0.$$

Cu necesitate, din relația (n — 1)''' obținem că:

$$a_0 + \ldots + a_{n-2} - a_{n-1} - a_n > 0.$$

Schimbînd sensul ultimei ineglități și adunînd cu antepenultima găsim:

$$2a_{n-1} < 0,$$

contrar ipotezei deci nici varianta a doua nu este posibilă. Rezultă că, în definitiv, presupunerea că ecuația admite $n + 1$ rădăcini este absurdă, astfel că enunțul este demonstrat.

Dacă există $i \in \{1, \ldots, n\}$ pentru care $a_i = 0$, prin eliminarea modulilor respectivi (adunați la b_0) abordăm o aceeași problemă dar valoarea lui n scade.

VI.116[2]. Așadar:

$$x * a = y * y$$
$$x * b = y * c$$

și din ecuația a doua a sistemului deducem:

$$x = (y * c) * b',$$

b' fiind simetricul lui b. Înlocuind în prima ecuație a sistemului, găsim succesiv:

$$[(y * c) * b'] * a = y * y,$$
$$[y * (c * b')] * a = y * y,$$
$$y * [(c * b') * a] = y * y,$$

iar înmulțind la stînga cu y':

$$y = c * b' * a.$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici:

$$x = c * b' * a * c * b'.$$

VI.117[2]. Se observă că pentru $k > \log_2 n$:

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right]_* = 0$$

deci suma este egală, pentru un n fixat, cu un număr finit.

Se verifică imediat că pentru $n = 1$, $S_1 = 1$, pentru $n = 2$, $S_2 = 2$, pentru $n = 3$, $S_3 = 3$ (lui S_n îi atribuim suma). Observațiile anterioare ne conduc la presupunerea:

$$S_n = n.$$

Va trebui să demonstrăm că $S_{n+1} = n + 1$ ceea ce este echivalent cu a arăta că în S_{n+1} numai una din expresiile $\left[\frac{n + 1 + 2^k}{2^{k+1}}\right]_*$ se mărește cu o unitate în raport cu expresiile:

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right]_*$$

(aceasta pentru că:

$$\left[\frac{n + 1 + 2^k}{2^{k+1}}\right]_* \geqslant \left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right]_*$$

pentru fiecare k).

Vom demonstra că dacă una din expresiile $\left[\frac{n + 1 + 2^k}{2^{k+1}}\right]_*$ se mărește cu o unitate, atunci următoarele nu se măresc și apoi că cel puțin una se mărește.

Ca expresia $\left[\frac{n + 1 + 2^k}{2^{k+1}}\right]_*$ să se mărească, respectiv, cu o unitate față de:

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right]_*$$

trebuie ca $n + 1 + 2^k = m2^{k+1}$, $m \in N^*$.

Facem aici cîteva observații. Problema propusă, așa cum specificam în enunț, a fost dată la Olimpiada Internațională de Matematică. Eleganța demonstrației de față (care a fost dată în concurs de concurentul român *Barbu Berceanu*) constă în raționament și nu în tehnică de calcul, caracteristică generală a problemelor care sînt propuse pentru această confruntare internațională, inițiată de țara noastră. Este recomandabil ca aceste probleme să fie atacate cu toată seriozitatea, ele constituind adevărate ștachete, care vădesc rezolvitorului calități pe care este posibil să nu și le fi descoperit. Lecturarea celor mai elegante soluții la aceste probleme oferă cititorului nebănuite posibilități de a-și perfecționa pregătirea. Considerăm că o singură problemă de acest tip poate suplini mai multe din cele numite „clasice". O astfel de problemă solicită, după cum vom avea ocazia nu de puține ori să vedem în paginile următoare, cunoștințe din multe domenii ale matematicii.

În bibliografia anexată pot fi găsite multe din acest fel de probleme.

Să presupunem că mai există un rang p pentru care se întîmplă același lucru. Analog, obținem:

$$n + 1 + 2^p = m_1 2^{p+1},\ m_1 \in N^*,$$

sau, scăzînd cele două relații și punînd, de pildă, $k > p$:

$$2^p(2^{k-p} - 1) = 2^{p+1}(2^{k-p}m - m_1),$$

$$2^{k-p} - 1 = 2(2^{k-p}m - m_1),$$

absurd, deci există cel mult un astfel de k.

Dacă $n + 1$ este impar, se va mări primul termen cu o unitate cînd trecem de la n la $n + 1$.

Dacă $n + 1$ este par, atunci n este de form $2^k(2m - 1) - 1$ și în acest caz se va mări cu o unitate termenul de rang k, deoarece:

$$\left[\frac{2^k(2m - 1) + 2^k}{2^{k+1}}\right]_* = m.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, potrivit inducției matematice, $S_n = n$, $(\forall)\ n \in N^*$.

Soluția a II-a. Folosind identitatea (vezi VI.42):

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]_* = [2x]_* - [x]_*$$

suma se scrie:

$$S_n = [n]_* - \left[\frac{n}{2}\right]_* + \left[\frac{n}{2}\right]_* - \left[\frac{n}{2^2}\right]_* + \left[\frac{n}{2^2}\right]_* - \\ - \ldots + \left[\frac{n}{2^k}\right]_* = n,$$

unde k este astfel ales încît $n < 2^k$.

VI.118[1]. (După o idee a lui *Euler*). Presupunem, prin absurd, că numărul numerelor prime este finit. Fie $p_1, \ldots, p_k$ aceste numere. Considerăm identitatea:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} \qquad (1)$$

valabilă pentru orice $x \neq 1$.

Fie $x > 0$ și $x < 1$. Relația (1) se scrie:

$$1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \ldots + \frac{1}{p_i^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{p_i}\right)^n}{1 - \frac{1}{p_i}},$$

pentru $x = \frac{1}{p_i} < 1$, unde p_i este al i-lea număr prim din cele k. Deoarece cînd n crește nemărginit, x^n, pentru $0 < x < 1$, tinde către zero, rezultă că, făcînd în (1) $n \to +\infty$, obținem:

$$1 + x + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1 - x}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci, cu $x = \frac{1}{p_i} < 1$, se găsește:

$$1 + \frac{1}{p_i} + \ldots + \frac{1}{p_i^n} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}.$$

Ca atare, făcînd pe i să parcurgă mulțimea $\{1, 2, \ldots, k\}$ și înmulțind cele k relații obținute, găsim că:

$$\left(1 + \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_1^n} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_2^n} + \ldots\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{p_k} + \ldots + \frac{1}{p_k^n} + \ldots\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.$$

Dar, prin desfacerea parantezelor în primul membru, obținem fracții cu numărătorul 1 și numitorii numere naturale, diferite între ele și, în plus, „epuizează" toate numerele naturale, deci:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}},$$

absurd (vezi VI.98).

În adevăr, primul membru este egal cu $+\infty$ pe cînd al doilea reprezintă un număr finit.

VI.119*. Plecînd de la identitatea:

$$\begin{aligned}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^3 + y_3^2 + y_4^2) &= \\ = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 + (x_1y_2 &- \\ - x_2y_1 + x_3y_4 - x_3y_4)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1 &+ \\ + x_4y_2 - x_2y_4)^2 + (x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2,\end{aligned} \quad (*)$$

Scanned with OKEN Scanner

deducem că dacă numerele naturale A și B se descompun sub forma unei sume de patru pătrate ale unor numere naturale, atunci și produsul AB este o sumă de patru pătrate ale unor numere naturale. Să arătăm că dacă p este un număr prim mai mare decît 2, atunci este posibil să găsim un număr m astfel încît $1 \leqslant m < p$ și mp să fie scris sub forma unei sume de patru pătrate ale unor numere naturale:

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Fie, pentru aceasta p un număr prim impar ($p = 2$ corespunde cazului în care $2 = 1^4 + 1^4 + 0^4 + 0^4$).

Considerăm numerele $0^2, 1^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Împărțindu-le, pe fiecare, la p și luînd numai resturile, obținem $\frac{p+1}{2}$ numere r_t, fiecare cuprins între 0 și $p - 1$.

Aceste resturi sînt diferite între ele căci dacă două numere x_1 și x_2, fie $x_1 > x_2$, cuprinse între 0 și $\frac{p-1}{2}$ ar avea proprietatea că pătratele lor, prin împărțirea la p, ar da același rest:

$$x_1^2 = q_1 p + r,$$
$$x_2^2 = q_2 p + r,$$

adică, scăzînd:

$$x_1^2 - x_2^2 = p(q_1 - q_2)$$

ar rezulta că p divide, sau numărul $x_1 - x_2$, sau numărul $x_1 + x_2$, absurd, căci $0 < |x_1 - x_2| < p - 1$ și $0 < |x_1 + x_2| < p - 1$.

Considerăm acum resturile r mărite cu 1 pe care le scădem din p. Obținem din nou $\frac{p+1}{2}$ numere s_t, cuprinse între 0 și $p - 1$, diferite, două cîte două. Cel puțin unul dintre aceste numere s trebuie să fie egal cu un număr r dintre numerele precedente, deoarece

acestea sînt $\frac{p+1}{2}$ dintre cele p numere $0, 1, \ldots,$ $p-1$, lăsînd disponibile $\frac{p-1}{2}$ numere iar numerele s sînt în număr de $\frac{p+1}{2}$. Fie $R = S$ numere egale dintre numerele r și s. R este un rest al împărțirii unui număr x^2 cu p, unde $0 \leqslant x \leqslant \frac{p-1}{2}$. S se obține împărțind cu p un număr y^2, pentru care $0 \leqslant y \leqslant \frac{p-1}{2}$, mărind restul cu 1 și scăzîndu-l apoi din p.

Adică:

$$x^2 = q_1 p + R,$$
$$y^2 = q_2 p + r,$$
$$S = p - (r + 1).$$

Adunînd aceste relații, obținem:

$$x^2 + y^2 + S = (q_1 + q_2 + 1)\, p + R - 1.$$

Dar, cum:

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{p-1}{2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{p-1}{2};$$

obținem, ținînd seama că $R = S$:

$$x^2 + y^2 + 1 = mp, \text{ unde } m = q_1 + q_2 + 1$$

astfel că:

$$0 < mp \leqslant \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + 1 =$$

$$= \frac{p^2 - 2p + 3}{2} < p^2$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci $0 < mp < p^2$ sau $0 < m < p$, ceea ce demonstrează afirmația făcută la începutul considerațiilor noastre deoarece:

$$mp = x^2 + y^2 + 1^2 + 0^2.$$

Să arătăm acum că dacă p este număr prim mai mare decît 2 și dacă m este cel mai mic număr întreg strict pozitiv pentru care mp se poate scrie ca o sumă de patru pătrate ale unor numere întregi, atunci $m = 1$.

Potrivit celor demonstrate anterior, $m < p$. Acest număr p nu poate să fie par pentru că dacă ar fi par atunci numărul:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = mp$$

ar fi egal cu un număr par. În acest caz, sau toate numerele x ar fi pare, sau două ar fi pare și două impare, sau toate ar fi impare. În cazul al doilea, putem presupune că am numerotat numerele x astfel încît x_1 și x_2 sînt pare iar x_3 și x_4 sînt impare (în acest caz, cînd toate numerele x sînt pare, prin împărțirea cu 4 am obține:

$$\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_4}{2}\right)^2 = \frac{m}{4}p, \frac{m}{4} \in N^*,$$

ceea ce contrazice proprietatea de minimalitate a lui m).

În acest caz (oricum s-ar face dealtfel combinațiile), $(x_1 + x_2)$, $(x_1 - x_2)$, $(x_3 + x_4)$, $(x_3 - x_4)$ sînt toate pare. Vom obține deci:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{x_3 - x_4}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 + x_4^2) = \frac{m}{2}p$$

și toate numerele ridicate la pătrat din membrul stîng sînt întregi. Adică, $\frac{m}{2}p$ poate fi scris sub forma unei sume de patru pătrate și prin urmare m nu ar fi cea mai mică valoare presupusă.

Scanned with OKEN Scanner

Așadar, $m < p$ și m impar. Pentru a demonstra că $m = 1$, presupunem $m \neq 1$ și vom arăta că și de data aceasta numărul poate fi micșorat. Deoarece m este impar, putem presupune $m \geqslant 3$. În acest caz obținem:

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \qquad (1).$$

Împărțind pe fiecare x_k prin m, obținem resturile r_k, $0 \leqslant r_k < m$.

Dacă $0 \leqslant r_k \leqslant \frac{m-1}{2}$, vom scrie $y_k = r_k$. Dacă $\frac{m+1}{2} \leqslant r_k \leqslant m-1$, vom scrie $y_k = r_k - m$. În ambele cazuri vom obține $x_k = q_k m + y_k$ și:

$$-\frac{m-1}{2} \leqslant y_k \leqslant \frac{m-1}{2}.$$

Deoarece $y_k = x_k - q_k m$, obținem, deasemenea, folosind (1):

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 -$$
$$- 2m(x_1q_1 + x_2q_2 + x_3q_3 + x_4q_4) + m^2(q_1^2 + q_2^2 +$$
$$+ q_3^2 + q_4^2) = mp - 2m(x_1q_1 + x_2q_2 + x_3q_3 +$$
$$+ x_4q_4) + m^2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) = mn,$$

unde n este un număr întreg. Prin urmare, vom avea $n \neq 0$, deoarece dacă $n = 0$ atunci $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$. Aceasta ar însemna că fiecare x este multiplu de n și, prin urmare, fiecare x^2 este multiplu de m^2, astfel încît p este multiplu de m^2. Dar acest fapt nu poate fi adevărat, deoarece p este prim și $1 < m < p$.

De asemenea, are loc:

$$mn = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \leqslant 4\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 < m^2$$

și deci $n < m$.

Înmulțind (1) și (2) găsim:

$$m^2np = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2). \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Avînd în vedere formula (*) al cărei prim membru coincide cu al doilea al formulei precedente, cu observaţiile că:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = x_1(x_1 - q_1m) +$$
$$+ x_2(x_2 - q_2m) + x_3(x_3 - q_3m) + x_4(x_4 - q_4m) =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - m(x_1q_1 + x_2q_2 + x_3q_3 +$$
$$+ x_4q_4) = mp - m(x_1q_1 + x_2q_2 + x_3q_3 + x_4q_4) =$$
$$= mz_1, \quad z_1 \in Z,$$
$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 = x_1(x_2 - q_2m) -$$
$$- x_2(x_1 - q_1m) + x_3(x_4 - q_4m) - x_4(x_3 - q_3m) =$$
$$= m(-x_1q_2 + x_2q_1 - x_3q_4 + x_4q_3) = mz_2, \quad z_2 \in Z$$

etc., avem că:

$$m^2np = m^2z_1^2 + m^2z_2^2 + m^2z_3^2 + m^2z_4^2,$$

unde $z_i \in Z$ pentru $i \in \{1, \ldots, 4\}$, astfel că:

$$np = z_2^1 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2,$$

ceea ce contrazice proprietatea de minimalitate a lui m (am arătat că $0 < n < m$). Ca atare, $m = 1$.

Rezultă deci că orice număr prim poate fi scris ca o sumă de patru pătrate de numere întregi.

Pentru un n oarecare, $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ (descompunerea canonică a lui n), cu observaţia că $p_i^{\alpha_i}$, în virtutea relaţiei (*) se poate scrie ca sumă de pătrate ale unor numere întregi (produsul a două numere de forma $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ este un număr de aceeaşi formă) şi, prin inducţie, produsul a t — oarecare — numere de forma respectivă este un număr de aceeaşi formă, deducem imediat teorema lui *Lagrange* enunţată.

Scanned with OKEN Scanner

VI.120*. Vom demonstra prin inducție completă că prin schimbarea de variabilă:

$$x = y + \frac{1}{y}$$

polinoamele P_n iau forma:

$$P_n^0 = y^n + \frac{1}{y^n}, \quad n \geqslant 1.$$

În adevăr, utilizînd relația de definiție a polinoamelor P_n, pentru $n = 1$ afirmația este valabilă; apoi:

$$P_2(x) = x^2 - 2 = \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 2 =$$

$$= y^2 + \frac{1}{y^2} = P_2^0(y).$$

Presupunem, pentru toate polinoamele P_m cu $m < n$, proprietatea adevărată. Să arătăm că proprietatea este adevărată și pentru polinomul P_n. Conform relației de definiție și a dezvoltării după *Newton* rezultă imediat că:

$$P_n^0(y) = \left(y + \frac{1}{y}\right)^n - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]_*} C_n^k \left(y^{n-2k} + \frac{1}{y^{n-2k}}\right) = y^n + \frac{1}{y^n}.$$

Polinoamele P_n^0 au rădăcinile date de:

$$\frac{y^{2n} + 1}{y^n} = 0,$$

$$y^{2n} + 1 = 0$$

deci:

$$y_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{2n} + i \sin\frac{\pi + 2k\pi}{2n}$$

unde $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci:

$$x_k = y_k + \frac{1}{y_k} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n} +$$

$$+ \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} - i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n} = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

IV.121[2]. Inegalitatea i°) se scrie și sub forma:

$$(x_1x_2)^2 + (x_3x_5)^2 - x_3x_5(x_1^2 + x_2^2) \leqslant 0$$

și celelalte în mod analog. Sumînd cele cinci inegalități și grupînd termenii, obținem:

$$\sum \frac{x_1^2}{2}[(x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_5)^2] \leqslant 0$$

de unde, cu necesitate, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ deci mulțimea soluțiilor sistemului este:

$$\{(a,\ a,\ a,\ a,\ a)\ |a \in R\}.$$

VI.122*. 1°). Fie $N_1 = \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ și pentru orice $x \in S$ notăm:

$$M(x) = \{i | i \in N_1,\ x \in A_i\}.$$

Fie o submulțime $T \subset N_1$ cu $n + 1 - k$ elemente. Numărul de elemente din $C_T N_1$ este $k - 1$, deci $\bigcup_{i \in T} A_i = S$.

Fie $x \in S$ și $x \in \bigcup_{i \in T} A_i$. Conform enunțului:

$$(\bigcup_{i \in T} A_i) \cup A_j = S$$

pentru orice $j \in T$ deoarece reuniunea conține k mulțimi. În concluzie $x \in A_j$ și $M(x) = T$.

Pentru orice submulțime $T \subset N_1$ cu $n + 1 - k$ elemente am asociat un element $x \in S$ cu proprietatea că $M(x) = T$. Această aplicație este injectivă. În adevăr, dacă $T_1 \neq T_2$, atunci pentru elementele corespunzătoare $x_1 \neq x_2$. În caz contrar $x_1 = x_2 = x$ și

Scanned with OKEN Scanner

avem $x \notin \bigcup_{i \in T_1} A_i$ și $x \in A_j$ pentru orice $j \in T_1$ și $x \notin \bigcup_{i \in T_2} A_i$ și $x \in A_j$ pentru orice $j \in T_2$. Cum mulțimile cu $n+1-k$ elemente T_1 și T_2 sînt diferite, rezultă că există un element $t \in T_1$ și $t \notin T_2$ deci $x \in A_i$ și $x \notin \bigcup_{i \in T_2} A_i$, deci $x \in A_t$, contradictoriu.

Rezultă că numărul elementelor din S, pe care îl notăm $|S|$ este mai mare sau egal cu $C_n^{n+1-k} = C_n^{k-1}$, fiind numărul submulțimilor cu $n+1-k$ elemente incluse în N_1.

2°). Avem $|S| = C_n^{k-1}$ cînd aplicația definită mai înainte este și surjectivă, deci bijectivă. Cu alte cuvinte, $(\forall)\ x \in S$, $|M(x)| = n+1-k$. Deci $|A_i| = |\{x \mid i \in M(x)\}| = C_{n-1}^{k-1}$, numărul mulțimilor cu $n+1-k$ elemente incluse în N_1, care conțin elementul i.

3°). Cînd mulțimea S are un număr minim de elemente, egal cu C_n^{k-1} fiecare $x \in S$ aparține la $n+1-k$ mulțimi A_i. Elementul x aparține la j dintre mulțimile A_i cînd indicii i corespunzători aparțin toți lui $M(x)$.

Deci numărul elementelor comune la j dintre mulțimile A_i este egal cu numărul submulțimilor cu $n+1-k$ elemente din N_1 care conțin j elemente date, adică $C_{n-j}^{n+1-k-j} = C_{n-j}^{k-1}$.

VI.123*. a°). Fie $\frac{a}{b}$ un număr rațional, $a, b \in N^*$, pozitiv. Atunci, evident:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b},$$

unde numărul fracțiilor din al doilea membru este egal cu a.

Însă:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

Scanned with OKEN Scanner

și transformînd fiecare fracție $\frac{1}{b}$ potrivit acestei formule obținem $2a$ fracții, a dintre ele egale cu $\frac{1}{b+1}$ și restul cu $\frac{1}{b(b+1)}$. De observat că numitorii din formula precedentă sînt dispuși în ordine crescătoare. Vom face operația aceasta însă numai asupra a $a-1$ fracții, prima, de exemplu, păstrînd-o netransformată. În felul acesta obținem trei fracții cu numitorii diferiți:

$$\frac{1}{b}, \quad \frac{1}{b+1}, \quad \frac{1}{b(b+1)}$$

și $2a-2$ fracții, $a-1$ dintre ele cu numitorul egal cu $b+1$ și restul cu numitorul egal cu $b(b+1)$. Repetăm raționamentul anterior, reținînd de fiecare dată fracțiile cu numitorii diferiți.

b°). În succesiunea $1, 2, \ldots, n$, există un termen t care conține pe 2 la puterea cea mai mare. Fie $2M$ cel mai mic multiplu comun al succesiunii. Înmulțim cu M ambii membri ai egalității:

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Admițînd că S este întreg, produsul SM este, de asemenea, întreg, ca produs de numere întregi. Fiecare termen din membrul drept al egalității precedente va fi întreg, cu excepția termenului $\frac{M}{t}$ care va avea numitorul 2 (fracția este ireductibilă) deci membrul al doilea nu este întreg, absurd.

Ca atare, S nu poate fi întreg.

c°). Dacă $\frac{t}{n}$ este o fracție ireductibilă atunci $1 - \frac{t}{n} = \frac{(n-t)}{n}$ este tot o fracție ireductibilă. Ca atare, fracțiile ireductibile se pot grupa în perechi, astfel că numărul lor este par.

Scanned with OKEN Scanner

VI.124[2]**.** Construim poligonul $P_1 \dots P_n$ astfel: prelungim latura A_nA_1 iar prin P ducem o paralelă la A_1A_2; punctul lor de intersecție va fi P_1. Prelungim pe A_1A_2 iar prin P ducem o paralelă la A_2A_3; punctul lor de intersecție va fi P_2 și așa mai departe.

Vom arăta că $P_iP_{i+1} = A_iP$, $(\forall)\, i \in \{1, \dots, n\}$ $(P_{n+1} = P_1)$. Considerăm patrulaterul $P_iPA_iP_{i+1}$. Din construcție, $PP_i \| P_{i+1}A_i$. Deci acest patrulater este trapez. Din egalitatea unghiurilor poligonului regulat deducem că acest trapez este isoscel. Însă segmentele P_iP_{i+1} și PA_i apar în acest trapez, fie ca laturile opuse neparalele, deci egale, fie ca diagonale, deci din nou egale.

Pentru $n = 3$, obținem teorema lui *Dimitrie Pompei*.

VI.125*. Din considerente ce le vom justifica imediat, începem cu demonstrația punctului c°). Să arătăm că intersecția a două axe de simetrie se găsește în interiorul poligonului. Fie m și n două axe de simetrie care nu se intersectează în interiorul poligonului. Atunci (vezi fig. VI.125):

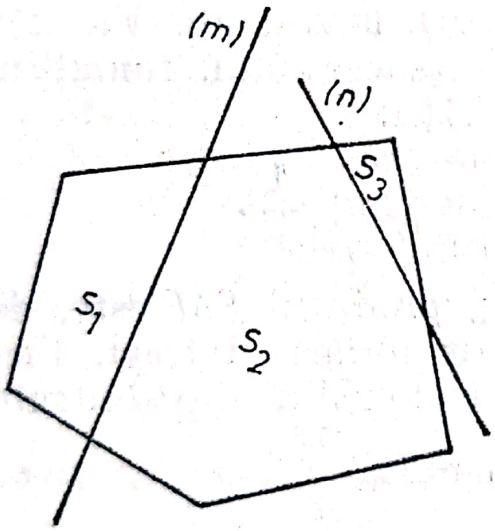


Fig. VI.125

$$S_1 = S_2 + S_3$$

și:

$$S_3 = S_1 + S_2,$$

deci:

$$S_1 < S_3 < S_1, \text{ absurd.}$$

Să presupunem că există trei axe de simetrie care nu sînt concurente. Atunci ele formează un triunghi cu vîrfurile în interiorul poligonului. Fie K un punct arbitrar din interiorul acestui triunghi și N_1 vîrful poligonului situat la distanță maximă de K. N_1 este situat în exteriorul triunghiului ABC și există o axă de simetrie astfel încît punctele N_1 și K să fie situate de aceeași parte a ei. Fie AB această axă. Ducem N' și K_1, simetricele lui N_1 respectiv K față de AB. Perpendiculara din N_1 pe KK_1 este paralelă cu AB,

Scanned with OKEN Scanner

deci H, piciorul înălțimii din N_1 pe KK_1 se află pe aceeași parte a lui AB cu N_1 și K; așadar, $N_1K < N_1K_1 = N'K$. Dar N' este tot un vîrf al poligonului, ceea ce este absurd.

Astfel, este clar că axele de simetrie sînt în număr finit și oricare două axe se intersectează, altfel figura ar fi nemărginită. Fie d_1 și d_2 axe de simetrie, astfel încît $\sphericalangle(d_1, d_2)$ să fie minim. Rezultă că simetricul lui d_1 față de d_2 este axă de simetrie, fie aceasta d_3, etc. Rezultă:

$$\sphericalangle(d_1, d_2) = \frac{\pi}{n} = \sphericalangle(d_2, d_3) = \ldots = \sphericalangle(d_n, d_1)$$

și fie, cum am convenit anterior, $O = \bigcap_{i=1}^{n} d_i$. Dacă există $d' \not\ni O$, axă de simetrie, ducem prin O dreapta $d'' \| d'$ deci d'' cade între d_i și d_{i+1} adică $\sphericalangle(d_i, d'') < \frac{\pi}{n}$, absurd.

a°). Cele n axe de simetrie sînt concurente; fie O punctul lor de concurență. Am văzut că axele de simetrie se succed din $\frac{\pi}{n}$ în $\frac{\pi}{n}$.

Fie $d_1, d_2, \ldots, d_{2n}$ cele $2n$ semidrepte cu capătul în O determinate de axele de simetrie, numerotate astfel ca pentru $1 \leqslant k \leqslant 2n-1$:

$$\sphericalangle(d_k, d_{k+1}) = \frac{\pi}{n} \text{ și } \sphericalangle(d_{2n}, d_1) = \frac{\pi}{n}.$$

Fie A_1 un punct de pe frontiera poligonului și care se găsește pe bisectoarea unghiului (d_1, d_2). Se construiește inductiv A_{k+1}, simetricul lui A_k față de d_{k+1}, oricare ar fi $k \in \{1, \ldots, 2n-1\}$. Evident, poligonul $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ este regulat și toate vîrfurile sale se află pe frontiera poligonului.

Pentru orice $d \mid 2n$, se unesc vîrfurile poligonului $A_1 \ldots A_{2n}$ din $2n \mid d$ în $2n \mid d$ și se obțin celelalte poligoane regulate. regulate.

Scanned with OKEN Scanner

b°). Fie P un punct în interiorul uneia din laturile poligonului. Considerăm o rotație de 60° a poligonului în jurul lui P. Evident, frontiera poligonului rotit mai intersectează frontiera poligonului dat în cel puțin încă un punct.

VI.126*. a°). Un cub poate fi deformat continuu astfel încît muchiile care pleacă dintr-un vîrf să formeze între ele unghiuri de 60°. Aceste muchii, împreună cu segmentele care unesc capetele lor, formează un tetraedru regulat. Similar, muchiile care pleacă din vîrful diametral opus determină și ele un tetraedru regulat. Să observăm că fiecare față a paralelipipedului obținut prin deformarea cubului are ca diagonală cîte un segment construit anterior (care unește două muchii). Aceste segmente, împreună cu cele 6 muchii care au rămas, determină un octaedru regulat. Rezultă că o rețea de cuburi (care umplu tot spațiul) poate fi deformată continuu într-o îmbinare de tipul cerut.

b°). Într-un aranjament compact de cuburi egale (care umplu spațiul), alegem alternat cuburile (de exemplu: colorăm un cub în alb, apoi toate cuburile care au o față comună cu el în negru și așa mai departe, fiecare cub nou fiind colorat cu culoarea opusă celei cu care este colorat un cub cu care are o față comună) și ducem plane prin cele 6 perechi de muchii opuse ale cuburilor alese. Toate aceste cuburi sînt tăiate în piramide congruente avînd baza un pătrat și muchiile laterale egale cu jumătate din diagonala mare a cuburilor. Fiecărui cub netăiat îi sînt acum alăturate 6 piramide, astfel încît acestea, împreună cu cubul, formează un dodecaedru regulat (fiecare față corespunzînd unei muchii a cubului).

Volumul tuturor cuburilor fiind utilizat în acest nou aranjament, dodecaedrele rombice umplu tot spațiul.

c°). Este clar că un poligon cu cel puțin 7 laturi nu poate să aibă mai mult de 5 unghiuri mai mici decît $\frac{2\pi}{3}$ (pentru cazul poligonului cu 7 laturi, dacă ar

Scanned with OKEN Scanner

avea, de exemplu, 6 unghiuri mai mici decît $\frac{2\pi}{3}$; suma lor ar fi mai mică decît 4π deci al 7-lea unghi ar fi mai mare decît $5\pi - 4\pi = \pi$, absurd).

Presupunem că se poate face o pardosire cu poligoane egale cu n laturi, acestea formînd o rețea plană. În fiecare nod al rețelei există cel mult două unghiuri mai mari decît $\frac{2\pi}{3}$. Deci raportul dintre numărul unghiurilor mai mari decît $\frac{2\pi}{3}$ și cele mai mici decît $\frac{2\pi}{3}$ în fiecare nod al rețelei este cel mult 2. Trecînd în revistă toate nodurile rețelei, parcurgem toate unghiurile poligoanelor. Deci ar rezulta că raportul dintre numărul total al unghiurilor mai mari decît $\frac{2\pi}{3}$ și cel al unghiurilor mai mici decît $\frac{2\pi}{3}$ este cel mult 2.

Acest raport este cel mult 2 și pentru unghiurile unui singur poligon. Luînd însă n astfel ca:

$$\frac{n-5}{5} > 2$$

adică $n > 15$, obținem o contradicție, conform primei afirmații.

VI.127*. a°). Fie:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(n-1)d$$

cele n numere prime în progresie aritmetică și p un număr prim, $p < n$. Prin împărțirea la p a acestor numere vom obține într-o anumită ordine, resturile $1, 2, \ldots, p-1$ dacă $a \neq p$ sau resturile $0, 1, 2, \ldots, p-1$ dacă, $a = p$. Deoarece numărul lor este mai mare decît numărul resturilor, cel puțin două dintre ele vor da același rest. Fie:

$$a + id = q_1 p + r,\quad a + jd = q_2 p + r$$
$$0 \leqslant i < j \leqslant p - 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde:

$$(j - i)d = (q_2 - q_1)p$$

deci:

$$p \mid (j - i)d$$

și cum $j - i < p$ deci $p \nmid j - i$, rezultă $p \mid d$ de unde și afirmația din enunț.

b°). Fie p un număr prim de forma $4k + 3$, $k \in N^*$, (un astfel de număr prim există, de exemplu $7 = 4 \cdot 1 + 3$). Să arătăm atunci că există un număr prim p_1' de forma $4k + 3$ cu $p_1' > p$. Fie $A = 4p! - 1$, număr care este de forma $4k + 3$. Dacă A este prim, putem lua $p_1' = A$. În caz contrar, cînd A este compus, toți factorii săi sînt strict mai mari decît p și cel puțin unul este de forma $4k + 3$ căci dacă toți factorii ar fi de forma $4k + 1$, produsul lor ar fi de forma $4k + 1$, contrar faptului că A este de forma $4k + 3$. În ambele cazuri, există un număr prim $p_1' > p$ de forma $4k + 3$. Raționînd analog, există un număr prim $p_2' > p_1'$, de forma $4k + 3$. În felul acesta obținem șirul infinit:

$$p < p_1' < p_2' \ldots$$

c°). Dacă r este rația progresiei iar a_n un termen oarecare, atunci:

$$a_{m+n} = a_n + mr.$$

Deoarece progresia este infinită, există m astfel încît $m = a_n$, cînd $a_n > 1$, deci:

$$a_{m+n} = a_n(1 + r),$$

de unde rezultă că a_{m+n} este compus, deoarece $r \geqslant 1$. Afirmația este astfel dovedită.

d°). Pentru $k = 1$ alegem, de exemplu, numărul 4. Pentru $k = 2$ putem lua 9, 10. Pentru $k = 3$ avem numerele 20, 21, 22. Pentru $k \geqslant 4$, numerele:

$$(k + 1)! + 2, \quad (k + 1)! + 3, \ldots, (k + 1)! + (k + 1),$$

în număr de k, sînt toate compuse.

VI.128*. Condiția este necesară.

Presupunem că există două numere x și y astfel încît, $[tx]_*$ cu $t = 1, 2, 3, \ldots$ și $[ky]_*$ cu $k = 1, 2, 3, \ldots$, parcurg tot șirul natural fără repetare. Să dăm lui t

Scanned with OKEN Scanner

și k valori astfel ca să obținem șirul 1, 2, 3, ..., N_1 (N_1 fiind un număr dat, oarecare).

Evident:

$$[tx]_* \leqslant N_1; \quad tx < N_1 + 1; \quad t < \frac{N_1}{x} + \frac{1}{x}$$

și, analog:

$$k < \frac{N_1}{y} + \frac{1}{y}.$$

Vom da deci lui t valori de la 1 pînă la $\left[\frac{N_1}{x} + \frac{1}{x}\right]_*$ și lui k de la 1 pînă la $\left[\frac{N_1}{y} + \frac{1}{y}\right]_*$. Trebuie să obținem în total N_1 valori deci:

$$\left[\frac{N_1}{x} + \frac{1}{x}\right]_* + \left[\frac{N_1}{y} + \frac{1}{y}\right]_* = N_1,$$

de unde:

$$N_1 \leqslant \frac{N_1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{N_1}{y} + \frac{1}{y} < N_1 + 2.$$

Împărțind cu N_1 obținem inegalitățile:

$$1 \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{N_1}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \leqslant 1 + \frac{2}{N_1}$$

care are loc pentru orice N_1. Trecînd la limită, $N_1 \to +\infty$, găsim:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

Rămîne să arătăm că x și y sînt iraționale.

Dacă x ar fi rațional, $x = \frac{m}{n}$ ($m, n \in N^*$) și $y = \frac{x}{x-1} = \frac{m}{m-n}$ ar fi rațional și atunci:

$$[xn]_* = m,$$
$$[y(m-n)]_* = m,$$

deci ar exista repetare.

Scanned with OKEN Scanner

Condiția este suficientă. Dacă x și y sînt iraționale și:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$$

atunci $x>1$, $y>1$ și nici un tx sau ky nu este întreg. În numerele unui șir din cele două nu putem avea repetare căci din:

$$[tx]_*=[(t+1)x]_*$$

ar rezulta:

$$x(t+1)-xt<1.$$

Un număr dintr-un șir nu poate fi și în celălalt. În adevăr, să presupunem că ar exista un t și un k astfel încît $[tx]_*=c$ și $[ky]_*=c$; ar rezulta $c<tx<c+1$, $c<ky<c+1$;

$$\frac{c}{x}<t<\frac{c}{x}+\frac{1}{x},\quad \frac{c}{y}<k<\frac{c}{y}+\frac{1}{y}$$

și, prin adunare, ținînd seama că:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1,$$

obținem:

$$c<t+k<c+1,$$

ceea ce nu este posibil.

Orice număr întreg c se află într-unul din șiruri. Dacă nu există un t astfel ca $[tx]_*=c$, înseamnă că între c și $c+1$ nu se află tx, deci între $\frac{c}{x}$ și $\frac{c}{x}+\frac{1}{x}$ nu se află un întreg. Notînd $\frac{c}{x}=i+f$, unde $i=\left[\frac{c}{x}\right]_*$, înseamnă că $f+\frac{1}{x}<1$. Să arătăm că în acest caz există un k astfel încît $[ky]_*=c$, $c<ky<c+1$, adică există un întreg k între $\frac{c}{y}$ și $\frac{c}{y}+\frac{1}{y}$.

Conform condiției:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1,$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem:

$$\frac{c}{y} = c - \frac{c}{x}$$

și:

$$\frac{c}{y} + \frac{1}{y} = \frac{c}{y} + 1 - \frac{1}{x}.$$

Dar:

$$\frac{c}{y} = (c - i) - f$$

iar:

$$\frac{c}{y} + \frac{1}{y} = (c - i) + 1 - \left(f + \frac{1}{x}\right).$$

Între $\frac{c}{y}$ și $\frac{c}{y} + \frac{1}{y}$ există întregul $c - i$, căci $f + \frac{1}{x} < 1$.

VI.129. Deoarece:

$$\frac{2}{(2k+1)^2} < \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}; \quad (\forall)\, k \in N^*$$

obținem că:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right)\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n+4} < \frac{1}{4}$$

și, de aici, evident, inegalitatea din enunț.

VI.130*. Numărul t, indicînd numărul de operații efectuate asupra numărului q, $1 \leqslant q \leqslant a$, ștergeri respectiv completări, este egal cu numărul divizorilor lui q. Dacă însă:

$$q = p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots p_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$$

unde p_{i_k}, $i_k \in N^*$, sînt numere prime, atunci $t =$

$= (\alpha_{i_1} + 1) \dots (\alpha_{i_k} + 1)$. Dacă măcar un a_{i_t} este impar, $1 \leqslant t \leqslant k$, atunci locul numărului q este gol. Dacă toți a_{i_t}, $i_t \in N^*$, sînt pari, q este pătratul unui număr și locul său este ocupat. Ori, prin procedeul descris, t este impar deci q este pătrat perfect astfel că afirmația este dovedită.

VI.131*. Considerăm funcția definită prin:

$$f(\Theta) = 1 - \frac{x_1}{a_1 + \Theta} - \frac{x_2}{a_2 + \Theta} - \dots - \frac{x_n}{a_n + \Theta}$$

care se anulează pentru $\Theta \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ potrivit enunțului.

Ca atare:

$$f(\Theta) = k \frac{(\Theta - \lambda_1) \dots (\Theta - \lambda_n)}{(\Theta + \lambda_1) \dots (\Theta + \lambda_n)}.$$

Ca atare:

$$1 - \frac{x_1}{a_1 + \Theta} - \frac{x_2}{a_2 + \Theta} - \dots - \frac{x_n}{a_n + \Theta} =$$

$$= k \frac{(\Theta - \lambda_1) \dots (\Theta - \lambda_n)}{(\Theta + a_1) \dots (\Theta + a_n)} = k \frac{\left(1 - \frac{\lambda_1}{\Theta}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_n}{\Theta}\right)}{\left(1 + \frac{a_1}{\Theta}\right) \dots \left(1 + \frac{a_n}{\Theta}\right)}$$

(ultima egalitate cînd $\Theta \neq 0$). Cînd Θ tinde către $+\infty$, fiecare din fracțiile $\frac{\lambda_i}{\Theta}$, $\frac{a_i}{\Theta}$, $i \in \overline{1, n}$ tinde către 0 și analog pentru fracțiile $\frac{x_i}{a_i + \Theta}$. Obținem $k = 1$ deci:

$$1 - \frac{x_1}{a_1 + \Theta} - \frac{x_2}{a_2 + \Theta} - \dots - \frac{x_n}{a_n + \Theta} = \frac{(\Theta - \lambda_1) \dots (\Theta - \lambda_n)}{(\Theta + a_1) \dots (\Theta + a_n)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind cu $a_1 + \Theta$ și făcînd apoi $\Theta = -a_1$, găsim:

$$x_1 = (-1)^{n+1} \frac{(a_1 + \lambda_1) \dots (a_1 + \lambda_n)}{(a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1)} \text{ etc.}$$

VI.132*. a°). Presupunem, fără a restrînge generalitatea, că $x_1 \leqslant x_2$ și fie:

$$P_1 = (x_1 - 1)!\,(x_2 + 1)!\,x_3!x_4! \dots x_n!.$$

Cum:

$$x_1!x_2! < (x_1 - 1)!\,(x_2 + 1)!,$$

deoarece $x_1 < x_2 + 1$ rezultă că $P < P_1$. Rezultă deci că produsul este minim cînd:

$$|x_i - x_j| \leqslant 1, \ (\forall)\ i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j.$$

Fie:

$$x_1 + \dots + x_n = k$$

și fie q și r cîtul și restul împărțirii lui k la n, adică, altfel scris:

$$k = nq + r$$

cu $0 \leqslant r < n$.

Trebuie deci ca $x_1 = x_2 = \dots = x_r = q + 1$ și $x_{r+1} = \dots = x_n = q$. Atunci:

$$P_{\min} = \underbrace{q!q! \dots q!}_{n-r \text{ ori}} \ \underbrace{(q+1)! \dots (q+1)!}_{r \text{ ori}} = (q!)^{n-r}(q+1)!^r =$$

$$= \left(\left[\frac{k}{n}\right]_*\right)^{n-k+\left[\frac{k}{n}\right]_*} \left(\left[\frac{k}{n}\right]_* + 1\right)^{k-n\left[\frac{k}{n}\right]_*}.$$

b°). Un raționament analog celui precedent conduce la:

$$S_{\min} = \left[\frac{k}{n}\right]_*! \left(n + k\left[\frac{k}{n}\right]_* - n\left[\frac{k}{n}\right]_*^2\right).$$

c°). Maximul cerut este:

$$M = \left(\left[\frac{n}{k}\right]_* + 1\right)^{n-k\left[\frac{n}{k}\right]_*} \left[\frac{n}{k}\right]_*^{k-n+k\left[\frac{n}{k}\right]_*}.$$

VI.133*. a°). Are loc, evident, identitatea

$$2^{20} + 2^{20} = 2^{21}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, altfel scris:

$$(2^5)^4 + (2^4)^5 = (2^3)^7,$$

de unde se vede că $x = 2^5$, $y = 2^4$, $z = 2^3$ constituie soluție pentru ecuația propusă.

b°). De asemenea:

$$2^{55} + 2^{55} = 2^{56},$$

$$(2^{11})^5 + (2^5)^{11} = (2^7)^8,$$

deci ecuația propusă admite drept soluție $x = 2^{11}$, $y = 2^5$, $z = 2^7$.

VI.134*. a°). Dacă luăm șase copii ale triunghiului considerat, pe fiecare fiind trasată curba care împarte aria în două părți egale, și alegem convenabil un vîrf, le putem asambla astfel ca triunghiurile să formeze un hexagon iar curbele o curbă închisă. Curba închisă împarte aria hexagonului în două părți egale astfel încît aria din interiorul ei să fie constantă. Prin urmare, dacă perimetrul ei este minim, curba este un cerc cu centrul într-un vîrf al triunghiului.

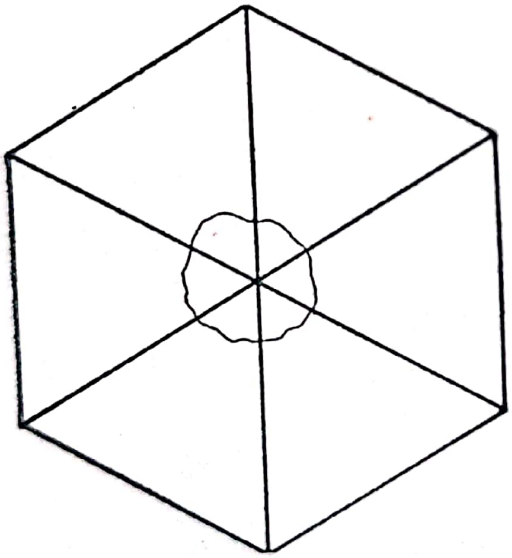


Fig. VI.134.1

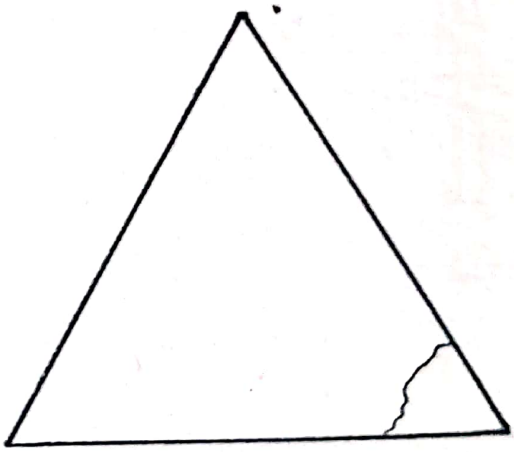


Fig. VI.134.2

b°). Presupunem, prin absurd, că discurile circulare au un punct comun. Considerăm cele șase segmente care unesc acest punct cu fiecare centru. Cel puțin o pereche de segmente formează un unghi care nu depășește 60°. Centrul corespunzător segmentului mai scurt (sau de lungime egală) din această pereche este

Scanned with OKEN Scanner

situat în interiorul discului circular al cărui centru corespunde celuilalt segment. Aceasta contrazice ipoteza care afirmă că nici un disc nu conține centrul altui disc.

VI.135*. Evident:

$$3^{24} + 3^{24} + 3^{24} = 3^{25},$$
$$(3^{12})^2 + (3^8)^3 + (3^6)^4 = (3^5)^5$$

și deci:

$$(3^{12}t^{30})^2 + (3^8t^{20})^3 + (3^6t^{15})^4 = (3^5t^{12})^5,$$

pentru orice $t \in N^*$, deci ecuația propusă are în numere naturale o infinitate de soluții, date de:

$$x = 3^{12}t^{30},$$
$$y = 3^8t^{20},$$
$$z = 3^6t^5,$$
$$k = 3^5t^{12},$$

unde t parcurge mulțimea numerelor naturale fără 0.

O soluție se obține pentru $t = 1$.

VI.136*. Fie:

$$a = x^3 + y^3 + z^3.$$

Ținînd seama de identitatea:

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

se obține:

$$a = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x).$$

Notînd:

$$x + y + z = Z, \; x + y = Y$$

găsim:

$$a = Z^3 - 3Y(Z - Y + x)(Z - x) = Z^3 - 3Y(Z^2 - x^2) + 3Y^2(Z - x).$$

Putem simplifica această egalitate, presupunînd că necunoscutele sînt legate prin relația:

$$Z^3 = 3Y(Z^2 - x^2)$$

Scanned with OKEN Scanner

pe care o vom mai scrie:

$$Z = 3Y\left[1 - \left(\frac{x}{Z}\right)^2\right].$$

Ținînd seama de această condiție impusă, ecuația va avea forma:

$$a = 3Y^2(Z - x) = 2Y^2Z\left(1 - \frac{x}{Z}\right) =$$

$$= 9Y^3\left[1 - \left(\frac{x}{Z}\right)^2\right]\left(1 - \frac{x}{Z}\right) =$$

$$= 9Y^3\left(1 - \frac{x}{Z}\right)^2\left(1 + \frac{x}{Z}\right).$$

Luînd o nouă necunoscută $X = \frac{x}{Z}$, obținem:

$$a = 9Y^3(1 - X)^2(1 + X);$$

$$Z = 3Y(1 - X^2).$$

În fine, luînd o nouă necunoscută $\overline{Y} = 3Y(1 - X)$ relația de legătură și egalitatea iau forma:

$$Z = \overline{Y}(1 + X);\ a = \frac{1}{3}\overline{Y}^3\frac{1 + X}{1 - X}.$$

Din ultima egalitate exprimăm pe X rațional în funcție de a și $\overline{Y}$:

$$X = \frac{3a - \overline{Y}^3}{3a + \overline{Y}^3}.$$

Observăm că dacă $X = \frac{3a - \overline{Y}^3}{3a + \overline{Y}^3}$ și $Z = \overline{Y}(1 + X)$ atunci:

$$a = x^3 + y^3 + z^3,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde x, y și z sînt dați de formulele:

$$x = ZX,$$

$$y = Y - x = \frac{\overline{Y}}{3(1 - X)} - ZX,$$

$$z = Z - Y = Z - \frac{\overline{Y}}{3(1 - X)}.$$

Din aceste formule rezultă că x, y și z sînt numere raționale dacă necunoscuta $\overline{Y}$ este rațională. Deci pentru $\overline{Y}$ număr rațional arbitrar este posibilă rezolvarea ecuației în numere raționale (dar nu neapărat pozitive).

Rămîne să arătăm că putem alege pe $\overline{Y}$ astfel ca numerele x, y și z să fie și pozitive. Să exprimăm:

$$Z = x + y + z,$$

$$Y = x + y,$$

$$Z - x = y + z,$$

prin X și $\overline{Y}$:

$$x + y + z = Z = \overline{Y}(1 + X),$$

$$x + y = Y = \frac{\overline{Y}}{3(1 - X)},$$

$$y + z = Z - x = (1 - X)Z = \overline{Y}(1 - X^2)$$

și apoi prin a și $\overline{Y}$:

$$1 - X = 1 - \frac{3a - \overline{Y}^3}{3a + \overline{Y}^3} = \frac{2\overline{Y}^3}{3a + \overline{Y}^3},$$

$$1 + X = 1 + \frac{3a - \overline{Y}^3}{3a + \overline{Y}^3} = \frac{6a}{3a + \overline{Y}^3}.$$

Obținem:

$$x + y + z = \frac{6a\overline{Y}}{3a + \overline{Y}^3},$$

$$x + y = \frac{3a + \overline{Y}^3}{6\overline{Y}^2},$$

$$y + z = \frac{12a\overline{Y}^4}{(3a + \overline{Y}^3)^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să punem în aceste formule $\overline{Y} = \sqrt[3]{3a}$ sau, altfel scris, $3a = \overline{Y}^3$ (evident, $\overline{Y}$ poate fi și irațional). Astfel obținem:

$$x + y + z = Y,$$

$$x + y = \frac{1}{3}\overline{Y},$$

$$y + z = \overline{Y},$$

adică:

$$x = 0,$$

$$y = \frac{1}{3}\overline{Y} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3a},$$

$$z = \frac{2}{3}\overline{Y} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3a}.$$

Alegem acum pe $\overline{Y}$ astfel ca să fie număr rațional pozitiv și mai mic decît $\sqrt[3]{3a}$ dar apropiat de $\sqrt[3]{3a}$. Din egalitățile precedente rezultă atunci că y și z vor fi apropiați respectiv de $\frac{1}{3}\sqrt[3]{3a}$ și $\frac{2}{3}\sqrt[3]{3a}$ și deci pozitivi. Apoi, cum:

$$\overline{Y} < \sqrt[3]{3a}, \quad 3a > \overline{Y}^3, \quad 3a + \overline{Y}^3 > 2\overline{Y}^3,$$

vom obține:

$$\frac{x + y + z}{y + z} = \frac{3a + \overline{Y}^3}{2\overline{Y}^3} > 1,$$

de unde rezultă că x va fi pozitiv și demonstrația este terminată.

VI.137*. Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $|a_1| \geqslant |a_2| \geqslant \ldots \geqslant |a_8|$. În caz contrar, avînd în vedere simetria relațiilor date, permutăm numerele între ele.

Deoarece numerele $a_i (i = 1, \ldots, 8)$ nu sînt nule, avem:

$$c_n \neq 0, \quad (\forall)\, n \equiv 0 \pmod 2.$$

Să arătăm că $a_1 = -a_2$. Dovedim mai întîi că $|a_1| = |a_2|$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $|a_1| \neq |a_2|$ atunci fie:

$$1 > \rho = \frac{|a_2|}{|a_1|}.$$

În baza inegalităților:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \quad \text{și} \quad |a + b| \geqslant \| a| - |b \|$$

deducem:

$$|c_n| \geqslant \| a_1^n| - |a_2^n + \ldots + a_8^n \|$$

și:

$$|a_2^n + a_3^n + \ldots + a_8^n| \leqslant |a_2^n| + |a_3^n| + \ldots + |a_8^n| \leqslant 7\rho^n |a_1^n|.$$

Ca atare:

$$|c_n| \geqslant \| a_1^n| - |a_2^n + \ldots + a_8^n \| \geqslant |a_1^n| (1 - 7\rho^n).$$

Dar:

$$1 > \rho > 0$$

($\rho = 0$ nu este acceptabil). Considerînd:

$$n > \frac{\ln 7}{-\ln \rho}$$

obținem:

$$-n \ln \rho > \ln 7 \quad \text{sau} \quad 1 > 7\rho^n$$

deci:

$$|c_n| > |a_1^n| (1 - 7\rho^n) > 0.$$

Rezultă deci că am avea $c_n = 0$ doar pentru un număr finit de indici n, caz exclus. Ca atare, $|a_1| = |a_2|$.

Dacă $a_1 = a_2$, procedînd ca mai sus, găsim:

$$|c_n| > |a_1^n| (2 - 6\rho^n)$$

și, de la un indice n în continuare, $c_n \neq 0$, exclus. Ca atare $a_1 = -a_2$.

Pentru orice $n \equiv 1 \pmod 2$ obținem deci:

$$c_n = a_3^n + \ldots + a_8^n.$$

Analog, $a_3 = -a_4$, $a_5 = -a_6$, $a_7 = -a_8$.

Deducem deci că $c_n = 0$, $(\forall)$ $n \equiv 1 \pmod 2$ și $c_n \neq 0$, $(\forall)$ $n \equiv 0 \pmod 2$.

Scanned with OKEN Scanner

VI.138*. Vom folosi, pentru demonstrație, o formă a *principiului cutiei* (sau al lui *Dirichlet*):

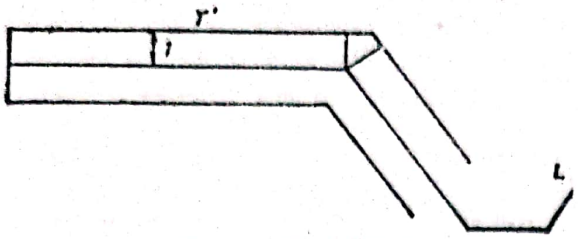


Fig. VI.138.1

fie în plan o figură F de arie S și n figuri F_i de arii S_i, $i = 1, \ldots, n$.

Atunci:

$$(A) \quad S > \sum_{i=1}^{n} S_i$$

implică faptul că cele n figuri $F_i (i = 1, \ldots, n)$ nu pot acoperi figura F.

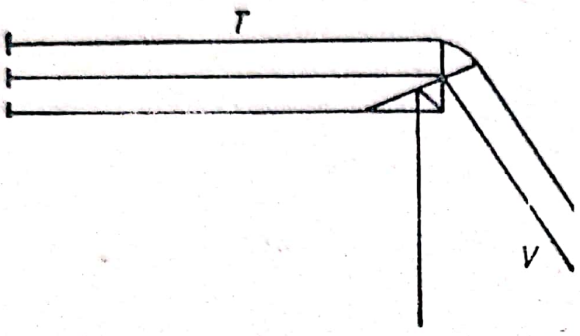


Fig. VI.138.2

(B) Dacă cele n figuri $F_i (i = 1, \ldots, n)$ acoperă pe F atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i > S.$$

Observăm întîi că locul geometric al punctelor din plan care se găsesc la distanță mai mică decît 1 de L este banda rotunjită T de lățime 2, ca în fig. IV.138.1.

Din condițiile problemei rezultă că T acoperă pătratul. Deci, conform cu (B), $S_T > 50^2$.

Pe de altă parte, dacă L ar fi o dreaptă, T ar fi formată dintr-un dreptunghi de laturi l și 2 și din două semicercuri de rază l la capetele lui L (prin l am notat lungimea lui L). Într-un punct în care L se „strîmbă" se adaugă un sector de cerc, dar se scade un patrulater cu arie mai mare decît a sectorului (vezi fig. VI.138.2.). Deci:

$$S_T \leqslant 2l + \pi < 2l + 4,$$

de unde:

$$2l + 4 > 2\,500,$$

adică, în fond:

$$l > 1\,248.$$

VI.139*. Să arătăm că:

$$10^t > t^5, \ (\forall)\ t \in [4, +\infty).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceasta să dovedim că:

$$10^t > (t+1)^5, \ (\forall)\ t \in N,\ t \geqslant 4.$$

Pentru $t = 4$:

$$10^4 = 10\,000 > 5^5 = 3\,125.$$

Presupunem formula adevărată pentru toți $t \in N^*$, $t < t_0$, t_0 fiind un număr natural oarecare. Deci:

$$10^{t_0-1} > t_0^5,$$

$$10^{t_0} > 10t_0^5 > (t_0+1)^5 = t_0^5 + 5t_0^4 + 10t_0^3 + 10t_0^2 + 5t_0 + 1,$$

căci:

$$9 > \frac{5}{t_0} + \frac{10}{t_0^2} + \frac{10}{t_0^3} + \frac{5}{t_0^4} + \frac{1}{t_0^5}$$

pentru orice $t_0 \geqslant 4$, $t_0 \in N^*$.

De aici:

$$10^{t+\varepsilon} \geqslant 10^t > (t+1)^5 > (t+\varepsilon)^5$$

pentru orice $\varepsilon \in [0, 1)$ și $t \in N$, $t \geqslant 4$.

Cu substituția $2n = x^2$, inegalitatea de demonstrat ia forma:

$$4^{\frac{x^3}{3}} > 2x^{x+1}, \ (\forall)\ x \in [12, +\infty)$$

sau, prin logaritmare:

$$\frac{x^2}{3} \lg 4 > (x+1) \lg x + \lg 2$$

adică, altfel scris:

$$x^2 \lg 4 > 3(x+1) \lg x + 3 \lg 2.$$

Dar:

$$10^t > t^5, \quad (\forall) t \in [4, +\infty)$$

sau:

$$10^{\frac{t}{5}} > t, \quad (\forall)\ t \in [4, +\infty);$$

Scanned with OKEN Scanner

adică, logaritmînd:

$$t^{\frac{1}{5}} > \lg t, \quad (\forall) t \in [4, +\infty). \tag{1}$$

Dar:

$$t^{\frac{9}{5}} > 6(t+1), \quad (\forall)\, t \in [12, +\infty), \tag{2}$$

după cum rezultă din inegalitatea:

$$t^4 > 6^5 \left(1 + \frac{1}{t}\right)^5, \quad (\forall)\, t \in [12, +\infty).$$

Înmulțind (1) cu (2) găsim:

$$t^2 > 6(t+1) \lg t, \quad (\forall)\, t \in [12, +\infty).$$

Dar:

$$(6 \lg 4)\,(t+1) \lg t > 3(t+1) \lg t + 3 \lg 2,$$
$$(\forall)\, t \in [12, +\infty).$$

În adevăr:

$$[(t+1) \lg t]\,(6 \lg 4 - 3] > 3 \lg 2$$

implică:

$$(t+1) \lg t > \frac{3 \lg 2}{3(4 \lg 2 - 1)}$$

sau:

$$(t+1) \lg t > 1{,}55 > \frac{3 \lg 2}{3(4 \lg 2 - 1)}, \quad (\forall)\, t \in [12, +\infty),$$

evident, căci funcția $f: R_0^+ \to R$ definită prin $f(t) = (t+1) \ln t$ este crescătoare.

VI.140[2]. *Soluția I.* În triunghiul AA_1C (vezi fig. VI.140.1) aplicăm teorema lui *Menelau* pentru transversalele BB_1 și $\beta\gamma$:

$$\frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{OA_1}{OA} \cdot \frac{BC}{BA_1} = 1, \quad \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{OA}{OA_1} \cdot \frac{\alpha A_1}{\alpha C} = 1$$

de unde:

$$\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{B_1A}{B_1C}=\frac{\alpha C\cdot BA_1}{BC\cdot\alpha A_1}$$

și analog:

$$\frac{\gamma A}{\gamma B}\cdot\frac{C_1B}{C_1A}=\frac{\alpha B\cdot CA_1}{CB\cdot\alpha A_1}.$$

Rămîne să arătăm că:

$$\alpha B\cdot CA_1+BC\cdot\alpha A_1+$$
$$+C\alpha\cdot BA_1=0$$

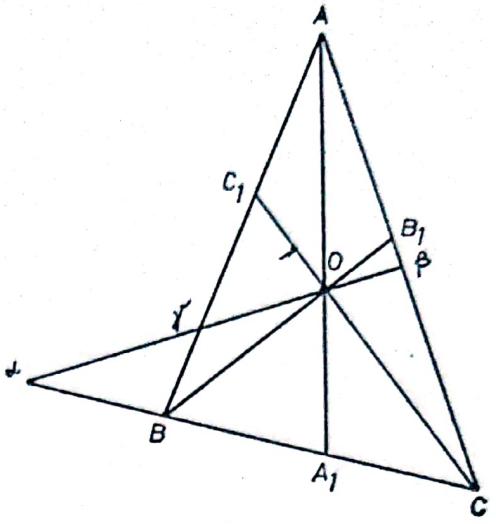


Fig. VI.140.1

adică tocmai relația lui *Euler* pentru punctele α, B, C, A.

Soluția a II-a. Aruncînd dreapta $\beta\gamma$ la infinit, deci și punctul O, dreptele BB_1, CC_1 devin paralele și relația de demonstrat se reduce la:

$$\frac{B_1A}{B_1C}+\frac{C_1A}{C_1B}=1$$

sau:

$$\frac{BA}{BC_1}+\frac{C_1A}{C_1B}=1$$

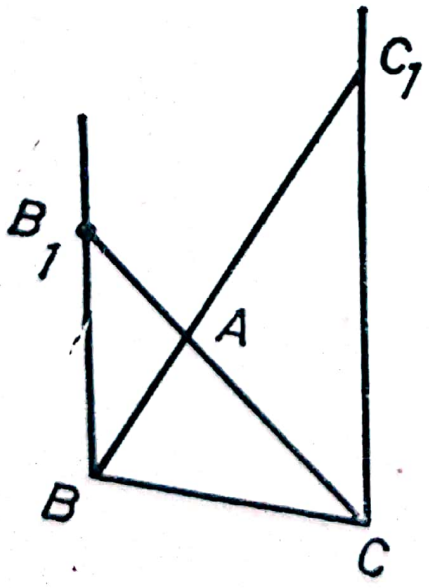


Fig.VI.140.2

ceea ce este evident (vezi fig. VI.140.2).

Cînd secanta $\beta\gamma$ este paralelă cu latura BC, se poate scrie:

$$\frac{\beta C}{\beta A}=\frac{\gamma B}{\gamma A}=\frac{OA}{OA_1}.$$

și obținem relația lui *van Aubel*:

$$\frac{B_1A}{B_1C}+\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{OA}{OA_1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

VI.141*. a°). Evident:

$$\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}=\frac{a_k-a_{k-1}}{a_k\sqrt{a_k}}\geqslant 0$$

căci, prin ipoteză:

$$a_k\geqslant a_{k-1},\quad a_k\geqslant 1,\quad (\forall)\ k\in N.$$

Sumînd după k obținem:

$$b_n\geqslant 0,\quad (\forall)\ n\in N.$$

Dar:

$$T_k=\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}=\frac{2(a_k-a_{k-1})}{2a_k\sqrt{a_k}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2(a_k-a_{k-1})}{a_k(\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}})},$$

deoarece din $a_{k-1}\leqslant a_k$ se obține $\sqrt{a_{k-1}}\leqslant\sqrt{a_k}$; cum:

$$a_k\geqslant\sqrt{a_ka_{k-1}}$$

rezultă:

$$T_k\leqslant\frac{2(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}})(\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k-1}})}{a_k(\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k-1}})}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}})}{\sqrt{a_k}\sqrt{a_k}}\leqslant\frac{2(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}})}{\sqrt{a_k}\sqrt{a_{k-1}}}=$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right),$$

de unde, sumînd după k:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}T_n\leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}-\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_1}}-\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)<2,$$

de unde rezultă complet a°).

b°). Șirul $\{a_n\}$ $n\in N$ definit prin:

$$a_0=1,\quad a_n=1+(n-1)r$$

cu $r>0$, are proprietatea din enunț.

CUPRINS

Cuvînt înainte 5

Din partea autorilor 9

Notații. Abrevieri principale 11

CAPITOLUL 0 Elemente de logică

0.1.0. Propoziții. Conjuncția. „și". Conjuncția „sau". Implicația. Echivalența. Negația 15

0.2.0. Elemente de logică polivalentă 19

0.3.0. Tipuri de demonstrații 24

Probleme propuse (O.P.1—O.P.11) 25

Soluții, indicații, răspunsuri (O.P.1—O.P.11) 28

CAPITOLUL I MULȚIMI

I.1.0. Proprietăți generale. Mulțime. Element. Compararea mulțimilor 31

I.2.0. Operații cu mulțimi. Reuniunea. Intersecția. Diferența. Complementara. Diferența simetrică. Produs cartezian. Partiții 33

I.3.0. Funcția caracteristică a unei mulțimi 39

I.4.0. Mulțimi de numere reale 41

I.5.0. Considerații finale 42

Probleme rezolvate (I.R.1.—I.R.15) 43

Teste (I.T.1.—I.T.13.) 49

Răspunsuri (I.T.1—I.T.13) 52

Probleme propuse (I.P.1—I.P.36) 52

Indicații (I.P.1—I.P.34) 58

Soluții (I.P.1—I.P.36) 59

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II STRUCTURI ALGEBRICE

II.1.0. Relații de preordine, ordine, echivalență.. 68
II.2.0. Relații funcționale 72
II.3.0. Legi de compunere interne 74
II.4.0. Semigrup 78
II.5.0. Grupuri 80
II.6.0. Inele 81
II.7.0. Corpuri 82
II.8.0. Restricția unei relații. Relația indusă. Relația diagonală. Funcția identică. Ordinul unui grup. Cel mai mare element într-o mulțime ordonată. Cel mai mic element într-o mulțime ordonată 82
Probleme rezolvate (II.R.1—II.R.8) 84
Teste (II.T.1—II.T.21) 87
Răspunsuri (II.T.1—II.T.21) 93
Probleme propuse (II.P.1—II.P.22) 95
Indicații (II.P.3—II.P.21) 99
Soluții (II.P.1—II.P.22) 100

CAPITOLUL III ALGEBRA

III.1.0. Valoarea numerică 119
III.2.0. Calculul prescurtat 119
III.3.0. Noțiunea de aplicație 120
III.4.0. Funcții 120
III.5.0. Funcția inversă 124
III.6.0. Funcții monotone 125
III.7.0. Graficul unei funcții 126
III.8.0. Funcție pară. Funcție impară 126
III.9.0. Funcție periodică 126
III.10.0. Funcție aditivă..... 127
III.11.0. Clasificarea funcțiilor reale 127
III.12.0. Zerourile unei funcții 134
III.13.0. Operații cu funcții 134
III.14.0. Ecuații 135
III.15.0. Sisteme de ecuații 135
III.16.0. Inecuații. Inegalități 136
III.17.0. Combinatorică. Combinări, Aranjări. Permutări. Dezvoltarea binomului după Newton.. 138

Scanned with OKEN Scanner

III.18.0. Principiul inducției matematice 139
Probleme rezolvate (III.R.1—III.R.23) 141
Teste (III.T.1—III.T.10) 155
Răspunsuri (III.T.1—III.T.10) 156
Probleme propuse (III.P.1—III.P.170) 157
Indicații (III.P.22—III.P.170) 179
Soluții (III.P.1—III.P.170) 181

CAPITOLUL IV TRIGONOMETRIE

IV.1.0. Funcții trigonometrice 268
IV.2.0. Semnele funcțiilor trigonometrice 274
IV.3.0. Proprietăți ale funcțiilor trigonometrice 276
IV.4.0. Funcții inverse 278
IV.5.0. Graficele funcțiilor trigonometrice directe și inverse 281
IV.6.0. Formule fundamentale 285
IV.7.0. Maxime și minime trigonometrice 289
IV.8.0. Ecuații și sisteme de ecuații trigonometrice 293
IV.9.0. Numere complexe 299
IV.10.0. Calcul vectorial 307
IV.11.0. Rezolvarea triunghiului 309
Probleme rezolvate (IV.R.1—IV.R.11) 312
Teste (IV.T.1—IV.T.20) 326
Răspunsuri (IV.T.1—IV.T.20) 331
Probleme propuse (IV.P.1—IV.P.60) 331
Indicații (IV.P.1—IV.P.10) 342
Soluții (IV.P.1—IV.P.60) 345

CAPITOLUL V GEOMETRIE SINTETICĂ

V.1.0. Transformări geometrice 390
V.2.0. Geometria triunghiului 398
V.3.0. Conice 407
V.4.0. Geometria patrulaterului 411
V.5.0. Construcții geometrice 414
V.6.0. Elemente de geometrie proiectivă 417
V.7.0. Locuri geometrice 421
V.8.0. Geometria tetraedrului 422
V.9.0. Metode de rezolvare 424
Probleme rezolvate (V.R.1—V.R.6) 426

Scanned with OKEN Scanner

Teste (V.T.1—V.T.15) 431
Răspunsuri (V.T.1—V.T.15) 434
Probleme propuse (V.P.1—V.P.57) 435
Soluţii (V.P.1—V.P.57) 440

CAPITOLUL VI PROBLEME FINALE

Probleme de sinteză (VI.1—VI.91) 462
Indicaţii (VI.1—VI.91) 479
Soluţii (VI.1—VI.91) 480
Probleme alese (VI.92—VI141) 577
Indicaţii (VI.92—VI. 141) 588
Soluţii (VI.9—VI.141) 589

Lector : GHEORGHE FOLESCU
Tehnoredactor : CORNEL CRISTESCU

Bun de tipar — mai 1977. Apărut 1977.
Comanda nr. 1161. Tiraj 120 000+90 exemplare broşate. Coli tipar 20,75.

Comanda nr. 70 077
Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii",
Bucureşti — Piaţa Scînteii nr 1,
Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner

«Este remarcabilă grija pedagogică ce se reflectă în legătura deliberată a problemelor cu textul teoretic și în soluțiile date acestor probleme».

Acad. prof. NICOLAE TEODORESCU

VOL I — II LEI 23

Scanned with OKEN Scanner